

벡타이득함수를 가진 게임과 多目的線型計画法 (Game with Vector-Payoff and Multiple Objective Linear Program)

朴 淳 達*

Abstract

The purpose is to discuss the relationship between zero-sum two-person game with vector-payoff and multiple objective linear program. Further this paper shows that game against nature with vector payoff can be reduced to linear program.

1. 서 론

게임이론은 보통 實數의 利得函數(Payoff function) 値를 가진 게임상황을 다루고 있다. 그러나 실제로는 이득함수치가 실수치가 아닌 前順序 또는 벡타의 값을 가지는 경우가 허다하다.

예를 들어 두 회사가 광고전을 벌릴 경우 보통 그 결과를 실수치(Utility)로 바꾸어 모형화한다. 그러나 실제 그 결과치가 實數로 나타나지 않을 수도 있다. 즉 단순히 순서만을 가지고 그것도 완전한 순서가 아닌 불완전한 순서(前順序)만을 가지는 값으로 나타내야 하는 경우가 많다. 이 때는 그 이득함수치를 실수치로 전환시키지 않고 前順序 그대로 두고 처리하는 것이 바람직할 것이다[13]. 그러나 前順序의 이득함수치를 가진 게임은 수학적 처리에 명료한 결과를 내기가 힘들기 때문에 연구가 부진한 편이다.

또는 평화협상의 경우 양면에서 제출하는 提案(strategy)이 보기에는 아주 단순하나 막상 제안이 받아들여졌을 때는 그 결과가 다방면에 영향을 미치기 때문에 그 결과는 다항목을 가지는 벡타로 표현되기 마련이다. 전통적인 게임이론은 이런 경우도 그 결과치를 실수로 전환시켜 해를 구하지만 벡타 그대로 두고 해를 구할 수 있으면 당연히 그대로가 좋다.

이러한 벡타이득함수치를 가지는 게임의 연구는 Blackwell[2]에서 시작되나 본격적인 진전은 Zeleny [12]에서 시작되었다고 볼 수 있다. Zeleny는 벡타값을 가진 게임을 벡타에 무게中心(Weighted Average)을 주어 Parametric 선형계획법으로 전환시켜 해를 구하고 있다.

본 논문은 벡타이득함수치를 가진 게임의 일반적 해법을 논하고 이러한 게임이 多目的線型計画法과 어떠한 관계를 가지며 對自然게임이 目標計画法에 의하여 어떻게 線型計画法으로 변형되는지를 보이는데 목적이 있다.

2. 2人零和벡타게임

벡타이득함수를 가진 2人零和게임(벡타게임으로 약칭)은 보편적으로 다음과 같이 표현된다.

$$A = (a_{ij})_{(i,j) \in I \times J} \quad (1)$$

단 I 는 제 1 참가자(player 1)의 戰略(Strategic)集合이고 J 는 제 2 참가자의 戰略集合이다. 그리고 각각 m 개, n 개의 요소를 가지고 있다고 하고 a_{ij} 는 K 차 유클리드공간의 벡타라고 하자. 그리고

$$A^k = (a_{ij}^k)_{(i,j) \in I \times J}, \quad k=1, 2, \dots, K$$

라 두기로 하고 a_{ij}^k 는 a_{ij} 의 k 번째의 수이다.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ 로 표현하기로 하고 이 때 $\sum x_i = 1$ 이라 하며, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 로 표현하기로 하고 역시 $\sum y_j = 1$ 이라 한다. 여기서 T 는 Transposi

*서울大學校 産業工學科
현재 University of California, Berkeley 제재중

tion을 뜻한다.

$a \geq b$ 은 어떤 i 에 대해서는 $a_i > b_i$ 그리고 다른 모든

$j \neq i$ 에 대해서는 $a_j \geq b_j$ 를 뜻하며,

$a \geq b$ 는 모든 i 에 대해 $a_i \geq b_i$ 를 뜻하며,

$a = b$ 는 모든 i 에 대해 $a_i = b_i$ 를 뜻하기로 한다.

물론 $K=1$ 일 때는 식 (1)은 보통의 2인 0과제임이 된다. 이 때는 게임의 基本定理(Minimax theorem)에 의해 다음이 성립한다.

$$\max_X \min_Y XAY = \min_Y \max_X XAY = \bar{X}A\bar{Y} = V \quad (2)$$

단 \bar{X}, \bar{Y} 는 제1, 2참가자의 최적전략을 나타낸다.

이 2인 0과제임은 線型計算法으로 변환될 수 있고 또한 線型計算法은 역시 2인 0과제임으로 변환되어 이 두 모형은 서로 同値라는 것은 이미 잘 알려져 있다. 그리고 식 (2)는 線型計算法의 雙對(Duality)定理과 같다.

그러면 2인 0과제임을 어떤가? 이 경우에도 역시 제1 참가자는 그의 이득을 최대화하려고 하고 따라서 그의 이득은

$$\max_X \min_Y XAY$$

로 표시된다. 그래서 2인 0과제임에서와 마찬가지로 (Dantzig [3], pp. 286—287) 다음과 같이 多目的線型計算法으로 표현된다.

$$\begin{aligned} &\max V \\ &\text{subject to} \\ &(A^k)^T X \geq e_n v^k, \quad k=1, 2, \dots, K \\ &e_m^T X = 1 \\ &X \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

단 $e_n = (1, 1, \dots, 1)^T$, $V = (v^1, v^2, \dots, v^K)^T$.

그리고 제2 참가자의 이득은

$$\min_Y \max_X XAY$$

로 나타나며 이것도 마찬가지로 다음과 같은 多目的線型計算法으로 변환된다.

$$\begin{aligned} &\min U \\ &\text{Subject to} \\ &A^k Y \leq e_m U^k, \quad k=1, 2, \dots, K \\ &e_n^T Y = 1 \\ &Y \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

단 $U = (u^1, u^2, \dots, u^K)^T$

이 식 (3), (4)는 전형적인 多目的線型計算法이기 때문에 多目的線型計算法의 解法[1, 4, 5, 9, 10, 11]에 의해 最適解를 구할 수 있다.

그런데 Zeleny[12]는 식 (3)을 多目的線型計算法 대

신 다음과 같은 Parametric 線型計算法으로 전환시키고 있다. 즉

$$\begin{aligned} &\max V(\lambda) \\ &\text{Subject to} \\ &(A(\lambda))^T X \geq V(\lambda), \quad k=1, 2, \dots, K \\ &e_m^T X = 1 \\ &X \geq 0 \end{aligned} \quad (3)'$$

$$\text{단 } V(\lambda) = \sum_{k=1}^K v^k \lambda_k$$

$$A(\lambda) = (\sum_k a_{ij} \lambda_k)_{(i,j) \in I \times J}$$

그리고

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K)$$

이 식 (3)과 (3)'에서는 (3)의 解와 (3)'의 $\lambda (>0)$ 는 一對一對應한다는 것은 잘 알려져 있는 사실이기 때문에 비슷한 표현으로 볼 수 있으나 (3)'에서는 벡타解를 무게中心으로 곱한 것이기 때문에 식 (3)과 (3)'의 解는 반드시 一對一對應한다고 할 수 없다.

그런데 이 多目的線型計算法에서는 보통 線型計算法과 같이 最適値가 唯一한 것이 아니기 때문에 이 식 (3), (4)의 最適値가 과연 同一한 것인가가 문제가 된다. 2인 0과제임에서는 즉 $K=1$ 일 경우에는 식 (3), (4)의 최적치가 同一하다는 것이 線型計算法의 雙對定理에 의해 증명된다.

그런데 (3)의 雙對를 택하게 되면 (Isermann[6]에 의한 방법으로) 이 雙對문제의 解는 식 (4)의 해와 同値가 되는 쌍이 적어도 하나가 있게 된다. 따라서 식 (3)과 (4)는 Isermann[6]의 Proposition 3에 의해 값이 같은 즉

$$\max V = \min U$$

이 되는 최적戰略 \bar{X}, \bar{Y} 이 있다는 것을 알 수 있다. 즉 2인 0과제임의 平衡點(Equilibrium)에 유사한 점이 있다는 것을 알 수 있다. 그러나 이것이 唯一한가, 몇 개 存在하는가는 문제로 남아 있다. 그리고 비록 벡타 게임이 이와 같이 多目的線型計算法으로 변환된다 하더라도 多目的線型計算法이 벡타게임으로 변환될 수 있어 이 두 모형이 同値인가는 문제로 남아 있다.

3. 對自然벡타게임

벡타이득함수를 가진 對自然게임(Game Against Nature with Vector Payoff, 벡타게임으로 약칭)은 다음과 같이 표현된다.

$$A = (a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$$

단, 이 때 I 는 決定權者의 戰略集合이고 J 는 自然의 상태(state)集合이다.

a_{ij} 는 물론 K 차 유클리드空間의 벡터 즉

$$a_{ij} = (a_{ij}^1, a_{ij}^2, \dots, a_{ij}^K)$$

이다. 그리고

$$A^k = (a_{ij}^k)_{(i,j) \in I \times J}$$

로 두기로 한다.

이 벡터게임에서 決定權者는 자기의 이득을 最大化 하고자 한다. 그런데 이득함수가 벡터로 표시되기 때문에 最大化가 단순치 않다.

그러나 이 벡터게임에서는 決定權者가 이득함수치를 각 A^k 에서의 最大이득함수치에 가깝도록 얻으려고 힘 쓸 것이다. 즉 A^k 에서의 最大이득함수치를 v^k 라고 했을 때 決定權者는 이 벡터게임에서 가능한

$$V = (v^1, v^2, \dots, v^K)$$

을 얻으려고 노력하는 것이다. 그러나 이 값이 벡터이기 때문에 반드시 이 값을 얻을 수 있는 것은 아니다.

따라서 決定權者는 이 V 를 하나의 目標로 설정하여 이 目標보다 적은 값, 더 많은 값의 합을 最小化하려고 한다고 해석할 수 있다. 이렇게 볼 때 벡터게임은 다음과 같은 目標計劃法으로 표현될 수 있다. 즉

$$\text{Min Min } \sum \omega^k d^k + \omega^k d^{+k}$$

subject to

$$XA^k U + d^k - d^{+k} = v^k, \quad k=1, 2, \dots, K \quad (5)$$

$$X \geq 0, \quad d \geq 0, \quad d^+ \geq 0$$

단 U 는 自然의 상태벡터이며 ω^k 는 목표 V 의 k 번째의 요소의 重要度이다. 그리고 $d^k = v^k - XA^k U$ 이며 $d^{+k} = XA^k U - v^k$, 즉 目標未達值, 目標 초과치이다.

그런데 실상 $XA^k U > v^k$ 가 되는 X 가 없기 때문에 이 식 (5)는 다음과 같은 식이 된다.

$$\text{Min Min } \sum \omega^k d^k$$

subject to

$$XA^k U + d^k \geq v^k, \quad k=1, 2, \dots, K \quad (6)$$

$$X \geq 0, \quad d^k \geq 0$$

여기서 $A^k = (v^k - a_{ij}^k)_{(i,j) \in I \times J}$ 로 두면 식 (6)의 조건식은

$$d^k \geq X \bar{A}^k U, \quad k=1, 2, \dots, K$$

로 된다. 그래서 식 (6)의 雙對를 구하게 되면

$$\text{Min Max } \sum (X \bar{A}^k U) e^k$$

subject to

$$e^k \leq \omega^k, \quad k=1, 2, \dots, K \quad (7)$$

$$e^k \geq 0$$

가 되어 보편적인 2人零和게임이 되어 線型計劃法으로 풀 수 있게 된다([15] 참조).

4. 결 론

이상 살펴본 바와 같이 벡터게임이 多目的計劃法과 깊은 관계를 가지고 있다는 것을 알 수 있다. 벡터게임은 多目的計劃法으로 변환될 수도 있으며 對自然게임에서 본 바와 같이 벡터에 무게를 주게 되면 線型計劃法으로 변환시켜 게임을 쉽게 처리하게 된다.

그러나 벡터게임에서는 平衡點이 唯一하지 않기 때문에 최적전략을 어떻게 설정하여야 하며 여러개의 平衡點의 실제적 의미는 무엇이며, 벡터게임과 多目的計劃法이 과연 同値인가 하는 문제는 앞으로 연구되어야 할 과제들이다.

REFERENCES

1. Belenson, S.M. and K.C. Kapur (1973). An Algorithm for Solving Multicriterion Linear Programming Problems with Examples. *Opnl. Res. Quart.* 24, 65—77.
2. Blackwell, D. (1956). An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoff. *Pacific J. Math.* 6, 1—8.
3. Dantzig, G.B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton.
4. Evans, J.P. and R.E. Steuer (1973). A Revised Simplex Method for Linear Multiple Objective Programms. *Math. Prog.* 5, 54—72.
5. Ignizio, J.P. (1981). The Determination of a Subset of Efficient Solutions Via Goal Programming. *Compt. Oper. Res.* 8, 9—16.
6. Isermann, H. (1978). On Some Relations between a Dual Pair of Multiple Objective Linear Programms. *Zeitschrift Opns. Res.* 22, 33—41.
7. Kolnbluth, J.S.H. (1974). Duality, Indifferences and Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming. *Opnl. Res. Quart.* 25, 599—614.
8. —, (1977). The Fuzzy Dual: Information for the Multiple Objective Decision-maker. *Compt. Oper. Res.* 4, 65—77.
9. Philip, J. (1972) Algorithms for the Vector Maximization Problem. *Math. Prog.* 2, 207—229.

10. Yu, P.L. and M. Zeleny (1975). The Set of All Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method. *J. Math. Anal. Appl.* 49, 430—468.
11. Zeleny, M. (1974). A Concept of Compromise Solutions and the Method of the Displaced Ideal. *Compt. Oper. Res.* 1, 479—496.
12. — (1975). Games with Multiple Payoffs. *Int. J. Game Theory* 4, 179—191.
13. 박순달 (1971). On the Properties of Preorders on the Set of Options Induced by Guiding Rules, Ruhr-Universitaet.
14. — (1981). Quasi-Equilibrium Point in Two-Person Zero-Sum Game with Vector Puyoff, 未發表
15. — (1981). Solving Games Against Nature with Vector Payoffs by Linear Program, 未發表