韓國ＯＲ學會誌
第６卷 第２號
1981年 10月

—研究論文—

벡타이득게임의 解法

(A Method for Solving Vector-payoff Game)

朴 淳 達*

Abstract

It is known that two-person zero-sum game with vector payoff can be reduced to a multiple objective linear programming. However, in this case, solutions for the game may not be one, but many.

In many cases in reality, one may need only one solution rather than all solutions. This paper develops a method to find a practical solution for the game by linear programming.

1. 序 論

2人零合게임(two-person zero-sum game)은 보편적으로 實數利得(real-valued payoff)의 경우를 다루고 있다. 즉 2人零合게임의 利得行列(payoff matrix)이

$$B=(b_{ij})_{(i,\ j)\in M,\ N} \qquad b_{ij}\in R$$

로 주어져 있으면 이 行列의 각 要素 b_{ij}가 實數인 경우이다. 그러나 Shapley 〔9〕가 지적했듯이 利得이 벡타로 나타나는 경우가 많다. 이 논문에서는 벡타이득을 가진 2人零合게임(two-person zero-sum game with vector-payoff)을 다루기로 하고 이러한 게임을 벡타이득게임이라 부르기로 한다.

벡타이득게임은 1956년 Blackwell 〔2〕에 의해 주의가 환기되어 그 뒤 계속적으로 발전되어 왔다. 1959년 Shapley 〔9〕에 의해 특수경우 平衡點의 존재가 확인되고 최근에는 Zeleny 〔10〕에 의해 벡타이득게임과 多目的線型計劃法과의 관계가 연구되었다. 그러나 多目的線型計劃法으로 게임을 풀면 解가 많이 나타날 수 있는데 실제로 하나의 解만을 필요로 하는 경우 線型計劃法으로 간편하게 해를 구할 수 있음을 보이고자 한다.

지금 벡타이득게임

$$A=(a_{ij})_{(i,\ j)\in M\times N},$$

단 $a_{ij}=(a_{ij}^1, a_{ij}^2, \cdots, a_{ij}^k, \cdots, a_{ij}^K)\in R^K$,

M : 참가자 1의 戰略集合

N : 참가자 2의 戰略集合

가 주어져 있다고 하자. R^K는 K次유크리트空間을 뜻한다. 여기서 $K=1$이 되면 보통의 2人零合게임이 되어 참가자 1과 2에 最適戰略 X^*, Y^*가 존재하여

$$X^*AY^*=v=\max_X \min_Y XAY=\min_Y \max_X XAY \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

가 성립한다. 이때 v를 게임의 값이라고 부르며 이 식 (1)을 게임의 기본정리, 또는 最小最大定理라고도 한다.

그러나 이러한 定理가 $K>1$일 경우에도 성립할 것인가?

지금

$$A^k=(a_{ij}^k)_{(i,\ j)\in M\times N},\quad a_{ij}^k\in R \ \ \forall_{i,\ j,\ k}$$

라 두면 이 A^k를 구성요소게임(component game)이라고 부르며 이 각 구성요소게임에서는 기본정리가 성립되어 각 참가자에게 최적전략 X^k, Y^k가 있어

$$X^kA^kY^k=v^k \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

가 성립한다. 그러나

$$X^kA^lY^k=v^l \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

가 될 보장은 없다.

따라서 과연 각 참가자들은 어떻게 자기의 이득을

*서울大學校 工科大學 產業工學科

최대화할 것인가라는 문제가 야기된다.

우선 각 참가자들이 각 구성요소게임 A^k에 대해서는 v^k를 추구할 것으로 생각할 수 있다. 그러면 게임 A에 대해서는 각 참가자가

$$V=(v^1, v^2, \cdots\cdots, v^K)$$

를 추구할 것이라고 생각할 수 있다. 그러나 식 (3)에서 본 바와 같이 V를 구할 수 있는 X, Y를 구할 수 있다는 보장은 없다. 그래서 이러한 게임에서는 각 참가자가 이 V에 가까운 해를 구할려고 노력할 것이란 가정하에 해를 구해보는 方法도 생각해 볼 수 있게 된다.

2. 線型計劃法化

前章의 가정에 따라 각 참가자들은 V값에 접근할려고 한다고 한다. 다시 말하면 각 참가자들은 자기들의 混合戰略 X, Y를 택하여 V값과의 차이를 極小化할려고 한다고도 볼 수 있다.

앞으로는 게임의 解를 참가자 1의 입장에서 보기로 한다. 참가자 1에게 각 구성요소게임의 값 $\{v^k\}^K_{k=1}$에 대한 무게 또는 重要度가 $\{w^k\}^K_{k=1}$로 주어졌다고 하자.

그러면 참가자 1은 $\{v^k\}^K_{k=1}$에 대한 차이를 極小化시키는 것이기 때문에 다음과 같은 數理計劃法으로 표현될 수 있다. 즉

$$\min_X \max_Y \min_t \sum_k w^k t^k \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

s.t.

$$XA^kY+t^k \geq v^k \quad k=1,2,\cdots\cdots,K \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

$$t^k \geq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

그런데 식 (5)는

$$\bar{A}^k=(v^k-a_{ij}{}^k)_{(i,\,j)\in M\times N}$$

로 변환시킬 수 있고 따라서 식 (5)는

$$t^k \geq X\bar{A}^kY \quad k=1,2,\cdots\cdots,K \qquad \cdots\cdots\cdots(5)'$$

로 다시 쓸 수 있다.

그러면 주어진 X, Y에 대해 (4), (5)', (6)식의 雙對는

$$\max_s \sum_k (X\bar{A}^kY)s^k \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

s.t.

$$s^k \leq w^k \quad k=1,2,\cdots\cdots,K \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

$$s^k \geq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

단 $s=(s^1, s^2, \cdots\cdots, s^K)$

가 된다. 이 식 (7), (8), (9)는 어떠한 X, Y에 대해서도 성립되므로 식 (7)은 다시

$$\min_X \max_Y \max_s \sum_k (X\bar{A}^kY)s^k \qquad \cdots\cdots\cdots(7)'$$

로 된다.

그런데 식 (8)과 (9)의 極點(extreme point)을 s_r이라 두자. 그러면

$$s_r=(\delta^1 w^1, \delta^2 w^2, \cdots\cdots, \delta^K w^K) \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

단 δ는 0 혹은 1

로 표현할 수 있고 이러한 極點의 개수는 2^K개이다. 식 (8)과 (9)를 만족시키는 s는 모두 極點의 볼록組合으로 표현될 수 있기 때문에

$$s=\sum_{r=1}^{2^K} \alpha_r s_r \qquad \cdots\cdots\cdots(11)$$

단 $\sum_{r=1}^{2^K} \alpha_r=1$

로 표현될 수 있다.

지금

$$z_{jr}=y_j\alpha_r \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

$$z=(z_{jr}),\ \sum_{j,r} z_{jr}=1$$

이라 둔다.

그러면 식 (7)', (8), (9)는

$$\min_X \max_Z X\hat{A}Z \qquad \cdots\cdots\cdots(14)$$

단 $\hat{A}=(A(1),\ A(2),\ \cdots\cdots,\ A(2^K))$,

$A(r)=\sum_k \bar{A}^k s_r{}^k$

로 바꾸어 표현될 수 있다.

이 식 (14)는 표준 2人零合게임형태이기 때문에 참가자 1의 最適戰略은

$$\min V \qquad \cdots\cdots\cdots(15)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}(r)X_i \leq v \quad j=1,2,\cdots\cdots,n \quad r=1,2,\cdots\cdots,2^K \qquad \cdots\cdots\cdots(16)$$

$$\sum_i X_i=1 \qquad \cdots\cdots\cdots(17)$$

$$X_i \geq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(18)$$

을 풀어 얻을 수 있다.

이상에서 보는 바와 같이 벡타이득을 가지는 2人零合게임도 線型計劃法에 의하여 解를 하나 찾을 수 있다. 多目的計劃法에 의하여 벡타이득게임을 풀면 게임의 모든 解를 구할 수 있으나 이 경우에는 벡타의 각 요소가 모두 같은 상대적 무게를 가질 경우이다. 그러나 각 요소에 어떤 형태의 무게를 가지더라도 線型計劃法으로 현실적인 解를 구할 수 있다.

REFERENCES

1. Balinski, M.L., An Algorithm for Finding All Vertices of Convex Polyhedral Sets, J. Soc. Indust. Appl. Math., 9, 72—88, 1961.

2. Blackwell, D., An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoff. Pacific J. Math. 6, 1—8, 1956.
3. Chernoff, H., Rational Selection of Decision Functions, Econometrica, 22, 422—443, 1954.
4. Cook, W.D., "Zero-Sum Games with Multiple Goals", Naval Research Logistics Quarterly, 23, 615-621, 1976.
5. Kramer, V., Entscheidungsproblems, Entscheidungskriterien bei Voelliger Ungewissheit und Chernoffsches Axiomensystem, Metrica, 11, 15—38, 1966.
6. Lee, S.M., Goal Programming for Decision Analysis of Multiple Objectives, Solan Mgt. Rev., 14, 11—24, 1973.
7. Milnor, J., Game Against Nature, in R.M. Thrall, C.H. Coombs, R.L. Davis, eds., Decision Processes, New York, 1957.
8. Park, Soondal, On the Properties of Proerders on the Set of Options Induced by the Guiding Rules, Ph. D. Thesis, University of Cincinnati, 1971.
9. Shapley, L.S., "Equilibrium Points in Games With Vector Payoffs", Naval Research Logistics Quarterly, 6, 57—61, 1959.
10. Yu,P.L. and M. Zeleny, Games with Multiple Payoffs. Int. J.Game Theory 4, 179—191, 1975.
11. 박순달, 벡타이득함수를 가진 게임과 다목적 선형계획법, 한국OR학회지 제6권 제1호, 1981.