

Curved Taper Leaf Spring의 動特性에 關한 研究

(A Study on the Dynamic Characteristics of Curved Taper Leaf Spring)

金贊默*, 金光植**
(Chan-Mook Kim, Kwang-Sik Kim)

Abstract

In this paper, the natural frequencies of curved taper leaf springs using on vehicle suspension systems are studied.

By applying the Castigliano's definition, Rayleigh's principle and Dunkerley's equation, new formulas defining the natural frequency of such shaped spring are derived.

Numerical calculations are in very good agreement with experimental results on actual models. We found that the natural frequencies of curved taper spring are increased by 21-28% compared with the spring having same weight, span and curve but uniform section.

1. 序 論

自動車에 使用되어 오고 있던 多葉板 스프링은 最近에 와서 漸次的으로 그림 1. 과 같은 單葉板스프링으로 代替되어가고 있다. 單葉板테이퍼스프링은 在來의 多葉板스프링과 比較했을때, 스프링 自重이 輕量化되고, 스프링板사이의 마찰저항이 없어져서, 승차快適도를 向上시킬뿐더러 運轉效率를 增大시키고, 스프링製作費를 減少시킬 수 있는 長點을 지니고 있다. 또 한편으로는 스프링의 維持管理가 容易해지고, 수명도 길게 된다. 그럼에도 不拘하고 겨우 最近에 와서 單葉板테이퍼스프링의 利用이 활기머우게 된 理由는 製作工程의 어려운 點에 있었다.

테이퍼스프링에 關한 研究는 1971年度에 H.H. Mabie 와 C. B. Rogers³⁾, 1976年度에 R. P. Goel²⁾, N. J. Nigro 와 S. P. Bhatia¹⁾ 등에 의해서 이루어졌고, 主로 테이퍼빔(taper beam)의 固有振動數 決定에 關한 內容이 발표되었다. 그

들의 研究에서는 車輛懸架裝置系의 力學的 모델化에 여러가지 무리가 있었고, 實驗値와의 比較檢討도 없었다. Mabie 와 Rogers 는 直線 Double Tapered Cantilever Beam에 關한 動特性을 研究하여 테이퍼율과 보의 길이를 媒介變數(Parameter)로 한 數值解로서, 固有振動數를 分析했고, Goel 은 末端이 彈性的으로 拘束된 直線 테이퍼보(Taper Beam)의 動特性方程式을 誘導하고 系의 스프링定數가 運動期間中 항상 一定하다는 假定에서 固有振動數를 解析하였다. 그는 또 自由端에 相當集中荷重을 지니고, 兩面이 同一率로 테이퍼져 있는 외팔보(cantilever beam)와 한 面만이 테이퍼져 있는 單純보의 境遇를 研究發表하였다.

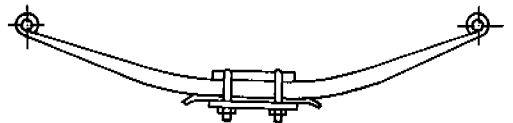


Fig. 1 Single Taper Leaf Spring

* 正會員, 國民大學校 工科大學 機械工學科

**正會員, 漢陽大學校 工科大學 精密機械工學科

Nigro 와 Bhatia 는 相當質量과 相當 彈性係數의 概念을 利用해서 $\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}}$ 라는 式으로 固有振動數를 求하는 한편 質量分布系라는 觀點에서도 固有振動數를 解析하고나서 兩結果를 比較檢討하였다. 單純히 베이퍼率이 낮은 領域에서는 잘 일치한다고 되어 있으나, 集中荷重의 크기에 따르는 比較研究가 없다. 이제까지 發表된 內容은 共通의으로, 直線테이퍼보 (straight taper beam) 에 대한 研究이지 처음부터 구부러져 있는 그림 1. 과 같은 테이퍼스프링에 대한 研究은 아직 없다.

本論文에서는 그림 1. 과 같이 처음부터 구부러져 있고, 断面高가 sine 의 n 乘形으로 테이퍼져 있는 實際에 매우 가까운 單葉板스프링이 兩端에서 물러로 支持되어 있고 中央鞍部に 集中荷重이 加해져 있는 경우에 대해서 理論的 解析을 하고, 그 結果를 實驗値와 比較·檢討하였으며, 同時에 單葉板테이퍼스프링의 設計에 必要한 두개의 係數를 提示하였다.

2. 記號說明

- b : 테이퍼스프링 断面의 폭
- h_0 : $\theta = \frac{\pi}{2}$ 되는 中央鞍部の 断面高
- h : 테이퍼스프링 任意断面에서의 断面高, $h(\theta)$
- W : 中央鞍部に 加해지는 集中荷重 (車體重量, 乘車人員體重, 積載荷物重量 等の 總重量의 1/4程度)
- M : 任意断面에서 굽힘모우멘트
- R : Curved Taper Leaf Spring 의 曲率半徑
- θ : 断面의 位置角
- α : 스프링 末端點의 位置角 즉 余角
- I_0 : 中央鞍部 断面의 面積 2次모우멘트
- I : 任意断面의 面積 2次모우멘트, $I(\theta)$
- E : 스프링材料의 彈性係數 ($2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$)
- δ_0 : 中央鞍部の 처짐
- δ : 任意位置의 처짐, $\delta(\theta)$

$G(\alpha)$: 無次元 처짐係數, $G(\alpha) = \frac{2EI_0\delta_0}{WR^3}$
 $Q_n(\alpha)$: $\int_{\alpha}^{\pi/2} \sin^n 2(\theta - \alpha) \sin^n \theta d\theta$ 의 값

3. 理論解析

實際 自動車에 使用되고 있는 Curved Taper Leaf Spring 은 그림 1. 처럼 中央部に 약간 평탄한 鞍部가 있어 이 部分에 車輪軸을 締結하게 된다. 力學的으로는 그림 2. 와 같이 모델化하여 생각한다.

즉 스프링의 中心線은 큰 曲率半徑 R 인 円弧가 되고, 그 円弧를 中心으로 上下面이 $\sin^2 \theta$ 에 따라 테이퍼져 있다. 断面高 h 는 $h = h_0 \sin^2 \theta$ 가 되는 것이다.

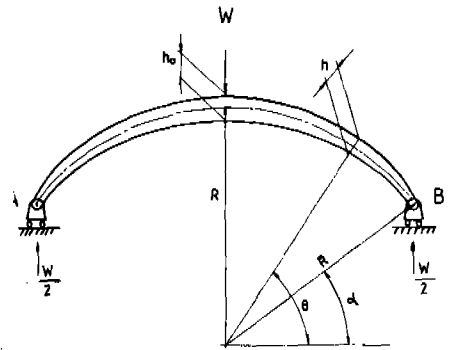


Fig. 2. Free Body Diagram.

이와같은 系에 力學的考察을 함에 있어 다음과 같은 假定을 한다.

- (1) 스프링의 A, B 兩端은 물러로 支持되어 있으나 集中荷重을 받으면 어느 한쪽端이든 자유로이 水平移動할 수 있도록 되어 있다. 따라서 단순보와 같은 支持條件이 되고, 集中荷重은 A, B 點에 兩分되어 作用한다.
- (2) A, B 端의 水平移動에는 摩擦을 수반하지 않기 때문에 그點에서의 水平反力은 없다.
- (3) 스프링自重은 集中荷重에 비해 매우 작으므로 自重으로 因한 스프링의 처짐은 무시한다.
- (4) 스프링의 垂直方向처짐은 스프링길이나 휨

의 曲率半徑에 比해 매우 작으므로 兩端點에서 水平移動거리는 무시한다.

이상과 같은 假定아래 그림 2의 自由物體圖로 부터 任意斷面에 가해지는 굽힘모멘트 M를 計算하면

$$M = \frac{WR}{2} (\cos \alpha - \cos \theta) \dots \dots \dots (1)$$

여기서 α 는 스프링末端의 位置角이며 余角이 된다. 最大굽힘모멘트는 스프링中央部에서 생 기며 이 때 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 가 되므로 (1)식으로 부터

$$M_0 = \frac{WR}{2} \cos \alpha \dots \dots \dots (2)$$

Castigliano의 定理를 利用하여 集中荷重 作用點에서 作用線方向의 스프링처짐 δ 는

$$\delta = \frac{2R}{E} \int_{\alpha}^{\theta} \frac{M}{I} \frac{\partial M}{\partial W} d\theta \dots \dots \dots (3)$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 인 位置에서의 斷面高를 h_0 , 面積 2次모 우멘트를 I_0 , 처짐을 δ_0 라 하고 任意位置에서의 그것들을 各各 h, I, δ 라 했을 때,

$$h = h_0 \sin^n \theta \dots \dots \dots (4)$$

인 關係로 斷面高가 變化한다고 하면 I는,

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{bh_0^3}{12} \sin^{3n} \theta = I_0 \sin^{3n} \theta \dots \dots \dots (5)$$

라 表示한다. (1)식과 (5)식을 (3)식에 代入하여

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 인 中央斷面에서의 처짐 δ_0 를 구하면,

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{WR^3}{2EI_0} \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{(\cos \alpha - \cos \theta)^2}{\sin^{3n} \theta} d\theta \\ &- \frac{WR^3}{2EI_0} \left[\int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^{3n} \theta} d\theta - 2 \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha \cos \theta}{\sin^{3n} \theta} d\theta \right. \\ &\left. + \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^{3n} \theta} d\theta \right] \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

(6)식의 各項의 積分値는 $3n$ 가 奇數이나 偶數이냐에 따라 다음과 같이 된다.⁵⁾ $3n = 2m$ ($n = 2, 4, 6, 8, \dots, m = 3, 6, 9, 12, \dots$)이면. 즉 偶數인 경우

$$\int \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^{3n} \theta} d\theta = \cos^2 \alpha \int \frac{1}{\sin^{2m} \theta} d\theta$$

$$= -\cos^2 \alpha \cos \theta \sum_{r=0}^{m-1} \frac{2^{2m-2r-1} (2r)! (m-1)! m!}{(2m)! (r!)^2 \sin^{2r+1} \theta} \dots \dots \dots (7)$$

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{\cos \alpha \cos \theta}{\sin^{3n} \theta} d\theta &= 2 \cos \alpha \int \frac{\cos \theta}{\sin^{2m} \theta} d\theta \\ &= \frac{2 \cos \alpha}{(1-2m) \sin^{2m-1} \theta} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^{3n} \theta} d\theta &= \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^{2m} \theta} d\theta \\ &= \frac{\cos \theta}{2(1-m) \sin^{2m-1} \theta} + \frac{1}{2(1-m)} \int \frac{d\theta}{\sin^{2m} \theta} \\ &= \frac{1}{2(1-m)} \left\{ \frac{\cos \theta}{\sin^{2m-1} \theta} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \cos \theta \sum_{r=0}^{m-1} \frac{2^{2m-2r-1} (2r)! (m-1)! m!}{(2m)! (r!)^2 \sin^{2r+1} \theta} \right\} \dots \dots (9)$$

또 $3n = 2m + 1$ ($n = 1, 3, 5, 7, \dots, m = 1, 4, 7, 10, \dots$)이면 즉 奇數인 경우 (7)식은

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^{3n} \theta} d\theta &= \int \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^{2m+1} \theta} d\theta \\ &= \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left[-\cos \theta \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(2m)! (r!)^2}{2^{2m-2r} (m!)^2 (2r+1)! \sin^{2r+2} \theta} \right. \\ &\left. + \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2} \ln \tan \frac{\theta}{2} \right] \dots \dots \dots (7)' \end{aligned}$$

(8)식은

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{\cos \alpha \cos \theta}{\sin^{3n} \theta} d\theta &= 2 \cos \alpha \int \frac{\cos \theta}{\sin^{2m+1} \theta} d\theta \\ &= -\frac{\cos \alpha}{m \sin^{2m} \theta} \dots \dots \dots (8)' \end{aligned}$$

또 (9)식은

$$\begin{aligned} &\int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^{3n} \theta} d\theta \\ &= \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^{2m+1} \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{(1-2m)} \left\{ \frac{\cos \theta}{\sin^{2m} \theta} \right. \\ &- \cos \theta \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(2m)! (r!)^2}{2^{2m-2r} (m!)^2 (2r+1)! \sin^{2r+2} \theta} \\ &\left. + \frac{(2m)!}{2^m (m!)^2} \ln \tan \frac{\theta}{2} \right\} \dots \dots \dots (9)' \end{aligned}$$

시(7)~식(9)까지를 식(6)에 代入하여 中央鞍部의 처짐을 구하면 다음과 같다. $3n = 2m$ 인 경우

$$\delta_0 = \frac{WR^3}{2EI_0} \left| \left(\frac{\cos \theta}{2-2m} - \frac{2\cos \alpha}{1-2m} \right) \frac{1}{\sin^{2m-1} \theta} - \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{2-2m} \right) \cos \theta \sum_{r=0}^{m-1} \frac{2^{2(m-r-1)} (2r)! (m-1)! m!}{(2m)! (r!)^2 \sin^{2r+1} \theta} \right|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \dots (10)$$

(여기서 $m = 3, 6, 9, 12, \dots$)

마찬가지로 $3n = 2m + 1$ 인 경우

$$\delta_0 = \frac{WR^3}{2EI_0} \left| \left(\frac{\cos \alpha}{m} + \frac{\cos \theta}{1-2m} \right) \frac{1}{\sin^{2m} \theta} + \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \ln \tan \frac{\theta}{2} \left(\frac{1}{1-2m} + \cos^2 \alpha \right) - \left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{1-2m} \right) \cos \theta \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(2m)! (r!)^2}{2^{2m-2r} (m!)^2 (2r+1)! \sin^{2r+2} \theta} \right|_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \dots (11)$$

(여기서 $m = 1, 4, 7, 10, \dots$)

(10)식과 (11)식은 매우 복잡한 표현이지만, 電子計算機를 利用하여, n 을 媒介變數로 하면

$$\delta_0 \frac{2EI}{WR^3} = G(\alpha) \text{인 無次元 처짐係數 } G(\alpha)$$

를 구하게 되고, 이것을 半對數방안지에 그리면 그림 3과 같다. 이 그래프는 앞으로 Curved

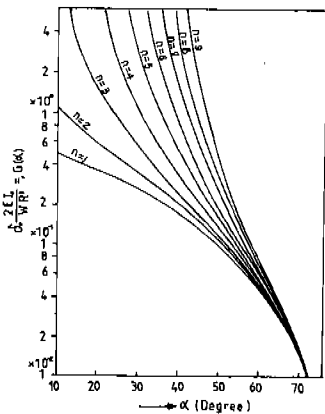


Fig. 3. Dimensionless Deflection Factor.

Taper Spring의 最大처짐을 구하거나, 固有振動數를 求할때 有益하게 使用될 것이다. 만일 断面高에 變化가 없다면 즉 $n = 0$ 이면 $\sin^{3n} \theta = 1$ 이 되어 (6)식으로 얻어지는 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 點에서의 처짐 δ_0 는 다음과 같다.

$$\delta_0 = \frac{WR^3}{2EI_0} \int_{\alpha}^{\pi/2} (\cos \alpha - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{WR^3}{2EI_0} \left| \left(\frac{1}{2} + \cos^2 \alpha \right) \theta - 2\cos \alpha \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right|_{\alpha}^{\pi/2} \dots (12)$$

만일 $\alpha = 0$ 되는 半円形 arch beam 이면

$$\delta_0 = \frac{WR^3}{2EI_0} \left(\frac{3}{8} \pi - 1 \right) \dots (13)$$

이 되어 一般論과 잘 一致한다.

(10), (11)식을 示하여

$$\delta_0 = \frac{WR^3}{2EI_0} G(\alpha) \dots (14)$$

로 表示하였을때 集中荷重으로 因한 系の 基本固有振動數 ω_w 는 다음과 같다.

$$\omega_w = \sqrt{\frac{g}{\delta_0}} = \sqrt{\frac{2EI_0 g}{WR^3 G(\alpha)}} \dots (15)$$

여기서 $G(\alpha)$ 는 그림 3의 그래프로 부터 求해진다. 集中荷重이 작아서 自重과 비슷하거나 自重보다 작을때는 (15)식만으로는 充分한 精度를 얻을 수 없다. 이때는 曲線座標 (curvilinear coordinate)를 利用해서 分布荷重系에 對한 Rayleigh의 原理를 適用하여 스프링만의 固有振動數 ω_s 를 求한후 Dunkerley의 方法에 의해 系の 固有振動數 ω 를 決定하는 것이 좋다. 自重에 의해 中央鞍部に 假想된 처짐을 y_0 라 하고 兩·末端에서의 처짐은 0이 된다고 하면, 그 구간에서의 처짐 y 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y = y_0 \sin a(\theta - \alpha) \cdot \sin \omega_s t \dots (16)$$

이 式에서 $\sin a(\theta - \alpha)$ 는 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 에서 1되고 $\theta = \alpha$ 되는 點에서 0되게 a 를 決定해야 한다. 즉

$$a = \frac{\pi}{\pi - 2\alpha} \text{ 되는 係數이다. Curved Taper Leaf Spring의 微少要素의 質量, } d_m \text{은}$$

$$d_m = \frac{w}{g} R b h_0 \sin^n \theta d\theta \dots\dots\dots(17)$$

이 된다.

여기 w는 材質의 比重량을 나타낸다. Rayleigh의 方法에 의한 一般式(ω_s에 대한)은

$$\omega_s^2 = \frac{\int_0^{\pi/2} EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{max}^2 dx}{\int_0^{\pi/2} y_{max}^2 dm} \dots\dots\dots(18)$$

이 式에서 x = -Rθ인 座標轉換을 하면

$$dx = -Rd\theta, \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{max} = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2} \right)_{max}$$

$$= -\frac{a^2}{R^2} y_0 \sin a(\theta - \alpha) \dots\dots\dots(19)$$

인 關係가 있다. (17), (19)식을 (18)식에 代入하면

$$\omega_s^2 = \frac{EI_0 a^2}{m_0 R^3} \cdot \frac{\int_{\alpha}^{\pi/2} \sin^2 a(\theta - \alpha) \sin^{3n} \theta d\theta}{\int_{\alpha}^{\pi/2} \sin^2 a(\theta - \alpha) \sin^n \theta d\theta} \dots\dots\dots(20)$$

이 된다. 여기서 m₀ = $\frac{w}{g} R b h_0$ 를 나타낸다. 分子와 分子의 積分은 n를 媒介變數로 했을 때 同一形의 프로그램을 할 수 있고, 分子는 3n, 分母는 n인 媒介變數值를 가지고 그 값을 얻으면 된다.

여기서

$$Q_{3n}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi/2} \sin^2 a(\theta - \alpha) \sin^{3n} \theta d\theta$$

$$Q_n(\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi/2} \sin^2 a(\theta - \alpha) \sin^n \theta d\theta$$

라 놓고 數值積分한 結果가 그림 4와 같다. 그래서 (20)식은 다음과 같이 된다.

$$\omega_s = \sqrt{\frac{EI_0 a^4 Q_{3n}(\alpha)}{m_0 R^3 Q_n(\alpha)}} \dots\dots\dots(21)$$

(15)식과 (21)식을 利用하여 Dunkerley 公式으로부터 分布荷重系가 集中荷重을 지닐 때의 複合된 固有振動數 ω는 $\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_w^2} + \frac{1}{\omega_s^2}$ 에다 (15), (21)식을 代入하여 정리하면 다음과 같다.

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_w^2 \omega_s^2}{\omega_w^2 + \omega_s^2}}$$

$$= \frac{a^2}{R} \sqrt{\frac{2EI_0 g Q_{3n}(\alpha)}{R [Wa^4 G(\alpha) Q_{3n}(\alpha) + 2m_0 g Q_n(\alpha)]}}$$

.....(22)

이 式이 Curved Taper Leaf Spring의 固有振動數를 나타내는 公式이 된다. 自重이 무시되는 경우는 $\omega = \omega_w = \sqrt{\frac{2EI_0 g}{R^3 W G(\alpha)}}$ 되고 集中荷重이 없는 경우는 $\omega = \sqrt{\frac{a^4 EI_0 Q_{3n}(\alpha)}{R^3 m_0 Q_n(\alpha)}}$ 됨을 곧 알 수 있다.

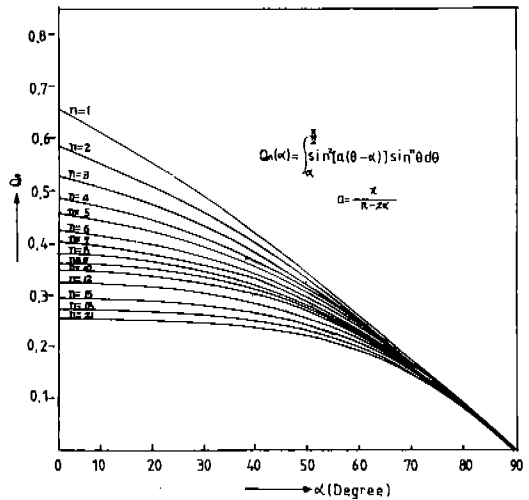


Fig. 4. Dimensionless Factor Q_n(α) and Q_{3n}(α)

4. 實驗 및 考察

4-1. 實驗裝置 및 實驗方法

本 實驗에서 使用한 實驗裝置는 그림 5와 같고, 實驗方法의 概略圖는 그림 6과 같다. 本 實驗에서 使用한 Curved Taper Spring은 大田鋼業株式會社製品 TE-30 모델로써 그 諸元은 다음과 같다.

n = 6, α = 62° = 1.082 rad., E = 2.1 × 10⁶ kg/cm², b = 4 cm, h₀ = 2.2 cm, 自重 ≃ 3.9 kg (eye 部分除外), w = 7.849 × 10⁻³ kg/cm³, R = 69 cm 이다 이때 荷重은 W = 209 kg, 100 kg, 40 kg, 3 kg을 中央鞍部에 集中해서 加했다.



Fig. 5. Experimental Apparatus.

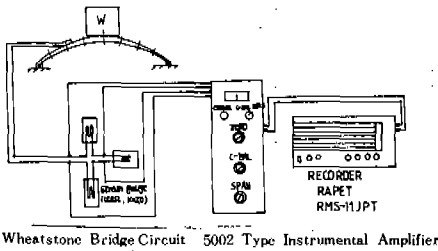


Fig. 6. Block Diagram of Experimental Apparatus.

또 $h/h_0 = \sin^n \theta$ 인 관계에서 n 값을 결정하기 위해 이것을 그래프로 그린것이 그림 7 이다. 여기서 余角 $\alpha = \theta$ 까지의 變化를 살펴보면 中央鞍部에서 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) 약간의 평탄부가 있고 두께비가 0.25 정도까지 직선적변화를 한다고 간주할 수 있는 n 의 값은 3 ~ 8 이 된다. 本 實驗에서 사용한 모델은 이 關係를 면밀히 考慮함으로써 $n = 6$ 으로 선정했다.

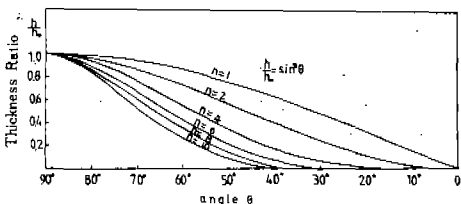


Fig. 7. Variation of Thickness Ratio.

本 實驗諸元으로 使用한 값들은 다음과 같다.

$$I_0 = \frac{bh_0^3}{12} = 3.55 \text{ cm}^4$$

$$m_0 = \frac{wRbh_0}{g} = 4.86 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}$$

$$\frac{R^3}{2EI_0} = 2.20 \times 10^{-3} \text{ cm/kg}$$

$$\frac{2EI_0}{R^3} = 45.5 \text{ kg/cm}$$

$$G(\alpha) = G(62^\circ) = 0.04538$$

$$Q_n(\alpha) = Q_6(62^\circ) = 0.2236$$

$$Q_{3n}(\alpha) = Q_{18}(62^\circ) = 1.929$$

이것들을 理論公式에 代入하면

$$(14) \text{식에서 } \delta_0 = \frac{WR^3}{2EI_0} G(\alpha) = 9.98 \times 10^{-4} W$$

$$(15) \text{식에서 } \omega_w = \sqrt{\frac{g}{\delta_0}} = \frac{990}{\sqrt{W}} \text{ rad/sec}$$

$$f_w = \frac{1}{2\pi} \omega_w = \frac{158}{\sqrt{W}} \text{ Hz} \dots \dots \dots (23)$$

(21) 식으로 부터

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI_0 a^4 Q_{3n}(\alpha)}{R^3 m_0 Q_n(\alpha)}} = 654 \text{ rad/sec, } a = 3.21$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \omega_n = 104 \text{ Hz} \dots \dots \dots (24)$$

를 얻었다. 實驗値와 비교하기 위해 $W = 100 \text{ kg}$ 인 경우 그 自由振動曲線을 레코더(recorder)에 기록한 그림이 그림 8 과 같다. 운동초기는 gain 을 너무 크게 잡기 때문에 週期가 커져 있으나 (非線型의 特徵) 중간部 以下에서는 週期가 一定하고 이 때를 기준삼아 測定한 固有振動數와 (15) 식, (21) 식 및 (22) 식에서 求한 理論値를 Table 1 에서 비교하고 있다.

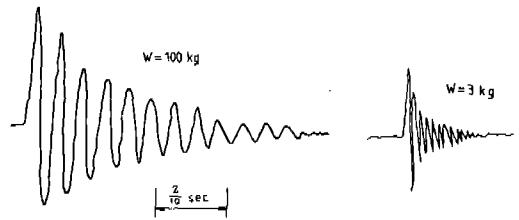


Fig. 8. Free Vibrations Recorded.

Table 1. Comparison of theoretical values and measured values.

f (Hz)	W (kg)				
	209	100	40	3	
理論值	f_w	10.92	15.8	23.6	91.2
$(\frac{1}{f^2} = \frac{1}{f_w^2} + \frac{1}{f_s^2})$	f_s	104	104	104	104
	f	10.5	15.5	22	68
實驗值	f	10	15	21.4	67

4-2 實驗結果 및 考察

이상과 같은 實驗結果를 半對數방안지에 그려 보면 그림 9 와 같다. 여기서 실선은 理論值曲線 이고, ○표는 實驗值이다. 集中荷重이 클때는

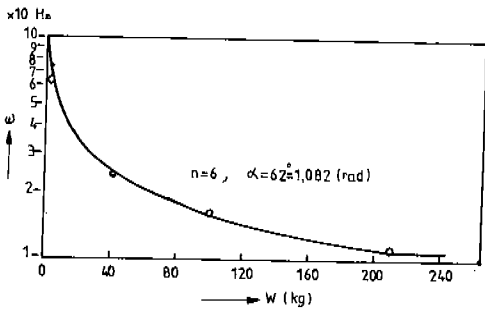


Fig. 9. Comparison of Theoretical Values and Measured Values.

Dunkerley 公式를 이용치 않아도 $f_w \approx f$ 로 됨을 알 수 있다. 이들 結果를 同一重量인 均一断面의 Curved Spring 과 Straight Spring 과 비교 검토해 보자. 실험에 사용했던 TE-30 Curved Taper Leaf Spring의 특성 계산에 고려된 스프링自重은

$$W_s = 2wRh_0 b \int_{\alpha-1.082}^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta \dots (25)$$

여기서

$$\int_{1.082}^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta = \left| -\frac{1}{6} \sin^5 \theta \cdot \cos \theta - \frac{5}{24} \sin^3 \theta \cdot \cos \theta - \frac{5}{6} \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{5\theta}{K} \right|_{1.082}^{\pi/2} \approx 0.392$$

따라서 스프링自重 W_s 는 (25)식으로 부터 $W_s = 3.72 \text{ kg}$ 이 된다.

(1) 同一巾의 均一断面인 Curved Spring 의 경우

巾, $b = 4 \text{ cm}$ 이므로 $W_s = 3.72 \text{ kg}$ 되어야 할 断面의 높이 h 는

$$W_s = 2 b h R (\theta - \alpha) w = 3.72 \text{ kg}, \quad h = 1.76 \text{ cm.}$$

따라서 巾 = 4 cm, 断面高 1.76cm, $R = 69 \text{ cm}$, 余角 $\alpha = 62^\circ = 1.082 \text{ rad}$ 인 圆弧스프링과 비교하게 된다.

$$I = \frac{bh^3}{12} = 1.82 \text{ cm}^4$$

$$\delta_0 = \frac{WR^3}{2EI} \int_{\alpha=1.082}^{\pi/2} (\cos \alpha - \cos \theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{WR^3}{2EI} \left[\left(\frac{1}{2} + \cos^2 \theta \right) \theta - 2 \cos \alpha \sin \theta \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{1.082}^{\pi/2} \approx 0.00146 W$$

따라서 相當均一断面의 Curved Spring 의 固有

振動數 $\omega_{uc} = \sqrt{\frac{g}{\delta_0}} = \frac{819}{\sqrt{W}} \text{ (rad/sec)}$

$$f_{uc} = \frac{1}{2\pi} \omega_{uc} = \frac{130}{\sqrt{W}} \text{ (Hz)} \dots (26)$$

(2) 同一쪽 均一断面의 Straight Spring 의 경우 同一重量의 巾 $b = 4 \text{ cm}$, $h = 1.76 \text{ cm}$ 断面의 Straight Spring 의 길이 l 는

$$w b h l = W_s = 3.72 \text{ kg} \quad l \approx 67 \text{ cm}$$

단순보의 처짐공식으로 부터

$$\delta_0 = \frac{Wl^3}{48EI} = 1.64 \times 10^{-3} W$$

따라서 固有振動數 ω_{us} 는

$$\omega_{us} = \sqrt{\frac{g}{\delta_0}} = \frac{773}{\sqrt{W}} \text{ (rad/sec)}$$

$$f_{us} = \frac{123}{\sqrt{W}} \text{ (Hz)} \dots (27)$$

集中荷重이 크게 作用하는 경우의 固有振動數 比는 (23)식, (26)식, (27)식을 비교하면, $f : f_{uc} : f_{us} = 158 : 130 : 123 = 1 : 0.823 : 0.778$ 로 되어 Curved Taper Spring의 固有振動數 f 는 均一断面 Curved Spring의 固有振動數 f_{uc} 보다 21.5% 크고, 均一断面 直線스프링의 固有振動數 f_{us} 보

다 28.4% 큼을 알 수 있다. 또한 이 관계로부터 등가질량 m_e 가 일정하다고 할 때 등가스프링常數의 비를 구하면 $(K_e) : (K_e)_{uc} : (K_e)_{us} = f^2 : f_{uc}^2 : f_{us}^2 = 1 : 0.677 : 0.605$ 로 되어 同一荷重에 대한 처짐의 비는 $\delta : \delta_{uc} : \delta_{us} = 1 : 1.477 : 1.653$ 로 된다. 즉 균일단면 Curved Spring의 처짐은 Curved Taper Spring보다 47.7% 크고, 균일단면직선 스프링은 Curved Taper Spring보다 65% 크게 된다.

5. 結 論

1. 自動車等に 사용되는 Curved Taper Leaf Spring의 固有振動數를 算出하는 公式 (2) 식을 새로이 유도하였으며 이들 公式이 實驗値와 매우 잘 一致함을 확인하였다. 처짐계수 $G(\alpha)$, $Q_n(\alpha)$ 및 $Q_{3n}(\alpha)$ 는 앞으로 Curved Taper Leaf Spring의 最適設計를 용이하게 하기 위해 유익하게 활용할 수 있을 것이다.

2. Curved Taper Leaf Spring과 同等한 균일단면 Curved Spring 및 균일단면직선스프링의 特性을 比較한 結果 Curved Taper Leaf Spring의 固有振動數가 균일단면 Curved Spring 과 균일단면직선스프링의 고유진동수보다, 21.5%, 28.4% 커지고, 처짐은 반대로 균일단면 Curved Spring 과 균일단면직선스프링이 Curved Taper Spring

보다 47.7%, 65% 크게 됨을 알 수 있다.

參 考 文 獻

1. Nigro, N. J. Bhatia, S. P. Equivalent One-Dimensional System for Analysis of Taper Leaf Springs. Journal of Engineering for Industry. A. S. M. E. pp. 39~42, 1976.
2. Goel, R. P. Transverse Vibrations of Tapered Beams. Journal of Sound and Vibration (1976), 47 (1), pp. 1-7.
3. Mabie, H. H. Transverse Vibrations of Double-Tapered Cantilever beams. The Journal of the Acoustical Society of America. Vol. 51, pp. 1771~1774, 1972.
4. Mabie, H. H. Transverse Vibrations of Tapered Cantilever Beams with End Support. The Journal of the Acoustical Society of America. Vol. 44, pp. 1739~1741 1968.
5. Sammel, M. S. Standard Mathematical Tables. The Chemical Ruber Co., U. S. A. 1968.