

有限要素法에 의한 轉位齒車의 強度解析

Strength Analysis of Shifted Gear by Finite Element Method

趙宣彙* · 朴鍾根**

Abstract

In this paper, it was attempted to verify how the strength around fillet area of shifted gear would be affected by variables such as number of teeth, shifted value, and diametral pitch.

Thereafter, the Lewis' tooth factor of the shifted gear was computed in terms of previously mentioned variables in order to observe the characteristics of stress change related from tooth factor and tooth number with the parameter of shifted values and diametral pitches. From the results of quasi-theoretical values by Finite Element Method (F. E. M.) and experimental values through the photo-elastic tests, the followings were identified.

The more the number of gear teeth increased, the more the profile of the tooth became close to that of rack, and accordingly the stresses in the fillet area decreased significantly in certain range. Furthermore, as the shifted value and pressure angle increase the stresses tend decrease (Fig. 1).

Moreover, the stresses analyzed by F. E. M. in the filled area became around 1.22 times larger than the stresses computed by Lewis' form factor (Tab. 3), and this is supposed as an influence of the stress concentration in fillet area.

1. 緒 論

動力 傳達用 機械要素로서 매우 重要な 位置를 차지하고 있는 기어의 力學的 解析에 對해서 많은 研究가 行하여져 왔다. 특히 裝置의 大型化와 高負荷 傳動의 gearing 作用에 對한 關心이 높고, 이에 따라 面壓 強度와 이뿌리 強度에 대한 연구도 많이 이루어지고 있으며 (1, 2), 負荷 容量을 增加시키기 위하여 壓力角을 높이는 경향이 있고 또한 轉位齒車를 使用하기도 한다.⁽¹⁾

本 研究에서는 involute spur gear에 있어서 壓力角, 轉位量, 잇수 등의 變化가 이뿌리部의 應力에 미치는 影響을 靜力學的으로 分析하고 그

결과를 또한 實驗的으로 驗證하였다.

첫째, Lewis의 齒形係數를 壓力角, 轉位量, 잇수, fillet radius의 函으로 計算하고, 壓力角 25° fillet radius를 Module의 0.3배로 하여 轉位量과 잇수에 따른 치형계수를 計算하였다.

둘째, fillet部의 應力集中의 影響을 究명하고 또한 正確한 이뿌리部의 最大引張應力을 2次元 應力解析에 關한 有限要素法의 program을 利用하여 두차례에 걸쳐 해석하였다.

셋째, 이뿌리部 應력해석에 있어서 boundary condition의 影響을 考察하고 靜力學的인 解析과 비교하기 위하여 이(齒)를 cantilever로 이상화하여 광탄성 실험을 수행하였다.

*서울大學校 工科大學

**慶南大學校

2. 齒形強度的靜力學的解析

齒形的 이뿌리部의 應力을 解析하기 위하여 靜力學的인 方法으로 가장 一般的인 Lewis의 齒形係數⁽¹⁾를 使用하였으며 이 Lewis의 치형계수에 대하여 壓力角 25° , fillet radius $r_f = 0.3/P$ 로 할 때 (P ; 직경피치) 잇수와 전위 계수에 따른 치형계수를 계산하여 Fig. 1에 표시하였다.

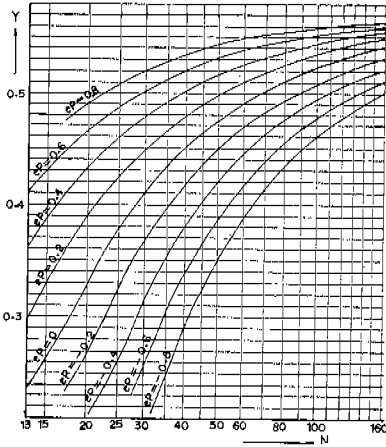


Fig. 1. Relations of tooth number and form factor as parameter of shifted value.

하중이 이 끝에서 작용할 때 Lewis의 해석에서는 하중 작용점을 실제보다 약간 아래로 잡음으로써 작용하중의 원주 방향 성분에 의한 굽힘 모멘트에 의해서 생기는 굽힘 응력보다 작게 계산 되도록 했다. 이것은 인장응력이 작용하는 이뿌리 부분에 관심을 두었음을 의미한다. 왜냐하면 작용하중의 반경 방향 성분에 의한 영향으로 인장응력이 작용하는 fillet部는 응력이 작고 압축응력이 작용하는 fillet部는 응력이 크기 때문이다. 이런 관점은 free boundary에 접선 방향으로 작용하는 인장응력이 압축응력보다 더 위험하다는 과거 역학적 견지로 보더라도 타당하다고 본다.

3. 有限要素法(Finite Element Method)에 의한 解析

2節에서의 해석은 齒를 cantilever로 이상화

하고 應力을 해석했으나 fillet部의 應力集中 효과를 고려하여⁽⁴⁾, fillet部의 精確한 인장응력을 계산하기 위하여 잇수 $N=42$, 壓力角 $\phi=25^\circ$, 직경피치 $P=1$, 轉位量 $e=-0.34$ (inch)인 spur gear에 대하여 有限要素法으로 다음과 같이 응력을 구했다.

3. 1 Source program

Source program으로 Chandrakant S. Desai와 John F. Abel의 "Introduction to the Finite Element Method"⁽⁵⁾의 부록에 수록된 plane stress/strain해석에 사용할 수 있는 example code를 利用했으며 IBM 360/370에 使用하기 適合하도록 program내용을 다소 변경하였다.

① Max. element와 Max. node를 200 개씩으로 증가시켰다.

② 참고문헌(5)에 제시된 example code는 기억용량이 작은 소형 computer에서도 사용할 수 있도록 몇 개의 변수를 element 순서대로 부기억 장치(Magnetic tape)에 기록했다가 차례로 그 값을 읽어서 계산에 이용하는 부분이 있으나 본 논문에서는 번거로움을 피하고, program 실행시간을 절약하기 위하여 magnetic tape에 수록할 값을 element 전체에 대해서 동시에 중앙 기억 장치에 기억시켰다. 즉 subroutine ASEMBL의

```
.....
DO 10 M = 1, NEL
.....
```

```
26 WRITE (1) ((QK(i, J), J=1,10), i= 9,
10), Q(9), Q(10), ((B(i, J), J=1,10), i=1,
3), ((c(i, J), J=1,3), i=1,3), XQ(5), YQ
(5).
.....
```

```
10 CONTINUE
.....
```

를 다음과 같이 바꾸었다.

```
26 DO 1001 i=1,2
QMMM(i, M) = Q(i+8)
DO 1001 J=1,10
1001 QKMMM(i, J, M) = QK(i+8, J)
DO 1002 i=1,3
```

```

DO 1003 J=1,10
1003 BMMM(i, J, M) = B(i, J)
DO 1004 J=1,3
1004 CMMM(i, J, M) = c(i, J)
1002 CONTINUE
XQMMM(M) = XQ(5)
YQMMM(M) = YQ(5)
    
```

그리고 여기서 새로이 추가되는 변수인 QMMM(2,200), QKMMM(2,10,200), BMMM(3,10,200), CMMM(3,3,200), XQMMM(200), YQMMM(200)을 COMMON/ONE/ 구역에 정의해 두었다. 여기서 알 수 있는 바와 같이 이렇게 함으로써 소요되는 기억 용량은 크게 증가하지만 전체 program 논리에는 전혀 영향을 가하지 않고 있다.

또한 subroutine stress에서 magnetic tape 에 element 순서대로 기록했던 변수들을 차례로 읽어서 stress를 계산하는 부분이 있다. 따라서 subroutine ASEMBL에서와 마찬가지로 common/one/구역에 추가로 지정된 변수에 저장된 값들을 element 순서대로 읽도록 하면 된다.

이 program의 정확성을 확인하기 위하여 직경 방향으로 압축하중을 받는 2次元 원판 모델에 대해서 이 program을 적용해서 응력을 해석해

본 결과, 이론적으로 응력분포가 알려진 하중방향에 수직인 직경상에서 유한 요소법에 의한 해는 이론적인 해와 1% 오차내에서 정확함을 확인할 수 있었다.

3. 2 Discretization of structure

잇수 42, 압력각 25°, 직경피치 1 전위량 -0.34 (inch)인 齒車의 齒形曲線의 좌표를 계산하여 Fig. 2와 같이 element를 나누었다. 인접한 이 부분은 생략하고 그 부분을 수평선으로 연장했으며 node number 127-103-104-128의 boundary를 變位 zero의 固定 boundary로 했다. 하중은 2번 node에서 밑면에 수직하게 작용하며 이런 경우 수평선과 27.7°를 이루고 크기는 600kg으로 했다. Young's modulus와 Poisson's ratio는 각각 $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, 0.3$ 으로 놓았으나 이 값들은 변위 계산에 쓰일 뿐 stress distribution에는 無關하다.⁶⁾ 두께를 30mm로 하고 앞의 program을 이용하여 각각의 node에서의 變位를 계산하였다.

최대 인장 응력을 알아보기 위하여 引張應力이 작용하는 fillet부분 확대해서 해석했다. 즉 Fig. 2의 node number 27-24-54-92-96으로 연결되는 부분을 Fig. 3과 같이 160개의 element로 나누었다. 여기서 boundary condition으로 앞

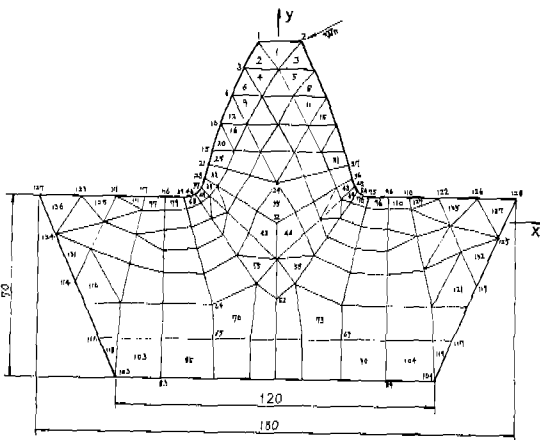


Fig. 2. Discretization of gear tooth

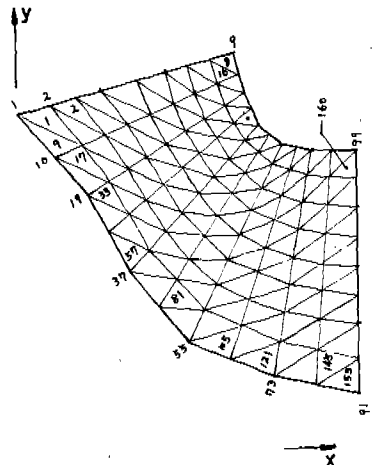


Fig. 3. Refinement of spur gear fillet area of tensile stressed

Table 1. Boundary displacement of Fig. 3

Node No.	x-disp (cm)	y-disp (cm)
1 (24)	-0.127×10^{-3}	-0.388×10^{-4}
4 (25)	-0.153×10^{-3}	0.308×10^{-4}
6 (26)	-0.178×10^{-3}	0.101×10^{-3}
9 (27)	-0.219×10^{-3}	0.185×10^{-3}
19 (33)	-0.612×10^{-4}	0.118×10^{-4}
37 (42)	-0.276×10^{-4}	0.102×10^{-4}
55 (54)	-0.141×10^{-4}	0.362×10^{-4}
73 (71)	-0.111×10^{-4}	0.355×10^{-4}
91 (92)	-0.203×10^{-4}	0.394×10^{-4}
93 (93)	-0.282×10^{-4}	0.463×10^{-4}
95 (94)	-0.344×10^{-4}	0.500×10^{-4}
97 (95)	-0.388×10^{-4}	0.522×10^{-4}
99 (96)	-0.308×10^{-4}	0.497×10^{-4}

※ () 내의 숫자는 Fig. 2에서의 Node No. 임

의 유한요소법에 의한 해석에서 구해진 node 의 displacement를 이용했으며 이것을 Table 1에 실었다.

Fig. 3의 boundary에서 새로 추가된 node의 변위는 위의 program의 shape function이 1차 함수이므로 element side는 변형 후에도 직선이 되어야 하므로^(5,7)인접한 node에서의 변위의 산술 평균치를 사용했다.

이 두번째 해석의 결과 최대 인장 응력은 Fig. 3의 element No. 56에서 걸리며 $281.8(\text{kg}/\text{cm}^2)$ 이고, 그 방향은 free boundary에 접선 방향임을 알 수 있었다.

이 두번째 해석의 결과에 의하여 element 56번 주위의 element에 대한 값들을 Table 2에 기록하였다.

Table 2에서 θ 는 최대 주응력의 방향과 x축이 이루는 각도(degree)이며 본 program의 output에서는 이것 이외에도 element centroid의 x, y좌표, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 가 계산되어 나오지만 여기서는 생략했다. Input data card작성 요령은 여기서는 생략했다(참고문헌(4)참조). program 집행에 이용한 computer는 IBM 370이었다.

Table 2 Output of F. E. M (Stresses at element Centroids)

element No.	$\sigma_1 (\text{kg}/\text{cm}^2)$	$\sigma_2 (\text{kg}/\text{cm}^2)$	$\theta (^{\circ})$
38	0.1083×10^3	0.3118×10^2	-66.03
39	0.1607×10^3	0.3224×10^2	-63.94
40	0.2641×10^3	0.3013×10^2	-66.78
46	0.8613×10^3	0.3594×10^2	-62.36
47	0.1162×10^3	0.3332×10^2	-59.73
48	0.1597×10^3	0.6343×10^1	-61.52
54	0.1013×10^3	0.3503×10^2	-69.58
55	0.1538×10^3	0.4145×10^2	-63.06
56	0.2818×10^3	0.4196×10^2	-60.45
62	0.7700×10^2	0.3407×10^2	-69.03
63	0.1046×10^3	0.3510×10^2	-59.99
64	0.1516×10^3	0.1187×10^2	-55.07
70	0.1053×10^3	0.3523×10^2	-71.62
71	0.1501×10^3	0.4501×10^2	-61.78
72	0.2668×10^3	0.4712×10^2	-52.88
78	0.6795×10^2	0.2800×10^3	-72.79
79	0.8903×10^2	0.3212×10^2	-58.37
80	0.1306×10^3	0.1490×10^2	-46.23

4. 광탄성 실험

4. 1 實驗裝置 및 實驗方法

等色線은 두 主應力의 差가 일정한 점의 集合이며 그 關係는 아래와 같다.⁽⁶⁾

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f\sigma}{h} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

여기서 σ_1 : 최대 주응력

σ_2 : 최소 주응력

N : fringe order

h : 두께

$f\sigma$: 재료의 고유 fringe 값

등경선(isoclinics)은 本實驗에서는 생략했다. 왜냐하면 이 뿌리部의 最大引張應力을 알아보는 것으로 이 실험의 目的을 한정시켰기 때문이다. 이 뿌리部의 최대 인장 응력은 free boundary에서 생기고, free boundary에서 boundary에 수직인 방향으로의 주응력과 전단응력이 존재할 수

없기 때문에^(4,5) 等色線만으로 最大인장 應력을 구할 수 있다.

等色線 촬영시간은 사용하는 재료에 따라 다르며, viscoelastic 재료인 경우 약간의 creep 現象이 나타나 fringe order가 시간에 따라 변하며 충분히 정상상태(steady state)에 도달한 후 촬영해야 한다.

4. 2 材料의 固有 fringe 값 $f\sigma^{(6)}$

本實驗에서 사용한 epoxy resin의 固有 stress fringe value $f\sigma$ 를 구하기 위하여 2次元 圓판 model을 사용했으며 실험 결과 $f\sigma = 1,258$ (kg / mm)이었다.

4. 3 實驗 方法

光彈性 實驗에 사용된 model을 Fig. 4에 表示한다. 여기서 A-C, B-D部分을 free boundary로 하고 C-D를 fixed boundary로 했다. 有限要素法에서 사용한 것과 같은 gear를 택했으며 荷重의 作用位置도 같게 했다. 荷重의 크기는 47.39 kg으로 等色線만 촬영했고 잇면에 수직하게 하중을 작용시키기 위하여 model을 수평선과 27.7°를 이루도록 경사시켰다.

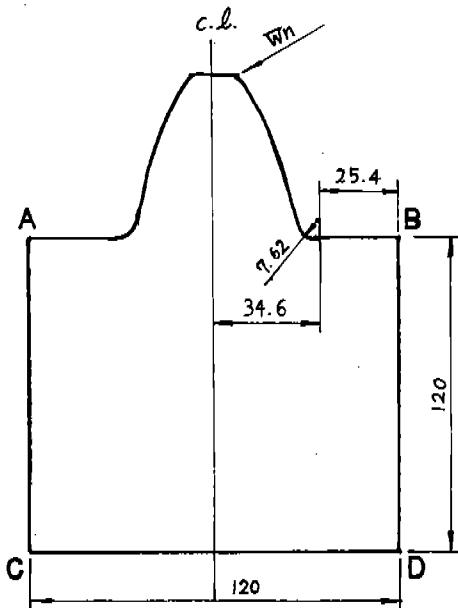
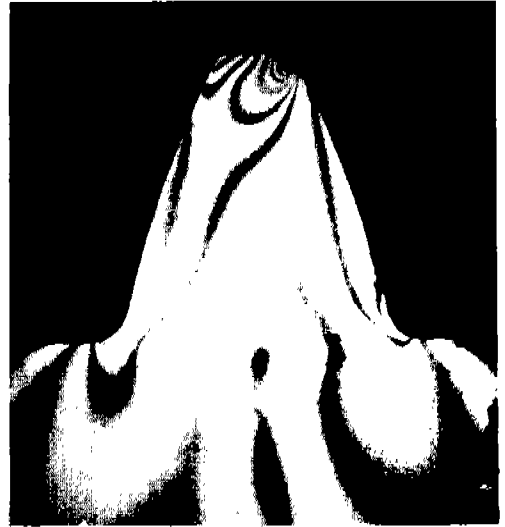


Fig. 4. Model of photoelastic experiment

4. 4 實驗 結果

실험에서 얻어진 等色線을 Fig. 5에 표시하며 이 뿌리 부분에 대하여 light field와 dark field를 종합해서 Fig. 6에 표시한다. 최대 인장 應력이 걸리는 점에서 fringe order는 4.5이며 이 점의 위치는 앞에서 해석한 유한 요소법의 결과와도 일치한다.



(a) Dark field



(b) Light field

Fig. 5. Isochromatics

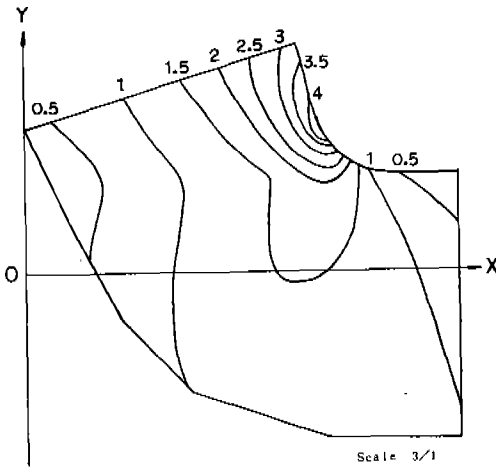


Fig. 6. Isochromatic fringe order of tensile stressed fillet area

5. 결과의 분석 및 고찰

既述한 3 가지 方法에 對하여 이 뿌리部의 最大引張應力을 比較 검토한다. 편의상 모든 경우에 하중은 100kg, 齒幅은 30mm로 한다.

○靜力學的 해석

잇수42, 압력각25°, 직경피치 1, 전위량-0.34 inch인 spur gear에 對해서 Fig. 1에서 齒形係數 Y를 구하면 0.403이며, 作用荷重의 수평성분 $W_x = 100 \cdot \cos 27.7^\circ = 88.5\text{kg}$, 이나비는 30mm이므로 $W_x = \sigma_b Y / p = \sigma_b Y m^{(3)}$ 이므로 $\sigma_b = 0.288(\text{kg/mm}^2)$ 이다.

여기서 구한 응력 σ_y 는 y 方向 應力이다. 잇면에 接線方向의 응력을 計算하기 위하여 이 점에서 잇면에 接하는 線과 y 축이 이루는 각을 30°로 하면 Mohr의 응력원에서 잇면에 接선방향의 주응력 $\sigma_1 = 4\sigma_y/3$ 가 되므로 $\sigma_1 = 0.384\text{kg/mm}^2$ 이다.

○有限要素法의 結果

Table 2에서 최대 주응력은 element 56에서 걸리며 하중 600kg, 이나비 30mm일때 최대 주응력은 281.8kg/cm²이므로 하중이 100kg일때 $\sigma_1 = 0.470\text{kg/mm}^2$ 이다.

○光彈性 實驗 結果

인장부의 free boundary에서 최소 주응력은 zero이므로 식 ①을 최대 주응력을 계산하는데 직접 이용할 수 있고, Fig.5,6에서 fringe order

가 4.5이다. 또한 $f\sigma$ 가 1.258(kg/mm)이며 두께는 6mm이므로 σ_1 은 식 ①에서 0.9435kg/mm²이다. 여기서 가해진 荷重이 47.39kg이므로 하중 100kg, 이나비 30mm에 對해서 σ_1 을 환산하면 0.398(kg/mm²)이다.

○종합 및 考察

위에서 계산한 값들을 Table 3에 나타낸다.

Table 3. Maximum tensile stress in the fillet area.

Calculation method	Lewis' factor	F.E.M	Photoelastic experiment
maximum tensile stress	0.384	0.470	0.398

Table 3에서 Lewis factor에 의한 해석은 fillet 부분의 應力集中의 영향이 고려되지 않았으므로 응력이 비교적 적게 나왔다. 有限要素法과 光彈性 實驗의 結果의 차이는 boundary condition의 영향으로 생각된다. 즉 광탄성 실험에서는 model이 cantilever에 가깝게 이상화되었고 유한 요소법에서는 gear blank쪽의 boundary를 고정하였으므로 후자의 boundary condition이 실제와 더욱 가깝다. 光彈性 實驗에 의한 應力이 Lewis' factor에 의한 해석의 結果와 가까운 것도 이와 같은 觀點으로 理解된다.

6. 結 論

(1) gear의 잇수를 많게 할수록 그 모양은 rack에 가까와져서 fillet 부의 응력은 작아지며, 전위량과 압력각을 크게 할수록 fillet 部의 응력은 작아진다(Fig. 1).

(2) 실제 條件과 가장 가깝게 해석한 유한 요소법에 의한 이 뿌리部 引張應力이 靜力學的 解析에 의한 結果의 1.22배로서 이는 fillet 部의 應力集中에 의한 영향으로 볼 수 있다(Table 3).

(3) 한개의 齒形에 對해서 이 뿌리部의 應力을 解析할 경우 boundary condition의 영향은 매우 크며 cantilever로 이상화할 경우 應力集中이 적어져 실제보다 적은 응력이 계산된다.

參 考 文 獻

- (1) 仙波正莊 ; “齒車の轉位” ; 開發社, 1978.
- (2) 鄭善謨 ; “30°内接法에 의한 高壓力角의 轉位齒車の 負荷特性에 관한 研究” ; 大韓機械學會誌 第12卷 第2號, 1972.
- (3) Darle W. Dudley ; “Practical gear design,” McGraw-Hill, 1954.
- (4) J. P. Queau PH. Trompette, Two-Dimensional Shape Optimal Design by the Finite Element Method, International Journal for Neumerical Methods in Engineering, Vol. 15, 1980.
- (5) Desai, Abel ; “Introduction to the Finite Element Method”, Van Nostrand Reinhold Co., 1972.
- (6) Dally, Riley ; “Experimental Stress Analysis,” McGraw-Hill, 2nd ed., 1978.
- (7) O. C. Zienkiewicz ; “The Finite Element Method,” McGraw-Hill, 3rd ed., 1977.
- (8) Timoshenko & Goodier ; “Theory of Elasticity,” McGraw-Hill, 3rd ed., 1970.