

자동차 변속기용 齒車의 Fillet부분에 대한 기하학적 고찰 Geometrical Study of the Tooth Fillet of the Automotive Transmission Gear

徐 龍 權

(영남공업전문대학)

1. 序 論

대량생산체제로 제작되는 자동차용 변속기는 일단 양산에 돌입하고 부터는 막대한 retooling 비용의 지불없이 는 좀처럼 그 모양이나 중요설계치수가 변경될 수 없기 때문에, 초기설계단계에서의 다양하고 신중한 고려가 그 후의 어느 단계보다 중요하다. 자동차용 변속기의 치차설계자는 치차箱의 주어진 공간 내에서 가장 튼튼하고 소리없는 치차를 설계하기 위하여 모듈(module), 압력각, 치깊이 등이 표준에서 벗어나는 특수 cutter 를 사용하도록 요구할 수 밖에 없다 (이러한 비표준 cutter 의 제작을 위해서는 다소 더 많은 시간과 경비가 소요될지 모르지만, 이 문제는 양산체제의 특수성속에 충분히 소화흡수 된다).

표준치차의 경우에는 대부분의 설계 데이터가 테이블이나 그래프로 주어져 있지만 모듈, 압력각, 치깊이등이 표준에서 벗어나는 치차에 있어서는 이것들을 별도로 계산하지 않으면 안된다. 더우기 세계자동차 메이커가 소형화와 경량화로 치달고 있는 현 추세에 있어서는 더욱 정밀한 계산에 의한 데이터가 요구될 것이다.

본 보고서는 임의의 cutter 를 사용하여 절삭한 치차의 fillet 부분에 있어서 fillet 곡선의 함수를 구하고 이것으로부터 Lewis 方式의 굽힘강도계산식(대부분의 굽힘강도 계산식이 Lewis 이론에 입각한 것이긴 하지만)에 사용되는 강도계수를 approach 法으로 구하는 方法과 계산공식에 대하여 서술한 것이다. 여기서 취급하는 齒

切法은 hobbing cutter 등에 의한 rack 形 齒切法이다.

2. Fillet 곡선의 함수

齒切운동은 cutter 의 최를 짚는 회전운동과, involute 곡선을 얻기위하여 소재를 회전시키고 cutter blade를 cutter 축방향으로 이동시키는 왕성운동(물론 이 운동도 hobbing cutter 의 회전운동으로부터 發生되지만)으로 이루어 진다.

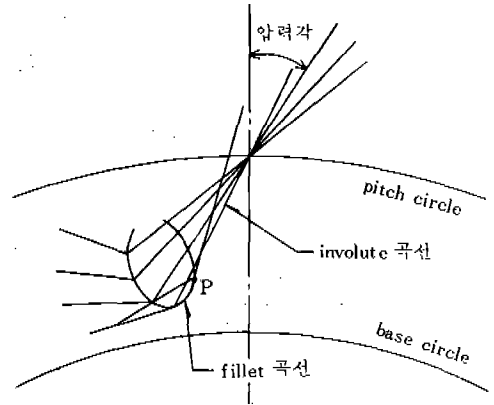


그림 1.

이해를 쉽게하기 위하여 소재를 고정시키면 cutter blade 는 상대적으로 그림 1 과 같은 모양으로 왕성운동을 할 것이다. 이 운동은 blade 와 일체로 되어 있는 긴 평면이 pitch 원뿔의 표면에서 rolling 하는 것으로 생각하면 될 것이다. 그림 1 에서 p 점을 起點으로 상부는 치물림에 사용

필 involute 곡선이고 하부는 치물림에 사용되어서는 안될 불필요한 fillet 곡선이다. 그러나 실제로는 blade의 모서리반경이 있기 때문에 p점은 그림 1에서 보다는 약간 더 올라 갈 것이며 fillet 곡선도 달라질 것이다.

(1) Involute 곡선함수

일반적으로 involute 곡선의 함수는 그림 2에서 보는 것처럼 기초원반경 r_g 에 같은 실을 풀어낼 때의 실끝점 Q의 궤적과 같으므로 극좌표로 나타내면 아래와 같이 될 것이다.

$$r = r_g \sec \alpha$$

$$\theta = \text{inv } \alpha (= \tan \alpha - \alpha)$$

여기서

$$r_g \approx \text{기초원반경}$$

$$\alpha = \text{압력각(임의의 점에서)}$$

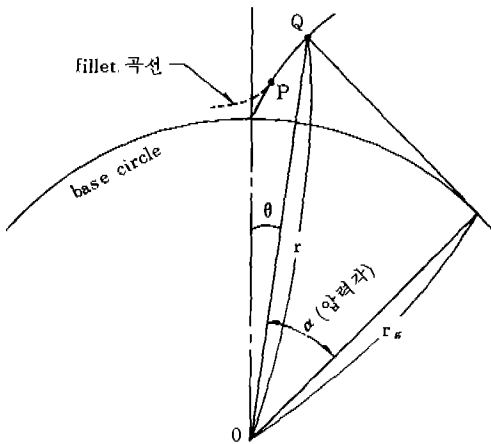


그림 2.

(2) Fillet 곡선함수

그림 3에서 가상 fillet 곡선은 그림 4의 가상 blade로 창성한 결과이며 실제 fillet 곡선은 이 곡선의 각 점에서 수직거리 r_c 만큼 밖으로 떨어진 점들의 집합이다.

그림 3에서,

$$BC = \widehat{BD} = r_o \beta$$

$$PC = AB = r_o - r_1 = h \text{ (로 둔다)}$$

$$\tan \epsilon = \frac{PC}{BC} = \frac{h}{r_o \beta} \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

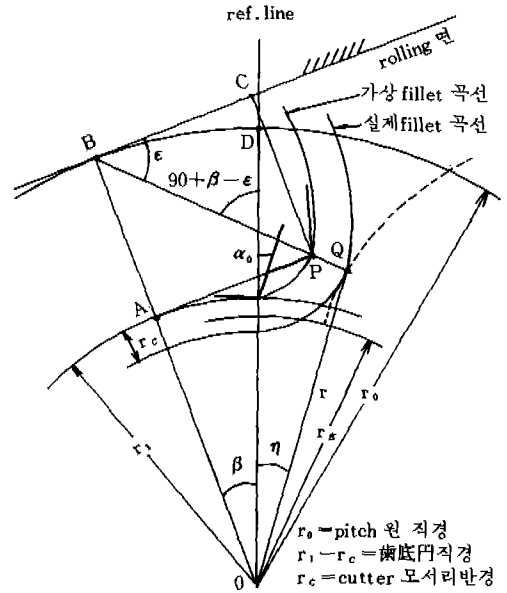


그림 3.

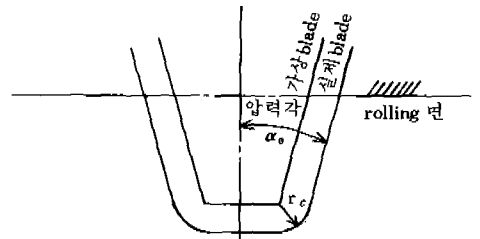


그림 4.

$$BQ = BP + PQ = h \csc \epsilon + r_c = r_f \text{ (로 둔다)}$$

$$\dots \dots \dots \textcircled{2}$$

$\triangle BOQ$ 의 cosine 法則으로부터,

$$r = \sqrt{r_f^2 + r_o^2 - 2 r_f r_o \sin \epsilon} \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

$\triangle BOQ$ 의 sine 法則으로부터,

$$\frac{\cos \epsilon}{r} = \frac{\sin(\eta + \beta)}{r_f}$$

$$\therefore \eta = \sin^{-1} \frac{r_f}{r} \cos \epsilon - \beta \dots \dots \dots \textcircled{4}$$

위의 식 ①, ②, ③ 및 ④가 fillet 곡선을 나타내는 함수이다 (변수는 $\epsilon, \beta, r, r_f, \eta$ 의 5개, 관계식이 4개, 함수는 평면상의 곡선이므로 조건은 필요충분하다).

3. 굽힘강도계수

Lewis의 굽힘강도계산식에 있어서 기본되는
 는리는 그림 5에서 보는 바와 같다. 즉 하중이
 걸리는 T 점에서 치면에 수직으로 그은 선이 齒
 厚中央線과 만나는 점을 U라고 하면 U를 頂點
 으로 한 포물선이 fillet 곡선과 접하는 점 E, F
 (그림 2의 P 점이 변곡점이 되므로 포물선은 반
 드시 fillet 곡선에 접하게 되어 있다)는 이 치차
 의 과단점이 된다는 것이다. 강도계산식에 사용
 되는 치수는 그림 5에서 S_r 와 X이다.

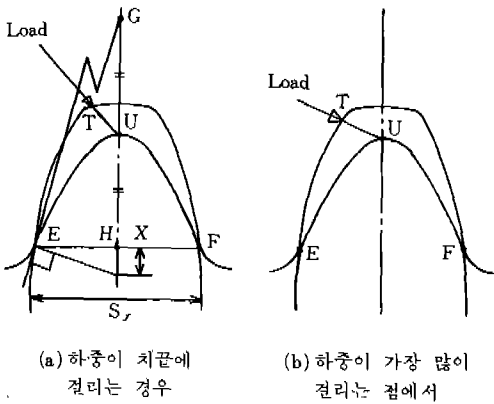


그림 5.

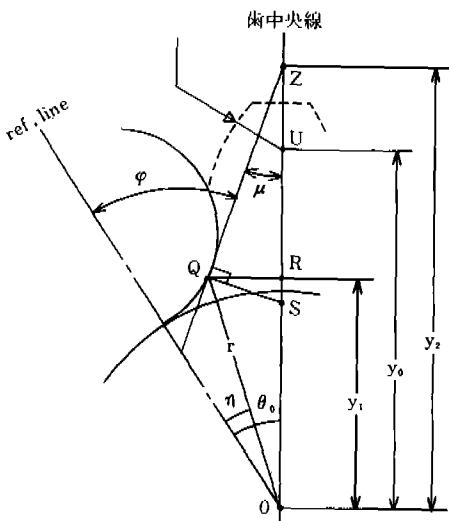


그림 6.

한편 E, F 점에서의 접선이 중앙선과 만나는
 점을 G라고 하면 포물선 특성에 의하여 $GU =$
 UH 가 된다.

S_r 와 X는 式①, ②, ③ 및 ④와 그림 5의 직선
 GE의 함수로 구성되는 관계 방정식을 풀면 구
 할 수 있으나 직접 解를 구할 수는 없고 임의점
 에서부터 출발하여 접근하여 가는 方式을 쓸 수
 밖에 없다. 그림 6에서 fillet 上의 임의의 점 Q
 에서 접선을 긋고 관계식을 구하면 다음과 같다.

$$\mu = \varphi - \theta_0 = \varepsilon - \beta - \theta_0 \text{ (그림 3 참조)} \dots\dots\dots ⑤$$

$$y_1 = r \cdot \cos(\theta_0 - \eta) \dots\dots\dots ⑥$$

$$y_2 = r \cdot \sin(\theta_0 - \eta) \cot \mu + y_1 \dots\dots\dots ⑦$$

$$QR = r \cdot \sin(\theta_0 - \eta) \dots\dots\dots ⑧$$

$$RS = QR \cdot \tan \mu \dots\dots\dots ⑨$$

以上과 같이 Q 點주위의 관계식을 구하였으나
 우리가 원하는 것은 ZU와 RU가 같아지는 Q 點
 과 그때의 S_r ($= 2 QR$) 값과 X ($= RS$) 값이다.

일반적으로, 보통치차에 있어서는 이 조건을
 만족시키는 각도 μ 의 값이 적으므로, 그림 7에
 서 보는 것 처럼 Z 점이 Z' 점으로 이동해도 Q
 점은 별로 이동하지 않기 때문에 고정되어 있다
 고 보고 계산하여도 正解에 접근하는 속도에는
 오차가 없다. 새로운 점 Z'는 Z'U가 UR과 같
 도록 하는 점이다. 이 때의 μ 의 증가분 $\Delta\mu$ 를
 구하고 $\mu + \Delta\mu$ 가 되게 하는 새로운 점 Q'를 구
 한다. 이와 같은 방법으로 계속하여 나가면 원
 하는 등차內로 S_r 와 X를 구할 수 있을 것이다.

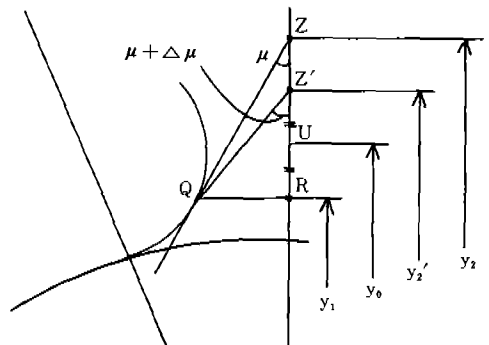


그림 7.

그림 7 에서,

$$\Delta \mu = \frac{y_1 + y_2 - 2y_0}{2(y_2 - y_1)} \sin 2\mu \dots\dots\dots ⑩$$

式 ⑤에서,

$$\Delta \mu = \Delta \epsilon - \Delta \beta$$

式 ①은

$$\sec^2 \epsilon \cdot \Delta \epsilon = \frac{-h}{r_0 \beta^2} \Delta \beta$$

$$\therefore \Delta \mu = - \left(1 + \frac{h \cdot \cos^2 \epsilon}{r_0 \beta^2} \right) \Delta \beta$$

$$\Delta \beta = \frac{-\Delta \mu}{\left(1 + \frac{h \cdot \cos^2 \epsilon}{r_0 \beta^2} \right)} \dots\dots\dots ⑪$$

한편, 최초의 Q 점을 결정하기 위하여 式 ①에서 β 의 값이 주어져야 하나, 실제 齒形과 직접 관련을 갖고 있지 않으므로 아래와 같은 방법으로, 초기가정으로부터 逆으로 개략계산된 값으로 하면 된다.

즉, 최초의 R 점을 r_1 과 齒中央線과의 교점으로 하고 QR 거리를 齒의 기초원상의 閉弧 齒厚의 반으로 잡으면,

$$\tan \mu_i = \frac{S_g / 2}{2(y_0 - r_1)} \dots\dots\dots ⑫$$

단, S_g 는 기초원상의 원호치후.

式 ①에서 $\tan \epsilon \cong \epsilon$ 로 보고 式 ⑤에 대입하면,

$$\mu_i = \frac{h}{r_0 \beta} - \beta - \theta_0$$

$$\beta^2 + (\mu_i + \theta_0) \beta - \frac{h}{r_0} = 0$$

$$\therefore \beta_i = \frac{-(\mu_i + \theta_0) + \sqrt{(\mu_i + \theta_0)^2 + 4h/r_0}}{2} \dots\dots\dots ⑬$$

지금까지의 것을 계산순서로 정리하면 아래와 같다.

$$\tan \mu_i = \frac{S_g}{4(y_0 - r_1)}$$

$$\beta_i = \frac{-(\mu_i + \theta_0) + \sqrt{(\mu_i + \theta_0)^2 + 4h/r_0}}{2}$$

$$\tan \epsilon = \frac{h}{r_0 \beta}$$

$$r_r = \sqrt{r_f^2 + r_0^2 - 2r_f r_0 \sin \epsilon}$$

$$\eta = \sin^{-1} \frac{r_f}{r} \cos \epsilon - \beta_i$$

$$\mu = \epsilon - \beta_i - \theta_0$$

$$y_1 = r \cdot \cos(\theta_0 - \eta)$$

$$y_2 = r \cdot \sin(\theta_0 - \eta) \cot \mu + y_1$$

$$\text{오차 } \nabla = \frac{y_1 + y_2 - 2y_0}{y_0 - y_1}$$

$$\Delta \mu = \frac{y_1 + y_2 - 2y_0}{2(y_2 - y_1)} \sin 2\mu \dots\dots\dots ⑭$$

$$\Delta \beta = \frac{-\Delta \mu}{\left(1 + \frac{h \cdot \cos^2 \epsilon}{r_0 \beta^2} \right)}$$

새로운 β 값을 β_1 이라고 하면,

$$\beta_1 = \beta + \Delta \beta$$

$$\tan \epsilon = \frac{h}{r_0 \beta_1}$$

$$r_r = \frac{h}{\sin \epsilon} + r_c$$

$$r = \sqrt{r_f^2 + r_0^2 - 2r_f r_0 \sin \epsilon}$$

$$\eta = \sin^{-1} \frac{r_f}{r} \cos \epsilon - \beta_1$$

$$\mu = \epsilon - \beta_1 - \theta_0$$

$$y_1 = r \cdot \cos(\theta_0 - \eta)$$

$$y_2 = r \cdot \sin(\theta_0 - \eta) \cot \mu + y_1$$

$$\text{오차 } \nabla = \frac{y_1 + y_2 - 2y_0}{y_0 - y_1}$$

∇ 가 원하는 오차內로 될 때까지 式 ⑭ 이하 과정을 되풀이한다.

$$S_r = 2 \cdot r \cdot \sin(\theta_0 - \eta)$$

$$X = \frac{S_r}{2} \tan \mu$$

r_r 는 파단점의 fillet 곡률반경

한편 helical gear 에 있어서 여기에 사용되는 기초 齒諸元을 살펴보면,

- m_n (치직자 모듈, 주어짐)
- Z (齒數, 주어짐)
- β_0 (pitch 원上 비틀림각, 주어짐)
- d_k (齒先円徑, 주어짐)
- α_{0n} (치직자기준압력각, 주어짐)
- S_{0n} (치직자pitch 원上 원호치후, 주어짐)
- d_r (치저원직경, 주어짐)
- r_c (cutter 모서리반경, 주어짐)
- $d_o = Z \cdot m_n / \cos \beta_0$ (pitch 원직경)
- $d_{oe} = Z \cdot m_n / \cos^3 \beta_0$ (유효pitch 원직경)
- $d_{ke} = d_{oe} + (d_k - d_o)$ (유효치선원직경)
- $d_{re} = d_{oe} - (d_o - d_r)$ (유효치저원직경)
- $d_{ge} = d_{oe} \cos \alpha_{0n}$ (유효기초원직경)
- $\cos \alpha_k = d_{ge} / d_{ke}$ (유효치선원上 압력각)
- $r_0 = d_{oe} / 2$
- $r_k = d_{ke} / 2$
- $r_r = d_{re} / 2$
- $S_k = d_{ke} (S_{0n} / d_{oe} - \text{inv } \alpha_k + \text{inv } \alpha_{0n})$ (유효치선원上 원호치후)
- $\theta_0 = \frac{1}{2r_0} [S_{0n} + 2 \{r_c \sec \alpha_{0n} + (r_0 - r_1) \tan \alpha_{0n}\}]$
- $r_1 = r_r + r_c$
- $y_0 = r_k - \frac{S_k}{2} \tan \alpha_k$ (하중이 치선에 작용)
- $h = r_0 - r_1$
- $S_k = d_{ge} (S_{0n} / d_{oe} + \text{inv } \alpha_{0n})$

참고로 $m_n = 2.25$, $Z = 22$, $\beta_0 = 31.3618^\circ$, $\alpha_{0n} = 17.5^\circ$, $r_c = 0.5$ 의 helical gear 에 있어서 위의 계산과정에 따라 계산한 결과가 正解에 접근하는 정도를 살펴보면 그림 8 과 같다.

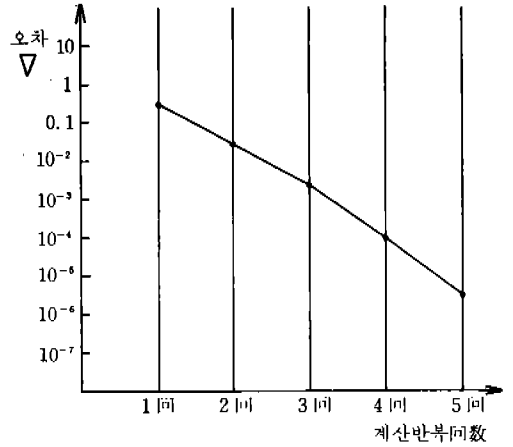


그림 8.

6. 마무리

以上 rack 形 치절에 의한 치차의 강도계수를 구하는 과정을 모색하여 보았다. 지금까지 살펴본 과정에서 얻은 개념으로 보면, 같은 치깊이에서 강도계수를 증가시키려면 (강도를 좋게 하려면) cutter의 모서리반경을 크게 하면 된다. 그러나 이렇게 하는 경우 T.I.F 직경(True Involute Form Diameter)이 자연히 커지므로 상대적으로 작용깊이 (working depth)가 적어지고, 따라서 치물림 (gear noise 와 관련)上 불리하다. 또한 本稿에서 취급한 hobbing 가공이 아닌 pinion shaper 가공에 의하여도 같은 cutter 모서리반경에서 T.I.F 직경이 큰 반면에, 증가된 강도계수를 얻을 수 있음을 알 수 있다. Pinion shaper 가공에 의한 강도계수를 구하는 과정은 此後의 과제로 남겨둔다.