

移動設備의 最適經路 (Optimal Route of a Moving Facility)

金 成 寅*
金 善 郁*

Abstract

This paper considers a facility moving along a route of straight line to serve several facilities in xy plane. A route is obtained which minimizes the objective function expressed in terms of average rectilinear distance between the service facility and facilities to be served.

The forms of the objective functions can be classified into several cases according to the initial and end points of the routes. In some cases, as in the problem of optimal location of new facility, the coordinates of the optimal routes are median of the coordinates of facilities to be served. In others, the optimal routes are obtained after examining the values of objective functions on the boundaries of slopes and intercepts. An overall optimal route is obtained by comparing these routes. The entire procedure has been programmed in *BASIC* language, and several case examples are given.

1. 序 論

서비스(service) 對象의 位置가 二次元平面 위에 주어져 있을 때, 이들을 서비스하는 設備의 最適位置 決定을 定量的으로 다루는 많은 연구를 찾아볼 수 있다. 서비스를 하는 設備과 그 對象들간의 距離를 最小化하는 位置決定에 대하여 直角距離(Rectilinear Distance)의 경우는 Francis [4]에 의하여 그리고 直線距離(Euclidean Distance)의 경우는 Eyster 등 [3]에 의하여 해결되고 있다.

이들 연구는 모두 設備가 固定되어서 서비스하는 경우를 다루고 있다. 그러나 우리는 흔히 固定되는 設備의 最適位置를 決定하는 것이 아니라 움직이는 設備의 最適經路(Optimal Route)를 決定하는 문제에 당면하게 된다. 예를 들면, 事故發生의 可能地點이 주어져

있을 때, 事故 발생의 豫防 또는 事故 발생시의 處理를 위하여 어떤 지역을 순찰하는 巡察車의 最適經路 決定, 戰爭勃發 可能地域이 주어져 있을 때, 전쟁 발발의 抑制 또는 전쟁 발발시 그 對處를 위한 艦隊의 最適巡航經路 決定 등과 같은 문제이다.

이러한 사고예방 또는 처리를 위한 移動設備에 대한 연구는 巡察車(Patrol Car)에 대한 연구에서 취급되고 있다. 그러나 이 연구들은 대부분 待期行列理論(Queueing Theory), 模擬技法(simulation), 「마코브」意思決定 모델(Markovian Decision Model) 등을 이용하여 移動設備의 最適數의 決定[1] 또는 一定數의 移動設備에 대한 最適割當[9] 등에 관한 것이고 最適經路의 문제는 주어진 道路網(network) 내에서 有限개의 經路를 다루고 있을 뿐이다.

본 論文은 移動設備과 이의 서비스 對象간의 平均距離를 最小化하는 直線經路를 決定하는 문제를 다룬다. 移動設備과 서비스 對象간의 距離는 直角距離라고 假定

* 高麗大學校

한다. 이 문제의 해결을 위하여는 固定되는 設備의 最適位置 決定에 대한 定量的인 接近方法의 많은 概念들이 사용될 수 있다.

II. 모 델

一定한 經路를 따라 움직이면서 서비스 또는 사고에 대한 예방, 대처를 하여 주는 設備를 移動設備라 부르며, 이 移動設備의 對象이 되는 固定되어 있는 設備를 固定設備라 부르기로 한다. 이제 m 개의 固定設備가 xy 平面위에 位置하고 있다고 가정하며 그 位置의 座標를 각각 $F_1=(f_{1x}, f_{1y}), F_2=(f_{2x}, f_{2y}), \dots, F_m=(f_{mx}, f_{my})$ 로 표시하고 移動設備의 시간 t 에서의 位置를 $M_t=(m_{tx}, m_{ty})$ 로 표시한다.

移動設備의 移動範圍는 x 축과 y 축에 평행한

$$\{(x, y) | x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$$

로 표시되는 直四角形내로 국한하기로 하며 이 직사각형은 모든 固定設備를 포함하기로 가정한다. 移動設備의 經路는 이 범위내에서 直線이라고 가정하며 따라서 經路는

$$m_{ty} = a \cdot m_{tx} + b \quad (x_1 \leq m_{tx} \leq x_2, a, b \text{는 상수})$$

로 표시된다. 移動設備의 出發點과 到着點이 직사각형의 邊위에 있다고 가정하면 이들은 直線 (a, b) 에 따라 결정되며 그 位置를 각각 M_s, M_e 로 표시하기로 한다. 따라서 移動設備가 이동한 距離는 出發點 M_s 와 到着點 M_e 간의 直線의 길이 $l(a, b)$,

$$l(a, b) = \sqrt{(m_{sx} - m_{ex})^2 + (m_{sy} - m_{ey})^2}$$

으로 표시된다. 移動速度를 單位時間당 單位距離라고 하면 移動時間은 $l(a, b)$ 가 된다.

시간 t ($0 \leq t \leq l(a, b)$)에서의 移動設備의 位置 M_t 와 固定設備 i 의 位置 F_i 간의 距離를 $d(M_t, F_i)$ 로 표시한다면 移動設備와 固定設備 i 간의 $l(a, b)$ 시간 동안의 平均距離는

$$\int_0^{l(a, b)} d(M_t, F_i) dt / l(a, b)$$

가 된다. 이제 移動設備에 대한 固定設備 i 의 重要度 또는 關聯度를 w_i 라고 하면 移動設備와 m 개의 固定設備간의 總平均距離 $f(a, b)$ 는

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^m w_i \int_0^{l(a, b)} d(M_t, F_i) dt / l(a, b)$$

로 주어지며 이를 最小化하는 것이 목적이다.

따라서 移動設備의 最適經路 決定의 문제는 다음의 모델로 數式化될 수 있다.

$$\text{Minimize } f(a, b) = \sum_{i=1}^m w_i \int_0^{l(a, b)} d(M_t, F_i) dt / l(a, b) \quad (1)$$

subject to

$$m_{ty} = a m_{tx} + b,$$

$$x_1 \leq m_{tx} \leq x_2,$$

$$y_1 \leq m_{ty} \leq y_2.$$

이제 두점 M_t, F_i 간의 距離를 나타내는 函數 $d(M_t, F_i)$ 를 구체적으로 생각하여 보자. Francis [6]는 일반적으로

$$d(M_t, F_i) = \{|m_{tx} - f_{ix}|^p + |m_{ty} - f_{iy}|^p\}^{1/p}$$

로 표시하고 이를 " l_p 距離"라고 불렀다. l_1 은 直角距離, l_2 는 直線距離가 되므로 실제적인 문제의 대부분이 $p=1$ 과 $p=2$ 의 경우로 나타난다. 또한 $(l_2)^2$ 을 距離의 尺度로 사용하기도 한다.

固定되어 서비스하는 設備의 最適位置 決定에 있어서 문제해결의 難易度를 살펴볼 때, l_1 과 $(l_2)^2$ 의 경우는 용이한 편이나 l_2 의 경우는 복잡한 편이다. 移動設備의 最適經路 決定에 있어서도 문제해결의 難易度는 같을 것으로 예상되며 본 論文은 우선 l_1 의 경우에 있어서 문제해결을 시도하고 있다. 따라서 式 (1)의 目的函數는

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^m \frac{w_i}{l(a, b)} \int_0^{l(a, b)} \{|m_{tx} - f_{ix}| + |m_{ty} - f_{iy}|\} dt$$

로 표시된다.

積分區間 $[0, l(a, b)]$ 에서 函數 $l(a, b)$ 는 出發點 M_s 와 到着點 M_e 의 位置에 따라 6가지 形態로 분류될 수 있다. 예를 들면 出發點 M_s 가 邊 $x=x_1$ 상에, 到着點 M_e 가 邊 $y=y_2$ 상에 있으면

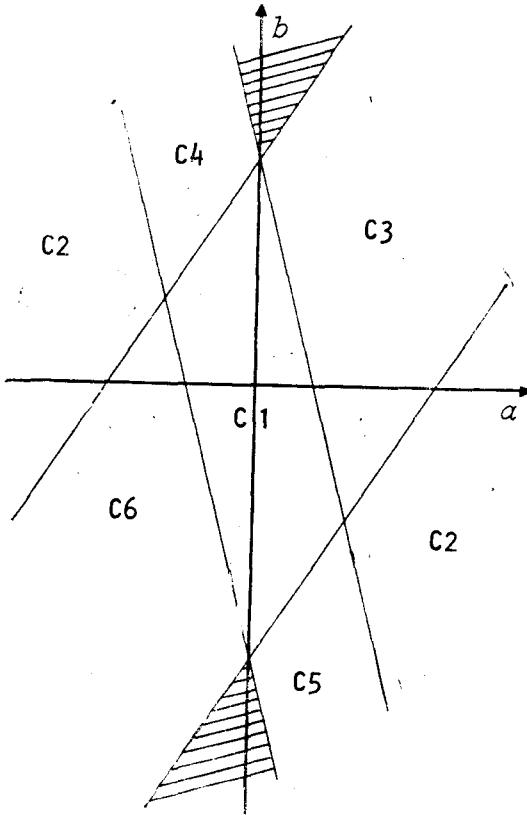
$$l(a, b) = (y_2 - ax_1 - b) \sqrt{1 + 1/a^2}$$

의 形態를 갖는다. <表 1>에서는 각 경우를 C1~C6로 표시하고 그때의 函數 $l(a, b)$ 의 形態를 나타내고 있다.

<表 1> 각 경우의 出發點, 到着點 및 函數 $l(a, b)$ 의 形態

경우	出發點 M_s	到着點 M_e	$l(a, b)$
C1	邊 $x=x_1$ 上	邊 $x=x_2$ 上	$(x_2 - x_1) \sqrt{1 + a^2}$
C2	邊 $y=y_1$ 上	邊 $y=y_2$ 上	$(y_2 - y_1) \sqrt{1 + 1/a^2}$
C3	邊 $x=x_1$ 上	邊 $y=y_2$ 上	$(y_2 - ax_1 - b) \sqrt{1 + 1/a^2}$
C4	邊 $y=y_2$ 上	邊 $x=x_2$ 上	$(y_2 - ax_2 - b) \sqrt{1 + 1/a^2}$
C5	邊 $y=y_1$ 上	邊 $x=x_2$ 上	$(ax_2 + b - y_1) \sqrt{1 + 1/a^2}$
C6	邊 $x=x_1$ 上	邊 $y=y_1$ 上	$(ax_1 + b - y_1) \sqrt{1 + 1/a^2}$

그런데 사실 出發點 M_s 와 到着點 M_e 의 位置는 직사각형 (x_1, x_2, y_1, y_2) 및 直線 (a, b) 에 의하여 결정된다. <그림 1>은 각 경우를 갖게 하는 일반적인 (a, b) 의 범위를 도시하고 있다.



〈그림 1〉 각 경우에 대응되는 (a, b) 의 범위

Ⅲ. 最適解의 導出

1. 節 次

全體最適解(Global Optimum)는 C1~C6의 각각의 경우에 대하여 주어진 (a, b) 의 범위 안에서 部分最適解(Local Optimum)를 구한 다음 이 6개의 部分最適解를 비교함으로써 얻어진다. 각 경우의 部分最適解를 구하는 절차를 간단히 설명하면 다음과 같다.

- 1) C1의 경우, 部分最適解는 加重中央值로 주어진다.
 - 2) C2의 경우, C1 경우에서의 解法을 사용할 수 있도록 對稱移動하여 部分最適解를 구한다.
 - 3) C3의 경우, 문제를 다시 여러 경우로 세분하고 각 경우에 대하여 주어진 (a, b) 의 범위 안에서 解를 구한 다음 이를 비교하여 部分最適解를 구한다.
 - 4) C4, C5, C6의 경우, C3 경우에서의 절차를 사용할 수 있도록 對稱移動하여 部分最適解를 구한다.
- 이하 각 경우의 절차에 대하여 자세히 설명하기로

한다.

2. C1의 경우

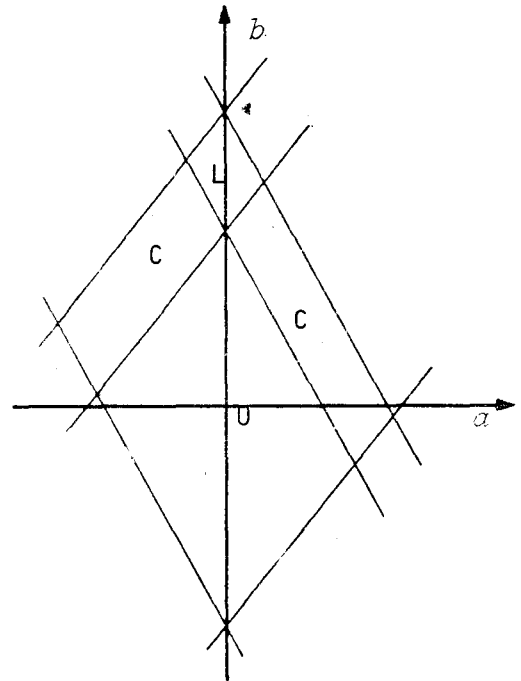
固定設備 i 와 관련된 費用 $f_i(a, b)$ 는 出發點 M_s , 到着點 M_r 및 固定設備 i 의 位置 F_i 의 관계에 따라 다음과 같은 세가지 形態로 분류될 수 있다. 出發點 M_s 와 到着點 M_r 에서 y 축에 垂直인 두 直線을 그을 때, 固定設備 i 의 位置가 두 直線 위에 있으면 U型, 아래에 있으면 L型, 그리고 사이에 있으면 C型으로 표시한다. 즉 각 型을 가질 (a, b) 의 조건은

$$\text{U型: } \begin{cases} y_1 - ax_1 \leq b \leq f_{iy} - ax_1 \\ y_1 - ax_2 \leq b \leq f_{iy} - ax_2 \end{cases}$$

$$\text{C型: } \begin{cases} f_{iy} - ax_2 < b \leq y_2 - ax_2 \text{ 또는 } \begin{cases} f_{iy} - ax_1 < b \leq y_2 - ax_1 \\ y_1 - ax_2 \leq b \leq f_{iy} - ax_2 \end{cases} \\ y_1 - ax_1 \leq b \leq f_{iy} - ax_1 \end{cases}$$

$$\text{L型: } \begin{cases} f_{iy} - ax_1 < b \leq y_2 - ax_2 \\ f_{iy} - ax_2 < b \leq y_2 - ax_2 \end{cases}$$

이 된다. 〈그림 2〉는 각 型을 갖게 하는 (a, b) 의 범위를 도시하고 있다.



〈그림 2〉 각 型과 (a, b) 의 범위

이제 積分區間 $L = [0, l(a, b)]$ 를 다음과 같이 서로 排他的인 두 區間으로 나누고,

$$L = [0, \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - 1)^2}]]$$

$$= [0, \sqrt{(f_{ix}-x_1)^2 + a^2(f_{ix}-x_1)^2}] \cup [\sqrt{(f_{ix}-x_1)^2 + a^2(f_{ix}-x_1)^2}, \sqrt{(x_2-x_1)^2 + a^2(x_2-x_1)^2}]$$

이들

$$L = L_1 \cup L_2 = [0, l_1(a, b)] \cup [l_1(a, b), l(a, b)]$$

로 표시하면 U형의 경우

$$\begin{aligned} f_i(a, b) &= \frac{w_i}{l(a, b)} \left\{ \int_0^{l(a, b)} |m_{ix} - f_{ix}| dt + \int_0^{l(a, b)} |m_{iy} - f_{iy}| dt \right\} \\ &= \frac{w_i}{l(a, b)} \left\{ \int_0^{l_1(a, b)} (f_{ix} - m_{ix}) dt + \int_{l_1(a, b)}^{l(a, b)} (m_{ix} - f_{ix}) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{l(a, b)} (f_{iy} - m_{iy}) dt \right\} \\ &= w_i \left\{ -a(x_1 + x_2)/2 - b + f_{iy} + (x_2 - x_1)/2 \right. \\ &\quad \left. - (f_{ix} - x_1)(x_2 - f_{ix})/(x_2 - x_1) \right\} \end{aligned}$$

으로 구하여진다.

같은 방법으로 L형의 경우에는

$$w_i \left\{ a(x_1 + x_2)/2 + b - f_{iy} + (x_2 - x_1)/2 - (f_{ix} - x_1)(x_2 - f_{ix})/(x_2 - x_1) \right\},$$

C형의 경우에는

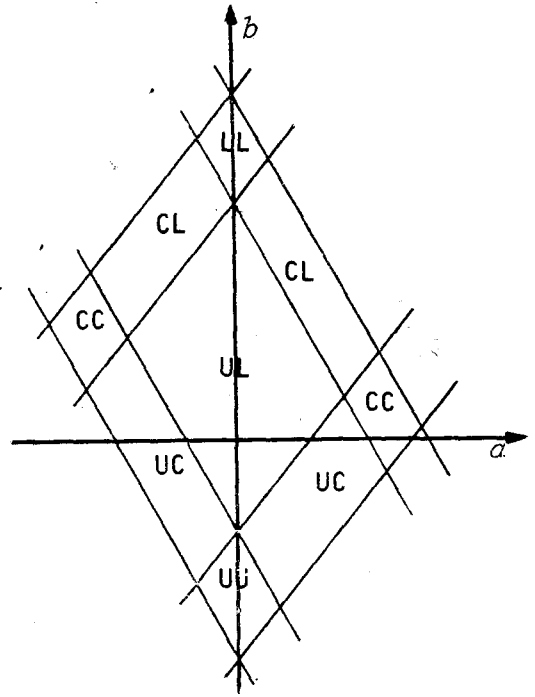
$$\begin{aligned} w_i \left\{ \pm a(x_1^2 + x_2^2)/2(x_2 - x_1) \pm b(x_1 + x_2)/(x_2 - x_1) \right. \\ \left. \pm b^2/a(x_2 - x_1) \mp 2f_{iy}b/a(x_2 - x_1) \right. \\ \left. \pm f_{iy}^2/a(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)/2 \right. \\ \left. - (f_{ix} - x_1)(x_2 - f_{ix})/(x_2 - x_1) \right. \\ \left. \mp 2f_{iy}x_1/(x_2 - x_1) \mp f_{iy} \right\} \end{aligned}$$

로 구하여진다. C형에서 부호는 $a > 0$, $a < 0$ 의 순서대로 표시한 것이다.

m 개의 각 固定設備가 이와같이 U형, L형, C형의 3가지 型을 가질 수 있으므로 모든 組合의 가지수는 3^m 이나 실제로는 $(m+1)(m+1)/2$ 개의 組合만이 가능하다. 왜냐하면 固定設備를 y 座標의 크기 순으로 나열할 때 L, C, U의 순서를 갖기 때문이다. <그림 3>은 $m=2$ 인 경우의 가능한 6가지의 組合, UL, CC, CL, UU, LL, UC를 갖게 하는 (a, b) 의 범위를 도시하고 있다.

總 $(m+1)(m+1)/2$ 개의 組合에 대하여 주어진 (a, b) 의 범위 안에서 解를 구한 다음 이 解를 비교함으로써 部分最適解를 구할 수 있다. 그러나 C1의 경우에는 最適經路가 x 축에 平行이고 截片이 y 座標들의 加重中央值 $y_{(m)}$ 즉 $a=0, b=y_{(m)}$ 임이 數學的 歸納法에 의하여 증명된다. 이는 固定되어 서비스하는 設備의 最適位置의 y 座標가 $y_{(m)}$ 임을 생각할 때 [4], [5], 매우 흥미로운 사실이다.

定理 C1의 경우, 最適經路는 $a=0, b=y_{(m)}$ 인 直線이다.



<그림 3> $m=2$ 의 경우, 각 組合 및 (a, b) 의 범위

證明 ($m=1$ 의 경우)

(a, b) 가 다음 조건을 만족시키면

$$y_1 \leq ax_2 + b \leq f_{1y}, \quad y_1 \leq ax_1 + b \leq f_{1y},$$

目的函數는 U형의 식

$$f(a, b) = -a(x_1 + x_2)/2 - b + f_{1y} + k_1 \dots \dots \dots (2)$$

을 갖는다. 여기에서 k_1 은 상수이며

$$k_1 = (x_2 - y_1)/2 - (f_{1x} - x_1)(x_2 - f_{1x})/(x_2 - x_1) > 0$$

이다. 이는 線型計劃法의 문제이므로 端點(Extreme Point) 중에서 最小값을 갖는다. 조건 (2)를 만족시키는 범위의 端點은 4점 즉 $(0, f_{1y}), (0, y_1), ((f_{1y} - y_1)/(x_2 - x_1), (y_1 x_2 - x_1 f_{1y})/(x_2 - x_1)), ((y_1 - f_{1y})/(x_2 - x_1), (f_{1y} x_2 - x_1 y_1)/(x_2 - x_1))$ 뿐이며 각 점을 代入하면 目的函數의 값은 각각 $k_1, f_{1y} - y_1 + k_1, (f_{1y} - y_1)/2 + k_1, (f_{1y} - y_1)/2 + k_1$ 이 된다. 이 네 값을 비교하면 주어진 조건식 (2)에서 $f_{1y} - y_1 \geq 0$ 이므로 k_1 이 最小가 되어 $(a, b) = (0, f_{1y})$ 가 最適解이며 따라서 定理는 成立된다.

(a, b) 가 다음 조건을 만족시키면

$$f_{1y} - ax_1 < b \leq y_2 - ax_1, \quad f_{1y} - ax_2 < b \leq y_2 - ax_2,$$

目的函數는 L형의 식

$$f(a, b) = a(x_1 + x_2)/2 + b - f_{1y} + k_1$$

을 갖는다. 이 도 역시 線型計劃法의 문제인데 위와 같은 절차에 의하여 實行可能域(Feasible Region)의 極

限點(Limit Point)인 $(0, f_{1y})$ 에서 目的函數는 下限값(infimum) k_1 을 가짐을 알 수 있다. 따라서 L型을 갖는 (a, b) 에서는 部分最適解를 가질 수 없다.

(a, b) 가 다음 조건을 만족시키면

$$f_{1y} - ax_2 < b \leq y_2 - ax_2, \quad y_1 - ax_1 \leq b \leq f_{1y} - ax_1$$

또는

$$f_{1y} - ax_1 < b \leq y_2 - ax_1, \quad y_1 - ax_2 \leq b \leq f_{1y} - ax_2,$$

目的函數는 C型의 式

$$f(a, b) = z_1a + z_2b + z_3b^2/a + z_4b/a + z_5/a + z_6 \dots \dots \dots (3)$$

를 갖는다. 여기에서 z_i 는 각각의 계수를 나타낸다. 이 函數가 볼록函數(Convex Function)임은 쉽게 증명된다. 이 式을 a, b 에 대하여 偏微分하여 0으로 놓은 聯立方程式으로부터

$$a^2 = (4z_3z_5 - z_4^2)/(4z_1z_3 - z_3^2) \dots \dots \dots (4)$$

$$b = -(az_2 + z_4)/2z_3 \dots \dots \dots (5)$$

를 얻으며 계수 $z_1 \sim z_6$ 의 값을 代入하면 $a=0, b=f_{1y}$ 를 얻는다. $(0, f_{1y})$ 는 實行可能域의 極限點이고 이를 代入한 目的函數의 값 k_1 은 下限값이 된다. 따라서 C型을 갖는 (a, b) 에서도 部分最適解를 가질 수 없다.

($m=2$ 의 경우)

이 경우에 組合될 수 있는 型은 위에서 설명한 바와 같이 6가지 즉, UL, CC, CL, UC, LL, UU型이다. 우선 $w_1=w_2=1$ 로 가정한다. (a, b) 가 다음 조건을 만족시키면

$$f_{2y} \leq ax_2 + b \leq f_{1y}, \quad f_{2y} \leq ax_1 + b \leq f_{1y} \dots \dots \dots (6)$$

目的函數는 UL型의 式

$$f(a, b) = x_2 - x_1 - \sum_{i=1}^2 (f_{iy} - x_i)(x_2 - f_{iy}) / (x_2 - x_i) + f_{1y} - f_{2y} = k_2$$

를 갖는다. 여기에서 k_2 는 상수이므로 이 UL型의 조건에서는 항상 目的函數의 값이 一定함을 알 수 있다.

(a, b) 가 다음 조건을 만족시키면

$$y_1 - ax_1 \leq b < f_{2y} - ax_1, \quad f_{1y} - ax_2 < b \leq y_2 - ax_2$$

또는

$$y_1 - ax_2 \leq b < f_{2y} - ax_2, \quad f_{1y} - ax_1 < b \leq y_2 - ax_1,$$

目的函數는 CC型의 式을 갖는데 이 函數는 볼록函數이며 식 (3)과 같은 形態이므로 式 (4)와 (5)를 이용하면

$$a = \pm (f_{1y} - f_{2y}) / (x_2 - x_1)$$

을 얻는다. 이로부터

$$b = \begin{cases} (f_{2y}x_2 - f_{1y}x_1) / (x_2 - x_1), \\ a = (f_{1y} - f_{2y}) / (x_2 - x_1) \text{ 일 때,} \\ (f_{1y}x_2 - f_{1y}x_1) / (x_1 - x_2), \\ a = -(f_{1y} - f_{2y}) / (x_2 - x_1) \text{ 일 때} \end{cases}$$

이 되고 이들의 값을 代入하면 目的函數의 값은 모두 UL型에서의 값 k_2 와 같아진다. 그러나 이들 (a, b) 의 값들은 實行可能域의 極限點이므로 CC型에서는 部分最適解를 가질 수 없다.

이 외에 CL, UC, UU, LL型에서도 같은 방법으로 이들 目的函數의 下限이 k_2 임이 증명되므로 이들 型 모두가 部分最適解를 가질 수 없다. 따라서 部分最適解는 式 (6)을 만족시키는 (a, b) 이며 이로부터 定理가 成立함을 알 수 있다.

($m=3$ 의 경우)

固定設備를 y 座標의 크기 순으로 F_1, F_2, F_3 로 표시하고, 먼저 F_1 과 F_3 만 고려하면 $a=0, b=f_{1y}$ 와 $b=f_{3y}$ 로 이루어진 직사각형 내부의 모든 直線이 最適經路임은 $m=2$ 의 경우로 증명된다. 이들 直線 중 다시 固定設備 F_2 에 대하여 $a=0, b=f_{2y}$ 의 直線이 最適經路임은 $m=1$ 의 경우로 증명된다. 따라서 $(0, f_{2y})$ 가 部分最適解이며 定理는 成立된다.

($m=4$ 의 경우)

먼저 두 固定設備 F_1 과 F_4 만 고려하면 $a=0, b=f_{1y}$ 와 $b=f_{4y}$ 로 이루어진 직사각형 내부의 모든 直線이 最適經路임은 $m=2$ 의 경우로 증명된다. 이들 直線 중 다시 F_2 와 F_3 에 대하여 $a=0, b=f_{2y}$ 와 $b=f_{3y}$ 로 이루어진 직사각형내의 모든 直線이 最適經路임은 $m=2$ 의 경우로 증명된다. 따라서 定理는 成立된다.

($m=2k+1, k=2, 3, \dots$ 의 경우)

$m=2$ 의 경우의 증명내용이 k 번 반복되고 $m=1$ 의 경우의 증명내용이 한번 이용되어 $a=0, b=f_{(k+1)y}$ 인 直線이 最適經路임이 증명된다.

($m=2k, k=3, 4, \dots$ 의 경우)

$m=2$ 의 경우의 증명내용이 k 번 반복되어 $a=0, b=f_{ky}$ 와 $b=f_{(k+1)y}$ 로 이루어진 직사각형내의 모든 直線이 最適經路임이 증명된다.

이상과 같이 $(0, y_{(m)})$ 이 C1 경우의 部分最適解이며 이때 目的函數의 값은

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^m \{ (x_2 - x_i) / 2 - (f_{iy} - x_i)(x_2 - f_{iy}) / (x_2 - x_i) + |y_{(m)} - f_{iy}| \}$$

이 된다.

w_i 가 서로 다를 경우에도 定理가 成立함은 위의 증명과정에서 쉽게 알 수 있다.

3. C2의 경우

C2의 경우, 部分最適解는 $a=\infty$ 즉 y 축에 平行이고 x 座標를 $x_{(m)}$ 으로 갖는 直線임을 다음과 같이 알 수 있다. 여기에서 $x_{(m)}$ 은 固定設備들의 x 座標들의 加重中央

値를 표시한다.

$f(a, b)$ 를 $f(a, b); x_1, x_2, y_1, y_2, (f_{1x}, f_{1y}), \dots, (f_{mx}, f_{my})$ 로 표시하자. $y=ax+b$ 를 $y=x$ 에 對稱移動시킨 直線은

$$\begin{cases} y=(1/a)x-b/a, & a \neq 0 \\ x=b, & a=0 \end{cases} \dots\dots(7)$$

가 된다. 따라서 주어진 점들의 x, y 座標를 서로 바꾼 $f(a, b)=f[(a, b); y_1, y_2, x_1, x_2, (f_{1y}, f_{1x}), \dots, (f_{my}, f_{mx})]$ 를 最小化하는 (a, b) 를 C1 경우의 절차에 따라 구한 다음 식 (7)에 의하여 변환시켜주면 $a=\infty, b=x_{(m)}$ 을 얻는다.

4. C3의 경우

C1의 경우와 마찬가지로 固定設備 i 와 관련된 費用 $f_i(a, b)$ 는 出發點 M_s , 到着點 M_e 및 固定設備의 位置 F_i 의 관계에 따라 네 가지 形態로 분류될 수 있다. 出發點 M_s , 到着點 M_e 에서 각각 y 축과 x 축에 垂直된 두 直線을 그을 때, 固定設備의 位置가 두 直線의 左上에 있으면 U型, 右上에 있으면 D型, 左下에 있으면 E型, 右下에 있으면 C型으로 표시한다. 즉 각 型이 가질 (a, b) 의 조건은

$$\begin{aligned} \text{U型} : & y_1 \leq ax_1 + b \leq f_{iy}, f_{ix} \leq (y_2 - b)/a \leq x_2 \\ \text{D型} : & y_1 < ax_1 + b < f_{iy}, x_1 \leq (y_2 - b)/a \leq f_{ix} \\ \text{E型} : & f_{iy} \leq ax_1 + b \leq y_2, f_{ix} < (y_2 - b)/a < x_2 \\ \text{C型} : & f_{iy} < ax_1 + b < y_2, x_1 < (y_2 - b)/a < f_{ix} \end{aligned} \dots\dots(8)$$

가 된다. <그림 4>는 각 型을 갖게 하는 (a, b) 의 범위를 도시하고 있다.

각 型別 $f_i(a, b)$ 는 C1의 경우에서와 같은 방법으로 다음과 같이 구하여진다.

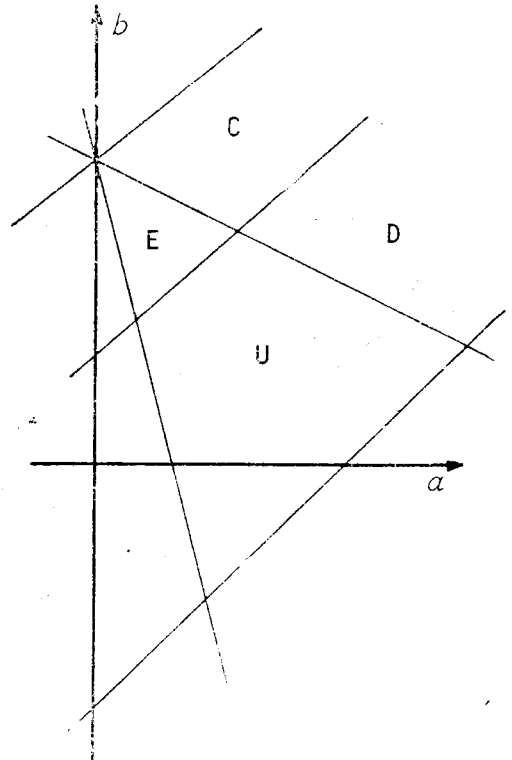
$$\begin{aligned} \text{U型} : f_i(a, b) = & w_i / (y_2 - ax_1 - b) \{ a \{ (f_{ix} - x_1)^2 \\ & + x_1(y_2 - f_{iy}) \} + b(y_2 - f_{iy}) \\ & - f_{iy}(y_2 - f_{iy}) \} + (y_2 - b)/2a \\ & - \frac{1}{2}ax_1 - b/2 + (x_1 + y_2)/2 - f_{ix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D型} : f_i(a, b) = & w_i / (y_2 - ax_1 - b) \{ ax_1(y_2 - f_{iy}) \\ & + b(y_2 - f_{iy}) - f_{iy}(y_2 - f_{iy}) \\ & + b/2a - y_2/2a - ax_1/2 - b/2 \\ & + (y_2 - x_1)/2 + f_{ix} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E型} : f_i(a, b) = & w_i \{ a(f_{ix} - x_1)^2 / (y_2 - ax_1 - b) \\ & + (y_2 - b)/2a + ax_1/2 + b/2 \\ & + (x_1 + y_2)/2 - f_{ix} - f_{iy} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C型} : f_i(a, b) = & w_i \{ (b - y_2)/2a + ax_1/2 + b/2 \\ & + (y_2 - x_1)/2 + f_{ix} - f_{iy} \} \end{aligned}$$

m 개의 固定設備가 각각 U型, D型, E型, C型의



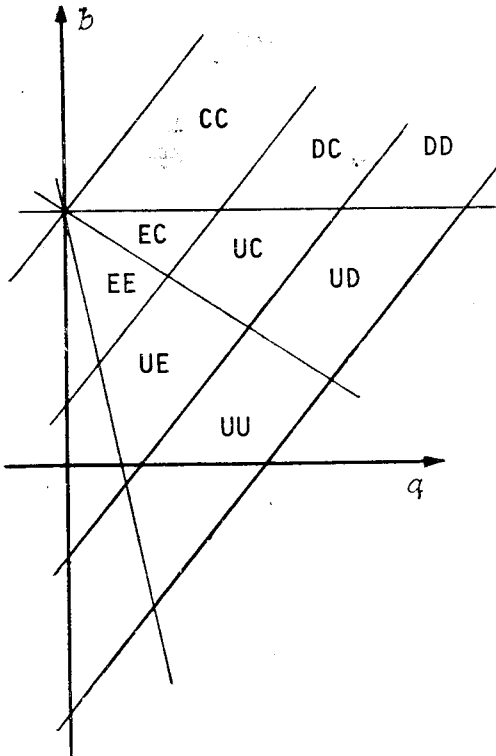
<그림 4> 각 型과 (a, b) 의 범위

4가지 型을 가질 수 있으므로 모든 가능한 組合의 指數는 m^4 이나 실제로는 $(m+1)^2$ 개의 組合만이 가능하다. 왜냐하면 3개의 M_s 구간중 한구간의 M_e 에 M_e 의 세 구간이 대응되기 때문이다. <그림 5>는 $m=2$ 의 경우의 가능한 9가지의 組合, UU, UD, UE, UC, DC, DD, EC, EE, CC型을 갖게 하는 (a, b) 의 범위를 도시하고 있다. 그림에서 보는 바와 같이 각 型에 해당하는 (a, b) 의 범위는 일반적으로 네개의 直線으로 이루어지는 내부로 표시된다.

固定設備 i 와 관련된 비용은 어느 型이든 간에 $(c_1a + c_2b + c_3)/(y_2 - ax_1 - b) + c_4b/a + c_5/a + c_6a + c_7b + c_8$ 의 形態를 가지므로 目的函數 $f(a, b)$ 의 일반식도 다음과 같은 形態를 갖는다.

$$\begin{aligned} f(a, b) = & (z_1a + z_2b + z_3)/(y_2 - ax_1 - b) + z_4b/a \\ & + z_5/a + z_6a + z_7b + z_8 \end{aligned} \dots\dots(9)$$

여기에서 c_i, z_i 는 상수이며 $c_6 = x_1c_7, c_5 = -y_2c_4, z_6 = x_1z_7, z_5 = -y_2z_4$ 의 관계를 갖는다. 이 函數는 주어진 (a, b) 의 구간내에서 連續이고 a, b 에 대하여 각각 偏微分 가능하다. 그런데 이 函數는 非볼록函數이므로 必要條件 즉 a, b 에 대하여 각각 偏微分하여 0으로 놓은 聯立方程式을 만족시키는 (a, b) 의 값 또는 實行可能域



〈그림 5〉 $m=2$ 의 경우, 각 조합 및 (a, b) 의 범위

의境界線인 네 直線上에서 갖게 된다.

目的函數를 a, b 에 대하여 각각 偏微分하여 0으로 놓은 聯立方程式으로부터

$$a=0 \text{ 또는 } a=(z_2y_2+z_3)/(z_2x_1-z_1) < 0$$

$$b=y_2-ax_1 - \sqrt{(z_2x_1-z_1)a^2 - (z_2y_2+z_3)a} / \sqrt{z_4+z_7a}$$

를 얻는다. 그러나 이 값들은 C3 경우의 $a > 0$ 조건을 만족시키지 못하므로 必要條件을 만족시키는 (a, b) 는 존재하지 않는다.

이제 (a, b) 의 境界線을 표시하는 네개의 直線을

$$b=u_i a+v_i, \quad i=1, 2, 3, 4$$

로 표시하고 이를 式 (9)에 代入하면

$$f(a, u_i a+v_i) = \{a(z_1+z_2u_i) + z_2v_i + z_3\} / \{(y_2-v_i) - a(x_1+u_i)\} + (z_4v_i+z_5)/a + (z_6+z_7u_i)a + z_4u_i + z_7v_i + z_8 \quad \dots\dots\dots(10)$$

이 되어 a 의 函數로 표시된다. 式 (8)에서 네 直線의 기울기와 截片을 살펴보면 $u_i = -x_1$ 또는 $v_i = y_2$ 의 관계가 있음을 알 수 있다. 必要條件 $\partial f(a, u_i a+v_i)/\partial a = 0$ 으로부터 $u_i = -x_1$ 의 경우에는

$$a^* = [(y_2-v_i)(z_4v_i+z_5) / \{(z_1+z_2u_i) + (z_6+z_7u_i)(y_2-v_i)\}]^{1/2}$$

가 얻어지고 $v_i = y_2$ 의 경우에는

$$a^* = \begin{cases} 0, \\ \{[(y_4v_i+z_5)(x_1+u_i) - (z_2v_i+z_3)] / [(z_6+z_7u_i)(x_1+u_i)]\}^{1/2} \end{cases}$$

가 얻어진다. a 의 범위가 $a_1 \leq a \leq a_2$ 라고 할 때, a^* 가 이 범위를 만족하면 a_1, a^*, a_2 를 式 (10)에 代入하여 비교하고, 그렇지 않으면 a_1, a_2 를 代入하여 비교함으로써 部分最適解가 구하여진다.

5. C4, C5, C6의 경우

나머지 경우들에서는 C3의 경우에서 目的函數 $f[(a, b); x_1, x_2, y_1, y_2, (f_{1x}, f_{1y}), \dots, (f_{mx}, f_{my})]$ 를 最小化하는 (a, b) 를 구하는 절차를 그대로 사용할 수 있다.

C4의 경우는 y 축에 對稱移動시키면 C3의 경우로 변환된다. 즉 $y=ax+b$ 를 y 축에 對稱移動시킨 直線은 $y=-ax+b$ 이므로 a 의 符號, x 축의 制約條件 x_1, x_2 를 서로 바꾼 x_2, x_1 의 符號, 주어진 점들의 x 座標들의 符號를 바꾼

$$f[(-a, b); -x_2, -x_1, y_1, y_2, (-f_{1x}, f_{1y}), \dots, (f_{mx}, f_{my})]$$

를 最小化하는 (a, b) 를 C3의 절차에 의하여 구하면 된다.

C5의 경우는 直線 $y=ax+b$ 를 原點에 對稱移動시킨 直線은 $y=ax-b$ 이므로, b 의 符號, x 축의 制約條件 x_1, x_2 와 y 축의 制約條件 y_1, y_2 를 각각 바꾼 x_2, x_1 과 y_2, y_1 의 符號, 주어진 점들의 x, y 座標의 符號를 바꾼

$$f[(a, -b); -x_2, -x_1, -y_2, -y_1, (-f_{1x}, -f_{1y}), \dots, (-f_{mx}, -f_{my})]$$

를 最小化하는 (a, b) 를 구하면 된다.

C6의 경우는 直線 $y=ax+b$ 를 x 축에 對稱移動시킨 直線은 $y=-ax+b$ 이므로, a, b 의 符號, y 축의 制約條件 y_1, y_2 를 서로 바꾼 y_2, y_1 의 符號, 주어진 점들의 y 座標의 符號를 바꾼

$$f[(-a, -b); x_1, x_2, -y_2, -y_1, (f_{1x}, -f_{1y}), \dots, (f_{mx}, -f_{my})]$$

를 最小化하는 (a, b) 를 구하면 된다.

IV. 適用例題

이 節에서는 간단한 例題를 통하여 最適解 導出過程 및 주어진 固定設備의 位置에 따라 定하여지는 最適經路의 형태를 살펴보고자 한다.

〈例題 1〉

〈그림 6〉과 같이 區域 및 4개의 固定設備의 位置(Δ 표)가 다음과 같이 주어졌고 $w_i = 1, i=1, 2, 3, 4$ 로

가정한다.

$$x_1=0, x_2=50, y_1=0, y_2=40$$

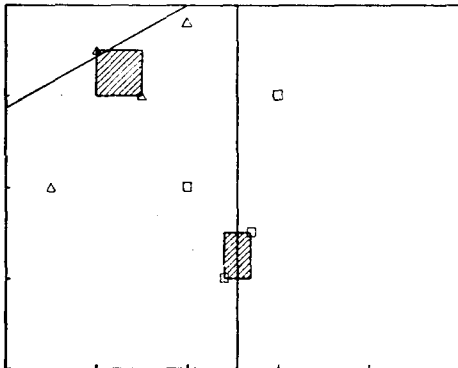
$$F_1=(5, 20), F_2=(10, 35), F_3=(15, 30), F_4=(20, 38)$$

C1의 경우, 定理에 의하여 $a=0$ 이며 b 는 固定設備의 y 座標, 20, 35, 30, 38의 中央值 즉 30과 35 사이의 값을 갖는 直線이 部分最適解이며 이때 目的函數의 값은 88.0이다. C2의 경우, $a=\infty$ 이며 x 座標는 固定設備의 x 座標, 5, 10, 15, 20의 中央值 즉 10과 15 사이의 값을 갖는 直線이 部分最適解이며 이때 目的函數의 값은 76.225이다. C3의 경우, $(m+1)^2=25$ 개 型의 組合 중 EUUU型에서 $a=0.567, b=28.6$ 의 直線이 部分最適解이며 이때 目的函數의 값은 53.2이다. <표 2>에 이들의 결과와 C4, C5, C6의 경우의 결과가 종합되어 있다.

<표 2> 각 경우의 部分最適解(*표는 全體最適解)

경우	기울기(a)	截片(b)	目的函數	비 고
C1	0	(10, 35)	88.0	
C2	∞	$x=(30, 35)$	76.225	
*C3	0.567	28.6	53.2	EUUU型
C4	-0.227	40	90.7	EUUU型
C5	0.8	0	121.0	UUUU型
C6	-2.13	40	83.6	UUUD型

이들 6개의 部分最適解를 비교하여 全體最適解는 C3의 경우에서 $a=0.567, b=28.6$ 인 直線(<그림 6> 참조)이며 이에 目的函數는 最小值 53.2를 가지는 것이 밝혀진다. <그림 6>에서 빗금친 부분은 固定되어 서비스하는 設備의 最適位置를 나타내며 위에서 구한 移動設備의 最適經路가 이를 통과함을 보여주고 있다.



<그림 6> 例題 1 및 例題 2의 最適經路

<例題 2>

<그림 6>(□표시)에서와 같이

$$x_1=0, x_2=50, y_1=0, y_2=40$$

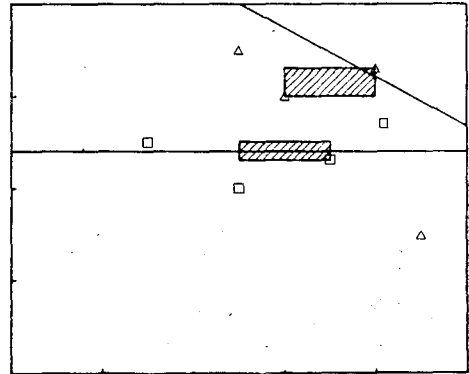
$F_1=(20, 20), F_2=(24, 10), F_3=(27, 15), F_4=(30, 30)$ 일 때 最適解導出 節次에 의하여 最適經路는 C2의 경우에서 x 座標가 24와 27 사이인 모든 直線으로 구하여진다.

<例題 3>

<그림 7>(△표시)에서와 같이

$$x_1=0, x_2=50, y_1=0, y_2=40$$

$F_1=(25, 20), F_2=(15, 25), F_3=(35, 23), F_4=(41, 27)$ 일 때 最適經路는 C1의 경우에서 $a=0$ 이며 b 는 23과 25 사이의 값을 갖는 直線으로 구하여진다.



<그림 7> 例題 3 및 例題 4의 最適經路

<例題 4>

<그림 7>(□표시)에서와 같이

$$x_1=0, x_2=50, y_1=0, y_2=40$$

$F_1=(25, 35), F_2=(30, 30), F_3=(40, 33), F_4=(45, 15)$ 일 때 最適經路는 C4의 경우에서 $a=-0.527, b=53.1$ 인 直線으로 구하여진다.

VI. 모델에 대한 考察 및 結論

본 論文에 대한 制約性과 앞으로의 發展方向에 대하여 생각하여 보기로 한다. 서비스 設備가 移動하여야 된다는 가정은 序論에서 밝힌 바와 같이 妥當性을 가질 수 있다. 그러나 移動하여야 된다는 制約은 固定되어 서비스하여야 되는 경우보다 費用이 커짐은 당연하다. 참고로 <例題 1>에서 移動設備의 平均費用은 53.2이었으나 이 設備가 固定될 수 있을 때에는 43으로 감소한다. C1과 C2의 경우 移動設備의 部分最適經路가 固定되는 設備의 加重中央值로 주어지는 最適位置를 통과한다는 흥미로운 사실을 證明하였다. 다른 경우에서도 이러한 사실이 例題를 통하여 발견되었으나 일반적으로 證明될 수 있음은 의문이다.

移動設備의 經路가 주어진 地域내에서 直線이라는

가정은 실제문제에서 답이 되기에는 확실히 큰 制約이 된다. 그러나 이 直線經路가 最適經路에 대한 하나의 參考資料 또는 基準指標로 사용될 수는 있을 것이다. 또한 이 문제를 해결하기 위하여 다음과 같은 研究가 진행중에 있다. 본 모델에서 주어진 地域은 모든 固定設備를 포함하는 넓은 지역이었다. 이 地域을 固定設備를 포함하지 않아도 되도록 좁게 설정하고 이 地域 내에서 미리 정하여진 出發點에서의 直線經路를 찾는 모델이 완성되면 이 모델을 반복하여 적용함으로써 여러 개의 짧은 直線으로 이루어진 經路가 구하여질 수 있어 直線이라는 制約이 해결될 수 있다.

移動設備와 固定設備간의 距離가 直角距離(l_1)라는 가정하에 最適經路가 구하여졌다. 直線距離의 제곱($(l_2)^2$)을 距離의 尺度로 사용하면 最適經路는 더 쉽게 導出될 수 있을 것이다. 그러나 直線距離(l_2)를 가정하면 數值解析의 接近方法에 의하여 해결될 것이 예상되고 이는 앞으로의 研究課題로 남는다.

移動設備와 固定設備와의 距離는 直角距離이고 移動設備의 經路는 x 축 또는 y 축에 平行하지 않을 수 있는 直線이라는 가정은 확실히 矛盾된 것이다. 이러한 의미에서 l_2 또는 $(l_2)^2$ 을 距離로 사용하는 것이 더 妥當하다고 말할 수 있다. 그러나 Francis와 White가 지적한 대로 最適位置가 距離의 종류에 敏感하지 않다는 것 [6]이 이 研究에서도 적용될 것이 예상되며 이는 앞으로의 研究에서 밝혀질 것이다.

參 考 文 獻

1. Chaiken, J.M. and Dormont, P., "A Patrol Car Allocation Model: Capabilities and Algorithms," *Management Science*, Vol. 24, No. 12, 1978, pp. 1291—1300.
2. Chelst, K., "An Algorithm for Deploying a Crime Direct (Tactical) Patrol Force," *Management Science*, Vol. 24, No. 12, 1978, pp. 1314—1327.
3. Eyster, J. W., White, J. A. and Wierwille, W. W., "On Solving Multi-facility Location Problems Using a Hyperboloid Approximation Procedure," *AIIE Transactions*, Vol. 5, No. 1, 1973, pp. 1—6.
4. Francis, R.L., "A Note on the Optimum Location of New Machines in Existing Plant Layouts," *Journal of Industrial Engineering*, Vol. XIV, No. 1, 1963, pp. 57—59.
5. —, "On the Location of Multiple New Facilities with Respect to Existing Facilities," *Journal of Industrial Engineering*, Vol. XV, No. 2, 1964, pp. 106—107.
6. Francis, R.L. and White, J. A., *Facility Layout and Location*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
7. Kuhn, H.W., *Nonlinear Programming*, Ch. 3, John Wiley & Sons, Inc., 1967.
8. Rosenshine, M., "Contributions to a Theory of Patrol Scheduling," *Operational Research Quarterly*, Vol. 21, No. 1, 1969, pp. 99—106.
9. Olson, D.G. and Wright, G.P., "Model for Allocating Police Preventive Patrol Effort," *Operational Research Quarterly*, Vol. 26, No. 46, 1975, pp. 703—715.