解 說

極限解析의 理論的 背景에 對하여

李 在 旭*

On the Theoretical Background of Limit Analysis

J. W. Lee

1. 序 言

極限解析의 理論(theory of limit analysis)에서는 塑性關節說(plastic hinge hypothesis)을 適用하고 있다. 이 方法의 特徵은 構造物의 崩壞荷重을 算定함에 있어 計算이 簡便하고 그 構造物에 일어날 수 있는 崩壞機構(collapse mechanism)를 洞察할 수 있는데에 있다.

一般的으로 構造物을 設計함에 있어 그의 設計法에는 대체로 어떤 要求에 滿足하는 理想的인 設計가 이루어져야 한다. 우선 그것은 使用上 "安全한" 構造物을 設計할 수 있는 것이어야 한다. "安全한"것이라고 하는 것은 構造物이 破壞한다던지 崩壞할 念慮가 없다는 것을 意味한다. 다시말해서 構造物에 極限强度를 주는 것이어야 한다.

둘째로 그 方法이 實際로 活用될 수 있도록 充分한 精度를 갖고 簡單한 것이어야하고 使用材料의 輕減에 寄與하는 것이어야 할 것이다.

이미 塑性關節說을 利用한 極限解析法은 土木, 建築의 鐵物, 시멘트 構造物 解析에 많이 適用되어 그 實効性이 實證되어 왔고 近年에 와서 船體構造解析에도 適用되어 最小重量 設計를 目標로한 船舶의 웨브肋骨解析, 隔壁構造 및 外板의 局部 强度解析에서 理論的 뒷받침을 이루고 있다. 이는 鋼船構造規則中 船體의 隔壁, 外板, 甲板 및 二重底 構造物의 規定치수 決定에도 應用되어와 船體構造解析에 있어서도 重要한 部分을 이루고 있다.

2. 歷史的 背景

塑性關節의 槪念은 1914年 항가리의 Kazincy[1]에 依하여 처음으로 제안되었고 1917年 네덜란드의 Kist [2]가 비임의 極限强度에 對한 設計를 論하였으며 1926年에 獨逸의 Gruning은 truss의 崩壞條件을 論하였다.

그후 1930~31年에 Fritsche [3, 4]는 비임의 彈塑性變形과 矩形斷面을 갖이는 비임에 對하여 여러 境界條件에 對한 極限 모우멘트를 求하였다. 1936年 Rinagl [5]은 여러 斷面形狀의 비임에 對한 彎曲曲線의 理論値와 實驗이 잘 一致하는 것을 確認하였는데, 그의 實驗으로부터 崩壞限界에서 塑性關節의 發生을 立證하였다. Rinagl은 兩端支持에 中央集中荷重이 作用하는 비임의 彎曲實驗에서 崩壞直前까지는 거의 彈性變形이다가 갑자기 崩壞가 일어나는 것을 알았다. 이때 비임의 두 部分은 아무런 塑性 變形을 하지 않았고 極히 限定된 領域 即, 塑性關節의 領域에만 塑性變形이 머물러 있었다. Rinagl의 實驗은 崩壞時 發生하는 塑性關節에 對한 傳統的인 實驗으로 볼 수 있다.

英國에서는 1948年 極限解析法에 依한 計算을 建築部門에 許容하였다.

1952年 D.C. Drucker, W. Prager 및 H.J. Greenberg [6]가 崩壞(collapse)에 隨伴하는 諸 定理들을 體係化함으로써 極限解析法의 科學的 根據가 이루어 졌고 Baker, Horne & Heyman [7], L.S. Beedle [8], B. C. Neal [9], A Sawczuk & Th. Jaeger [10], K.H. Reckling[11]等의 著書에 極限解析에 關하여 詳述되어 있다.

3. 極限解析理論

3.1 構造物의 崩壞荷重과 安全係數

構造物의 崩壞荷重을 算定하는데 있어 不靜定 次數(degree of redundancy)에 따라 計算은 점점 번거러워

接受日字 : 1981年 5月 26日

* 正會員, 韓國船級協會

진다. 靜定系(statically determined)에 對하여는 崩壞荷重 算定이 매우 簡單하다. 例로서 斷面積 A를 갖는 棒이 一軸引張을 받을때 崩壞(또는 限界)荷重은

$$P_T=A\sigma_y \ (\sigma_y\text{: yield stress}) \qquad (1)$$

兩 自由端에 모우멘트가 걸리지 않는 비임은 "外的"으로는 靜定系이지만 "內的"으로는 不靜定系이다. 崩壞가 일어날때의 塑性모우멘트 M_p를 算定하기 爲하여는 各 斷面層에 있어서의 變形度(strain) 即 內部의 變動(kinematic)을 考慮하여야 한다. 斷面의 最外殼層이 σ_y값에 達하여 變形을 하여도 斷面內部의 彈性領域의 制限을 받아 비임의 崩壞는 일어나지 않는다(limited plastic yielding). 全 斷面이 塑性域으로 되었을때 비임은 그 以上의 荷重支持能力을 喪失한다. 斷面에는 塑性關節이 形成된다. 이때 비임은 動定系(kinematically determined)가 되고 自由度 1을 갖는다. 이때 걸리는 모우멘트는 塑性모우멘트 M_p로 불리운다. 多數次의 不靜定系의 崩壞荷重의 決定은 崩壞機構를 形成하기에 "充分한 程度數"의 個所에서 塑性모우멘트 M_p가 到達할 때 이루어 진다. 構造用 鋼材의 機械的 性質에 適用될 수 있는 것으로 ideal-plastic 材料를 생각하면(그림 1) 一定하게 머물러 있는 崩壞(限界)荷重下에서 變形은 無除限으로 增加한다. 이러한 崩壞狀態에

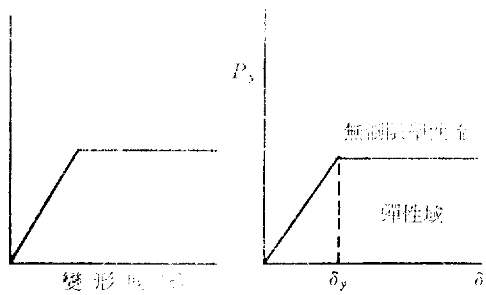


그림 1. Ideal-plastic 材料

到達하기까지 彈性域에 있는 部分이 塑性化된 領域의 無制限 塑性變形을 抑制한다. 充分한 程度數의 塑性關節이 形成된 後에야 드디어 崩壞가 일어난다. 塑性關節이 새로이 한개씩 더 形成될 때마다 不靜定의 次數는 1個씩 줄어든다. 即 n次의 不靜定 構造物은 $n+1$個의 塑性關節이 形成되었을때 崩壞한다. 이때의 構造物系는 "靜定"이 되어 崩壞荷重을 算定하는데 있어 平衡方程式으로 滿足된다.

個別로 形成되는 塑性關節 外에도 板에서는 崩壞荷重에 達할때 塑性域 또는 塑性關節線이 形成될 수 있으며 充分한 數와 크기의 塑性域이나 塑性關節線이 形成될 때 限界荷重 以上의 支持能力이 消盡 된다.

極限解析法에서 어떤 構造物의 "安全係數"(factor of safety)를 判斷하는 데는 直接荷重의 크기에 對하여 定하고 降伏(yielding)初에 對한 安全係數는 $S_y=P_y/P$ 또는 M_y/M로, 崩壞에 對한 安全率은 $S_T=P_T/P$ 또는 M_T/M로 定義한다.

$M\geq M_y$인 境遇 $m=M/M_y\geq 1$로서 過荷重係數로 定義된다. m의 極限値 $m_l=M_T/M_y$ 또는 P_T/P_y는 荷重의 支持能力의 여분에 對한 尺度이다. 이에 反하여 어떤 構造物의 安全度는 通常的인 槪念으로 應力의 크기에 對하여 間接的으로 表示할 수 있다. 例로서 $\sigma_{\max}$와 $\sigma_{\text{allowable}}$의 두값 差異는 安全度에 對한 尺度로 볼 수 있다. 어느 不靜定系의 變形機構形態(mechanical behavior)를 荷重과 變位에 따라 直視的인 表現을 그림 2에 表示하였다.

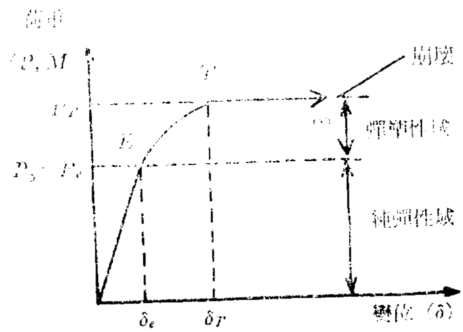


그림 2. 不靜定系의 荷重—變位曲線

遷移領域 $E\to T$曲線은 系의 不靜定次數 및 荷重이 增加하는 中 形成되는 塑性關節數에 따라 變한다. 靜定系에서는 彈性의 境界荷重 P_y에서 荷重能力은 한개의 塑性關節이 形成됨으로서 限界點에 達한다.

3.2 極限解析 理論의 假定 및 定理

理論을 可能한 限 簡單化하고 妥當性을 갖도록 實測値로부터 偏差가 적고 無理없는 몇가지 假定이 設定되었는데 極限解析 理論의 假定은 다음과 같다.

假定 :

1. 荷重의 比例性 :

$$P_i/P_j=C_{ij}=\text{一定},\ M_i/M_j=K_{ij}=\text{一定}$$

崩壞狀態의 有一性

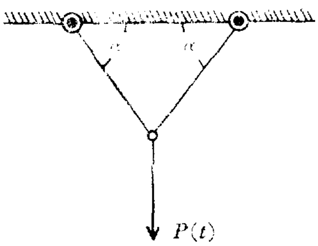
$$\max(P_i)\fallingdotseq P_T \quad \max(P_i)\fallingdotseq M_T$$

2. 理想化한 材料의 性質

3. 荷重이 增加함에 따라($P_y\leq P_i\leq P_T$) 形成되는 塑性關節線 또는 塑性領域의 斷面荷重(section load)은 一定하다.

4. n次 不靜定系 構造物

$n+1$의 塑性關節이 形成되면 完全崩壞機構를 이룬다. 即, 崩壞狀態에서 構造物은 靜定이 된다.



5. 1次(first order)의 理論

$P=P(t)$에서

$\alpha=$一定

6. 挫屈과 휨에 依한 不安定性은 別途로 取扱하고 極限荷重이 制限 될 수 있다.

定理 :

Ⅰ. 任意의 不靜定量을 假定한 靜的許容(statically admissible) 應力場(stress field)에 對應하는 荷重은 崩壞荷重 P_T 보다 적다. 下限定理(lower bound theorem) $P_S \leqq P_T$

Ⅱ. 假定한 崩壞機構條件을 滿足하는 動的許容(kinematically admissible) 速度場(velocity field)에 對應하는 荷重은 崩壞荷重 P_T보다 크다. 上限定理(upper bound theorem) $P_K \geqq P_T$

上述한 定理 Ⅰ 및 Ⅱ로부터 求하는 崩壞荷重 P_T는

$$P_S \leqq P_T \leqq P_K \tag{2}$$

이다. 여기서 보는 바와같이 靜的許容 및 動的許容의 崩壞機構에 屬하는 外部荷重이 求하는 崩壞荷重이다. 이 定理에 依한 解法을「極限解析法」이라 말한다.

假定 3에서 5까지의 內容은 塑性關節說을 뒷받침 한다. 極限理論의 定理는 崩壞荷重 P_T가 上界荷重 P_K와 下限荷重 P_S에 依하여 制限되어 있음을 뜻한다. (式 (2) 參照).

理解를 돕기 爲하여 靜的許容 應力場과 動的許容 速度場의 概念을 다음에 對比하였다.

靜的許容 應力場 (statically admissible stress field) 應力벡터 $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(x_i)$	動的許容 速度場 (kinematically admissible velocity field) 速度벡터 $v_i=v_i(x_i)$
1. 平衡條件(equilibrium condition) $\partial_j\sigma_{ij}=0 \begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \end{cases}$	1. 適合條件(compatibility condition) 數學的인 뜻 : 變形 u_i 및 變形速度 $\dot{u}_i=v_i$의 連續微分可能 物理的인 뜻 : 荷重前, 中 및 後에 있어서 隣接要素는 서로 連續되어 있다.
2. 塑性條件(plastic condition) $F(\sigma_{ij};k) \begin{cases} <0 : \text{彈性狀態} \\ =0 : \text{塑性狀態} \end{cases}$ $F=F(\sigma_{ij})$: plastic potential k : 材料特性値, 例로서 剪斷降伏應力	2. 連續性 $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\partial_i(\rho v_i)=0$ $\dfrac{d\rho}{\rho}+d\varepsilon_{ij}=0$ $\rho \begin{cases} \neq 0 \ \varepsilon_{ii}=(1-2\nu)/E\cdot\sigma_{ii} : \text{彈性狀態} \\ =0 \ \varepsilon_{ii}=0 \ \nu=1/2 : \text{塑性狀態} \end{cases}$
3. 靜的境界條件 $(\sigma_{ij})_{\text{boundary}} \begin{cases} =-P \text{ for } i=j \\ =-\tau_b \text{ for } i\neq j \end{cases}$	3. 動的境界條件 $x_i\rightarrow(x_i)_b \Rightarrow v_i\rightarrow(v_i)_b$ 平衡條件을 滿足할 必要는 없음

3.3 塑性關節에서의 斷面모우멘트

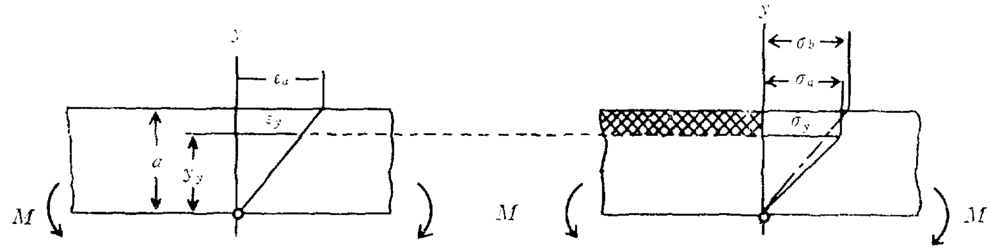
塑性關節說의 根本的인 假定은 塑性關節에서 斷面모우멘트 M_T*가 一定값으로 머문다는 것이다. 이 斷面모우멘트는 斷面形狀에 依하여 決定되고 그림 3에 圖示하였다.

3.4 塑性關節의 變位

塑性關節의 變位(deformation) v는 彈塑性 굽힘 計算으로 부터 求한다. 最大의 모우멘트가 作用하는 個所에 塑性關節 또는 塑性域이 形成되고 塑性化된 비임(塑性線)의 微分方程式이 成立된다. 其外 部分은 彈性變形을 한다. 塑性關節의 變位를 計算하기 爲하여 2個의 微分方程式이 使用된다.

即, Euler에 따른 彈性線의 微分方程式 :

$$v''=M(\xi)/EI;\ \xi=x/l \tag{3}$$



	變形度分布	應力分布
彈性域 $0 \leqq y \leqq y_y$	$\varepsilon = \varepsilon_a \dfrac{y}{a}$ (Bernoulli-Navier)	$\sigma = \sigma_y \dfrac{y}{y_y}$
塑性域 $y_y \leqq y \leqq a$		$\sigma = \sigma_y =$ 一定 ((ideal-plastic)
外境界 $y=a$	$\varepsilon_a = \varepsilon_y \dfrac{a}{y_y}$	$\sigma_a = \sigma_y$

σ_a : 外境界 實際應力 $\sigma_b = M/Z$: 굽힘應力(計算値)

$$M^* = \int_{-a}^{+a} \sigma(y) b(y) y dy = c \int_0^1 \sigma(\eta) f(\eta) d\eta ; \eta = y/a$$

斷面	Z	c	$f(\eta)$	$\dfrac{M^*}{M_F} = m(\eta_F)$; $M_F = \sigma_F W$, $\eta_F = y_F/a$
矩形 (b, 2a)	$\frac{2}{3} ba^2$	$2ba^2$	η	$\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\eta_F^2\right)$
圓形 (2a)	$\frac{\pi}{4} a^3$	$4a^3$	$7\sqrt{1-\eta^2}$	$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\arc\sin \eta_F}{\eta_F} + \frac{1}{3}\sqrt{1-\eta_F^2}(5-2\eta_F^2)\right]$

境界値 $\eta_F \to 0 \Rightarrow$ 塑性關節形成

$M_T^* = \lim\limits_{\eta_F \to 0} M^*(\eta_F)$이므로 사각단면 : $M_T^* = (3/2) M_F = ba^2 \sigma_F$; 원단면 : $M_T^* = (16/3\pi) M_F = (4/3) \sigma^3 \sigma_F$

그림 3. 塑性關節에서의 斷面모우멘트

塑性線의 微分方程式 [12]은

$$v_p'' = \frac{\varepsilon_a}{a} = \frac{\sigma_y}{E} \frac{1}{a\eta_y} \tag{4}$$

(η_y : 彈塑性 境界面)

이들은 2次 微分方程式이므로 積分後 4個의 積分常數를 決定하여야 한다.

荷重 및 境界荷重 狀態에 依하여 決定되는 2個의 境界條件과 純彈性域($\xi_y \leqq \xi \leqq 1$)과 彈塑性域($0 \leqq \xi \leqq \xi_y$)間의 境界域 $\xi = \xi_y$에서의 連續性과 微分의 連續性으로 부터

$$v(\xi_y) = v_p(\xi_y) \tag{5}$$

$$v'(\xi_y) = v_p'(\xi_y) \tag{6}$$

例로서 矩形斷面에 對한 境界面 $\eta_y = \eta_y(\xi)$는 다음과 같이 求한다. 그림 3으로 부터 矩形斷面에 對한 過荷重係數 $m = m(\eta_y)$에서 $M_y = \frac{2}{3} M_T$인 關係를 考慮하여 求하는 境界面은

$$\eta_y(\xi) = \sqrt{3(1 - M(\xi)/M_T)} \tag{7}$$

式 (7)에 $M(\xi)$는 荷重과 支持條件에 依하여 決定된다. 그림 4에는 두 自由端에 單純支持되고 中央에 한個의 集中荷重이 加하여진 境遇에 境界面 $\eta_y = \eta_y(\xi)$의 變化가 荷重狀態 $P_0 = M(0)/M_T$에 따라 表示되어 있다. 荷重은 $2/3 < P_0 < 1$의 領域에 있다.

그림 5에는 彈塑性 變形時 最大처짐에 對한 굽힘 變

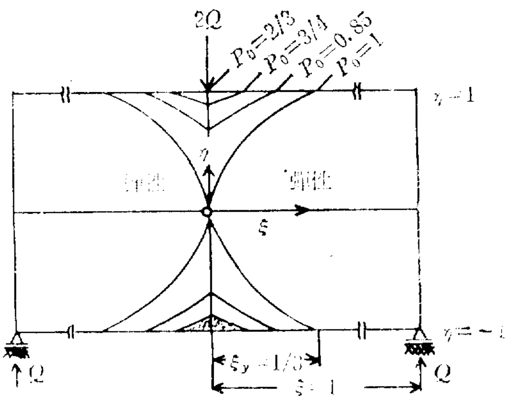


그림 4. 中央에 集中荷重을 받는 單純支持비임에서 塑性域의 傳播

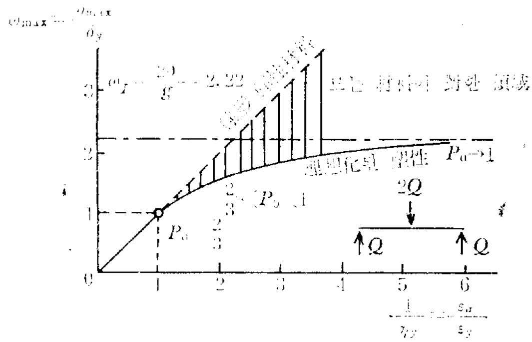


그림 5. 彈塑性 變形時의 最大變位

計算의 結果를 나타내고 있다.

여기서 v_{max}는 비임 中央에서의 變位이고 v_y는 降伏이 始作될 때 비임의 中央에서의 變位이다. 여기서 崩壞狀態에 이를때 中央斷面이 完全塑性化($\varepsilon_a \to \infty$)되어도 비임의 中央에서의 變位는 有限으로($W_T < \infty$) 머므른다. 이러한 事實은 塑性關節說과 一致되어 最大荷重을 받는 斷面에 塑性關節이 形成된다. 理論上 曲率과 變形度는 無限大로 接近한다. 勿論 塑性關節 自體는 移動하지 않는다. $W_T=2.2$는 이미 J. Fritsche [4]에 依하여 주어져 있다.

4. 塑性關節說

塑性關節說은 變形이 작은 範圍에서($W_T=2.2$) 構造物의 崩壞의 極限狀態에서 實際擧動에 對한 近似値를 준다. 이는 Baker, Horne 및 Heymann [7]等의 數 많은 實驗에서 實證되었다. 이미 極限解析 理論에서 塑性關節說의 假定은 言及되었고 다음에서는 다른 角度에서 記述하고지 한다.

4.1 假 定

1. 塑性關節은 最大斷面 모우멘트$(M_T{}^*)_j$가 걸리는 個所에서 "理想化된 關節"이다. (實際는 塑性域이 形成된다. $\eta_y=\eta_y(\xi)$, $0\leq\xi\leq\xi_y$)
2. 崩壞時 斷面모우멘트$(M_T{}^*)_j$는 形成된 塑性關節에서 一定하게 머므른다.
3. W_T는 巨視的 見地에서 彈性變形이다. (theory of first order)

4.2 崩壞機構

構造物은 崩壞荷重(群)$(P_T)_i$이 作用하는 狀態下에서 充分한 數의 塑性關節이 形成되면 崩壞가 된다.

이 崩壞機構를 다음과 같이 詳述할 수 있다.

비임의 처짐이 W_T 값에 接近하거나 到達하면 塑性關節과 關節사이에 있는 彎曲된 비임부분은 더 以上 變形을 하지 않고 關節을 中心으로 堅固한 비임으로써 回轉한다. 卽 崩壞直前과 直後에서의 처짐曲線의 差는 直線으로 주어진다. (그림 6 參照)

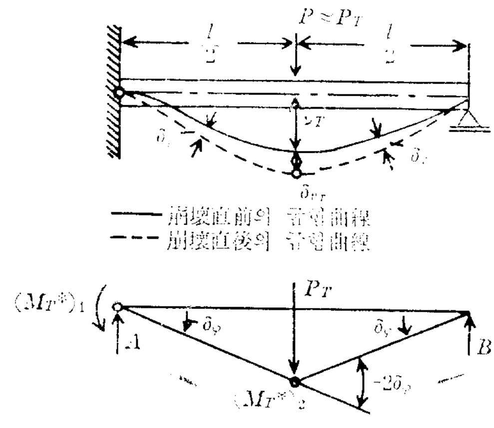


그림 6. 崩壞機構

4.3 假想變位의 原理

塑性關節과 崩壞機構가 決定되며는 假想變位의 原理에 依하여 崩壞荷重을 求할 수 있으며 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$\delta A=\int (P_T)_i\delta(v_T)_i-\sum_{j=1}^{n}(M_T{}^*)_j\delta\varphi_j=0 \qquad (8)$$

여기서

δA : 假想일, $\int$: Stieltjes integral

$(P_T)_i$: 崩壞荷重群(個個의 힘, 荷重分布等 崩壞時의 外力)

$(M_T{}^*)$: 崩壞狀態에서 塑性關節이 形成된 個所의 斷面 모우멘트

$\delta(v_T)_i$, $\delta\varphi_i$: 假想變位(假想된 崩壞機構와 機何學的으로 一致되는 微小變位)

이 方程式은 極限解析理論의 基本方程式으로 右便의 第一項은 모든 外力의 假想일이고 2項은 系全體에 걸친 內部에너지의 合計다. 假想變位의 原理는 系의 平衡狀態 條件式에 準한 것이다.

5. 崩壞荷重의 計算例

塑性關節說에 依한 極限解析의 問題處理에 있어 두가지 境遇가 있나. 그 하나는 塑性關節이 形成될 수 있는 位置가 처음부터 明白한 境遇인데, 一例로 그림 6에서와 같은 간단한 不靜定系이다.

塑性關節은 固定端 및 集中荷重直下 또는 矩形板의 모서리 等에 形成된다. 또 다른 境遇에서는 塑性關節의 位置를 計算에 依하여 求하거나 推定하는 方法이다. 一例로서 連續荷重을 받는 외팔보의 境遇이다(그림 7 參照).

例題 I. 1次曲線의 荷重分布를 받는 1次不靜系의 崩壞荷重의 算出

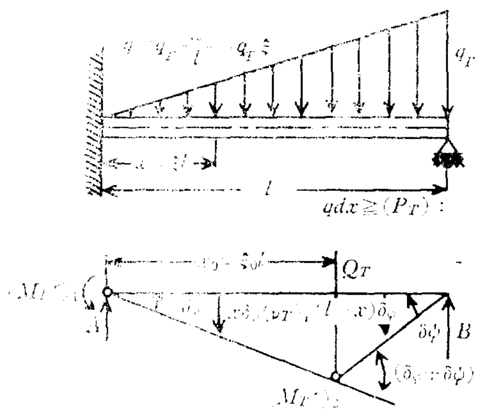


그림 7. 1次曲線의 荷重分布를 받는 1次 不靜定系

方法 I. 假想變位의 原理

$$\delta A=\int_0^{x_0} q\,dx\,x\,d\varphi+\int_{x_0}^{l} q\,dx(l-x)\delta\phi-M_T\delta\varphi$$

$$-M_T(\delta\varphi+\delta\phi)=0$$

幾何學的 適合關係 $x_0\delta\varphi=(l-x_0)\delta\phi$를 適用하면

$$\frac{q_T l^2}{M_T}=\frac{6(1-\xi_0)}{\xi_0(1-\xi_0^2)}$$

最適條件(optimal condition) $\frac{\partial q_T}{\partial \xi_0}=0$로부터

$$\xi_0^3-3\xi_0^2+1=0\Rightarrow q_{01}=2.88;\ q_{02}=-0.53;\ q_{03}=\underline{\underline{0.6528}}$$

則 $q_T=21.5757\frac{M_T}{l^2}$

또는 $Q_T=\frac{1}{2}q_T l\to P_T=Q_T=10.7878\frac{M_T}{l}$

方法 II. 平衡條件

$$\{\Sigma M=0\}_{x=l};\ Al-M_T-\int_0^l q(x^*)(l-x^*)dx^*=0$$

$$\Rightarrow A=\frac{M_T}{l}+\frac{1}{6}q_T l$$

$$\{\Sigma M=0\}_{x=x}\Rightarrow Ax-M_T-\int_0^x q(x^*)(x-x^*)dx^*=M(x)$$

(x^* : Integration Variable)

$x^*=\xi^* l$, $q=q_T\xi^*$ 및 A를 代入하며는

$$M(\xi)=-M_T(1-\xi)+\frac{1}{6}q_T l^2\xi(1-\xi^2)$$

塑性關節說로부터

$$\left\{\begin{array}{ll} M(\xi_0) & =M_T \\ \left[\frac{dM(\xi)}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_0} & =0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll} \frac{q_T l^2}{M_T}= & \frac{6(2-\xi_0)}{\xi_0(1-\xi_0^2)} \\ \frac{q_T l^2}{M_T}= & \frac{6}{3\xi_0^2-1} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\to\xi_0^3-3\xi_0^2+1=0$ (方法 I 과 同一)

方法 III. 上限 및 下限定理

推定 $P_S<P_T<P_T$ 또는 $q_S<q_T<q_K$

動的許容 崩壞機構로부터의 上限 q_K와 分布荷重의 重心位置에 塑性關節이 形成된다고 믿을 수 있는 假定에서 $\xi_0=2/3$로 하면

$$\frac{q_K l^2}{M_T}=\frac{6(2-\xi_0)}{\xi_0(1-\xi_0^2)}=21.6$$

모우멘트分布:

$$M(\xi)=-M_T(1-\xi)+\frac{1}{6}q_T l^2\xi(1-\xi^2)$$

$$=(-1+4.6\xi-3.6\xi^3)M_T$$

最大値; $\left[\frac{dM(\xi)}{d\xi}\right]_{\xi_0=\xi_0^*}=0\to\xi_0^*=0.6526$

$\to M_{max}=M(\xi_0^*)=1.0019M_T$ ($M_{max}>M_T$!)

$M_{max}>M_T$이므로 $\xi_0=2/3$로 假定된 崩壞機構는 靜的許容이다.

$q_K\to$斷面荷重狀態는 係數 $M_{max}/M_T=1.0019$만큼 더 크다.

靜的許容狀態;

$$q_S=\frac{q_K}{M_{max}/M_T}\Rightarrow 21.559\frac{M_T}{l^2}<q_T<21.6\frac{M_T}{l^2}$$

正確한 解값: $q_T l^2/M_T=21.5757\cdots$

그림 6 에서와 같은 1次 不靜系에서는 塑性關節이 2個形成된다. 假想變位의 原理와 그림 6 의 崩壞機構로 부터

$$\delta A=P_T v\delta_T-(M_T^*)_1\delta\varphi-(M_T^*)_2 2\delta\varphi=0 \qquad (9)$$

斷面모우멘트$(M^*)_j$는 斷面形狀의 函數이므로 同一斷面形狀의 비임의 境遇에는

$$(M_T^*)_1=(M_T^*)_2=M_T \qquad (10)$$

이고 崩壞荷重 P_T에서의 假想變位 δv_T는

$$\delta v_T=(l/2)\delta\varphi \tag{11}$$

이므로 式(9)로부터

$$P_T=6\frac{M_T}{l}=6\frac{Z_p\sigma_y}{l} \tag{12}$$

幅이 b이고 높이가 $2a$인 矩形斷面의 塑性斷面係數는

$Z_p=\frac{3}{2}Z=ba^2$이므로

$$P_T=6\frac{ba^2}{l}\sigma_y \tag{13}$$

이다. 이는 塑性關節位置가 알려져 있지 않는 例로서 1次曲線의 荷重分布를 받는 1次 不靜定 비임系를 例示하였다.

여기서 固定端 및 다음에 決定되는 位置 $x=x_0$ 또는 $\xi=\xi_0$에서 塑性關節이 形成되면 崩壞荷重(또는 極限荷重) q_T에서 崩壞가 일어난다. 勿論 2個의 未知數 q_T와 ξ_0는 決定할 수 있고 앞에서 例示한 바와 같이 3가지 可能한 方法이 있다. 結局 崩壞荷重은 $P_T=10.7878(M_T/l)$이다.

이에 比하여 中央에 集中荷重을 받는 境遇에는 式(12)와 같고 兩端에 單純支持되어 있는 비임의 中央에 集中荷重을 받는 靜定系의 境遇는 1次 不靜定系와는 달리 1個의 塑性關節만이 形成되므로 崩壞荷重은 $P_T=4M_T/l$이다.

例題 II. 모서리에 集中 荷重이 作用하는 突出板의 塑性關節線과 崩壞荷重計算

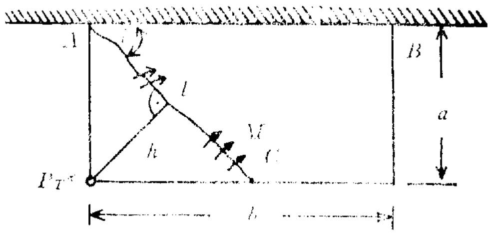


그림 8. 突出板의 塑性關節線

M; 길이 $l=a/\sin\varphi$에 對한 塑性斷面모우멘트

$h=a\cos\varphi$: 지레의 팔

모우멘트의 平衡條件으로부터 ;

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial P_T^*}{\partial\varphi}=0\\&\frac{\partial P_T^*}{\partial\varphi}=-4M\frac{\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\varphi_{opt}=\pi/4$$

$\Rightarrow P_T=P_T^*(\varphi_{opt})=2M$

한편 板의 固定端에 達한 塑性關節線을 假定하면 ;

$P_Ta=Mb\Rightarrow P_T=(b/a)M$

以上의 結果를 綜合하면 一般的으로 $b/a>2$일때는 $P_T=2M\to\varphi=\frac{\pi}{4}$(線 AC)의 塑性關節線을 갖는 崩壞機構를 形成하고, $b/a<2$일때는 $P_T=b/aM$으로 固定端 AB에 따른 塑性關節線을 갖는다.

그림 8에 表示된 矩形板에서 自由 모서리端에 集中荷重 P가 作用할 때 일어날 수 있는 崩壞機構(塑性關節線 AC)를 假定하고 最小의 崩壞荷重 P_T를 求한다. 여기서 塑性關節線에 따른 塑性斷面 모우멘트는 $M=t^2\sigma_y/4$로서 t는 板의 두께이다. 形狀比 a/b에 따라서 板의 固定端 AB에 따라 塑性關節線이 形成될 수 있고 $b/a=2$의 境遇는 두가지 崩壞機構가 同一하다.

6. 結 言

지금까지 極限解析의 理論的 背景에 따른 그의 假定 및 定理에 對하여 說明을 하였고 塑性關節說에 關하여 言及하였다.

여기서 보는바와 같이 極限解析法의 應用은 復雜한 計算도 없이 比較的 짧은 時間內에 崩壞荷重에 對한 構造物 치수를 決定하는데 効果的이다.

構造의 初期變形, 좌굴問題等 別途로 考慮해야할 事項을 留意한다면 船體構造 및 部材 解析에 極限解析法(塑性設計)을 適用하여 치수를 經濟的으로 결정할 수 있다.

이미 輕構造船 設計時 部材決定에 塑性設計를 適用하거니와 近來에 이루어지고 있는 研究는 從來의 彈性强度 概念에서 塑性强度 即 構造의 極限强度까지의 檢討를 考慮한 것이 中心으로 되고 있다.

참 고 문 헌

[1] Kazinczy, G.: Kisérletek befalazott tartókkal (양단 고정비임의 실험). Betonszemie 2, 1914 p. 68.

[2] Kist, N.C.: Leidt een Sterkteberekening, die Uitgaat Van de Evenredigheid van Kracht en Vormverandering, tot een goede. Contructie van Ijzeren Bruggen en gebouwen? Diss. Polytechnic Institute Delft 1917.

[3] Fritsche, J.: Die Tragfähigkeit von Balken aus Stahl mit Berücksichtigung des plastischen Verformungsvermögens, Bauing., 1930, H. 49, S. 851/855; H. 50, S. 873/874; H. 51, S. 888/893.

[4] Fritsche, J.: Arbeitsgesetze bei elastich-plastischer Balkenbiegung, ZAMM. 11, 1931, S.

176/191.

[5] Rinagl, F.: Über die Fließgrenzen bei Zug-und Biegebeanspruchung, Bauing. 17, 1936, H. 41/42, S. 431/441.

[6] Drucker, D.C., W. Prager and H.J. Greenberg: Extended Limit Design Theorems for Continuous Media. Quart. Appl. Math. 9 (1952), S. 381.

[7] Baker, J.F., Horne, M.R., Heyman, J.: The Steel Skeleton Vol. II: Plastic behaviour and design, Cambridge University Press 1956.

[8] Beedle, L.S.: Plastic Design of Steel Frames.

[9] Neal B.C.: Die Verfahren der plastischen Berechnung biegesteifer Stahlstabwerke, Springer, 1958.

[10] Sawczuk, A., Jaeger Th.: Grenztragfähigkeitstheorie der platten, Springer, 1963.

[11] Reckling, K.H.: Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme, Springer, 1967.

[12] Troost, A., Schaefer, D.: Vereinfachte und Verallgemeinerte Ermittlung der Durchbiegung bei gemischt elastisch-plastischer Biegung, Konstruktion 14(1962), H. 11, S. 439/441.

[13] Betten, J.: Vorlesung aus dem Institut für Werkstoffkunde der RWTH Aachen.