

論 文

大韓造船學會誌  
第18卷 第1號 1981年 3月  
Journal of the Society of  
Naval Architects of Korea  
Vol. 18, No. 1, March 1980

規則波에 놓인 球의 水平運動에 對한 解析

朴 贊 旭\* · 崔 恒 洵\*\*

On the Surge Motion of a Freely-Floating Sphere in a  
Plane Progressive Wave

by

Chan-Wook Park\* · Hang Shoon Choi\*\*

Abstract

The surge motion of a freely-floating sphere in a regular wave is studied within the framework of a linear potential theory. The fluid is assumed to be perfect and only the steady state harmonic motion in a water of infinite depth is considered.

A velocity potential describing the fluid motion is decomposed into three parts; the incident wave potential, the diffraction potential and the radiation potential. In this paper the diffraction potential and the radiation potential are analysed by using multipole expansion method.

Upon calculating pressures over the immersed surface of the sphere, the hydrodynamic forces are evaluated in terms of Froude-Krylov, diffraction, added mass and damping forces as functions of the frequency of the incident wave.

Finally the frequency dependence of two pertinent parameters, the amplitude ratio and the phase lag between the motion of the sphere and that of the incident wave is derived from the equation of motion.

As for numerical results the general tendency of the present calculation shows good agreement with Kim's work who also treated this problem utilizing the Green's function method.

1. 序 論

완전유체라는 가정하에 규칙파중에서 자유로이 부유하는 球주위의 流體 運動은 속도포텐셜  $\phi$ 로 表示할 수 있으며, 入射波의 波高  $H$ 가 波長  $\lambda$ 에 비하여 충분히 작을 경우 John [1]의 선형이론에 따라 속도포텐셜  $\phi$ 는 다음과 같이 세가지 成分으로 나눌 수 있다. 즉, 入射波를 表示하는 incident wave potential  $\phi^I$ 와 球가 平衡位置에 고정되었다는 가정하에 球의 存在효과를 나

타내는 diffraction potential  $\phi^D$  및 靜水面에서 球가 강제진동을 할 경우 그에 따른 流動을 표시하는 radiation potential  $\phi^R$  등이다.

3次元의 考察을 할 경우 가장 용이하게 취급할 수 있는 物體인 球는 선형이론에서 단지 2自由度의 運動을 갖는다. 즉, 연직운동(heave)와 수평운동(surge)이다. 또한 球의 幾何學的 배칭성으로부터 이 두가지 運動사이의 聯成(coupling)문제는 발생치 않음을 쉽게 예견할 수 있다.

관련문제를 다룬 論文으로는 Havelock [2]이 球의

接受日字: 1981年 3月 2日, 本論文에 對한 書面討論은 1981年 9月 19日까지 接受함.

\* 學生會員, 서울大學校 大學院

\*\* 正會員, 서울大學校 工科大學 造船工學科

강제연직 운동에 대한 문제를 다루었고, Barakat [3]은 規則波에 놓인 球의 연직방향에 대한 radiation과 diffraction 문제를 Ursell의 multipole expansion method를 이용하여 解析한 바 있다. 그러나 그의 數值結果는 Havelock의 결과와 상당한 차이가 있는데, Kim[4]에 의하여 Havelock의 결과가 타당함이 밝혀졌다. Kim [5]은 球로부터 타원체로 문제를 확대하여 연직운동과 수평운동 및 pitching motion을 Green's function method를 사용하여 수치적으로 계산하였다.

本 論文에서는 規則波에 놓인 球의 水平運動(surge)을 multipole expansion method를 이용하여 解析하였다. 水深은 무한히 깊다고 가정하였으며 정상상태의 주기운동(steady-state harmonic motion)만을 고려하였다. 즉, 座標系 原點에 自由表面境界條件을 만족하는 함수들을 전개시켰으며 그 값이 무한원방에서  $O(r^{-2})$  또는 그 이상으로 감소하는 점을 감안하여, radiation condition이 만족되도록 특이점을 좌표계 원점에 추가로 분포시켰다. 각각의 전개계수(expansion coefficients) 및 특이점의 세기는 球의 表面에서 運動學의(kinematic) 경계조건이 만족되도록 일련의 선형방정식으로 부터 그 값을 구하였다.

이렇게 구한 radiation potential로부터 附加質量(added mass)과 감쇠계수(hydrodynamic damping coefficient)를 계산하였고, diffraction potential로부터 水平方向의 diffraction force를 계산하였다. 이들 動流體力와 球의 質量에 따른 慣性力으로 水平運動에 대한 運動方程式을 설정하여 球의 運動과 入射波의 진폭비 그리고 位相差를 入射波의 振動數에 따른 변화량으로 구하였다.

2. 問題의 定式化

Fig. 1에 圖示한 바와 같이 球의 中心에 座標系의 原點을 설정하고 球座標系( $r, \theta, \phi$ )와 直交座標系( $x, y, z$ )

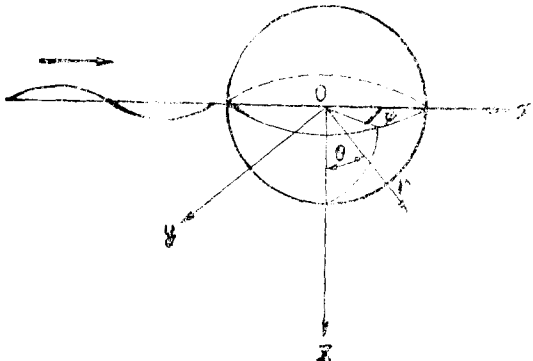


Fig. 1. Coordinate systems

를 도입하여 편의에 따라 사용키로 한다. 두 좌표계 사이에는 다음의 關係式이 成立한다.

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
 \theta &= \arccos(z/r) \\
 \phi &= \arctan(y/x)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

반경이  $r_0$ 인 球가  $z=0$ 로 표시되는 靜水面상에 半이 잠겨 있고, 波高가  $H$ 이고 周期가  $T$ 인 平面規則波가  $+x$ 軸方向으로 진행하는 경우를 생각하기로 한다. 완전유체를 가정함으로써 속도포텐셜  $\Phi$ 가 존재하게 되며, 이 속도포텐셜은 다음의 방정식과 경계조건들을 만족하여야 한다.

—연속방정식

$$\nabla^2 \Phi = 0 \text{ (in fluid domain)} \tag{2}$$

여기서  $\nabla$ 은 gradient를 표시한다.

—海底境界條件

$$\Phi_z \rightarrow 0 \text{ (as } z \rightarrow \infty) \tag{3}$$

여기서  $\Phi$ 의 이렛자  $z$ 는 이에 대한 편미분을 뜻한다.

—自由表面境界條件

$$\begin{aligned}
 \Phi_{tt} + 2\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi_t + \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla(\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) - g\Phi_z = 0 \\
 (z = \zeta(x, y, t))
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

여기서  $g$ 는 중력가속도를, 그리고  $\zeta$ 는 자유표면의 變位를 뜻하며 이는 Bernoulli방정식으로 부터 얻을 수 있다.

—球表面에서의 運動學의 境界條件

$$\nabla\Phi \cdot \bar{n} = \bar{v} \cdot \bar{n} \tag{5}$$

여기서  $\bar{n}$ 은 球表面에서의 外向單位法線벡터(outward unit normal vector)이며  $\bar{v}$ 는 球의 속도벡터이다.

—radiation condition  
즉 속도포텐셜은 평면진행파 및 무한원방에서  $O(R^{-1/2})$ 로 감쇠하며 사방으로 전파되어 가는 散산파를 나타낼 수 있어야 한다( $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ).

이상의 문제는 古典船舶流體力學에서 잘 알려진 경계치 문제(potential boundary-value problem)으로서 入射波의 진폭이 파장에 비해 작다는 가정에서 문제를 선형화하여 속도포텐셜을 다음과 같이 세가지 成分으로 분리하여 표시할 수 있다.

$$\Phi = \Phi^I + \Phi^D + \Phi^R \tag{6}$$

첫項인 incident wave potential  $\Phi^I$ 는 다음과 같이 표시하며

$$\begin{aligned}
 \Phi^I(x, y, z, t) &= \text{Re}[-i\sigma\eta_0\phi^i(x, y, z)e^{-i\sigma t}] \\
 \text{여기서 } \phi^i(x, y, z) &= -\frac{g}{\sigma^2}e^{-k_0z} \cdot e^{ik_0x}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

이로부터 파수(wave number)가  $k_0(-2\pi/\lambda - \sigma^2/g)$ 이고 진폭이  $\gamma_0$ 인 선형중력파(linear gravity wave)를 얻는다.

$$\eta(x, t) = \frac{1}{g} \phi'_t(z=0) = \text{Re}[\gamma_0 e^{i(k_0 x - \sigma t)}] \quad (8)$$

Transient disturbance가 사라진 뒤, 球의 周期的인 水平運動은

$$x(t) = \text{Re}[x_0 e^{-i\sigma t} e^{-i\epsilon_x t}] \quad (9)$$

로 표시될 수 있으며  $\epsilon_x$ 는 位相差를 의미한다.

이와 마찬가지로 diffraction potential  $\Phi^D$ 와 radiation potential  $\Phi^R$ 도 시간에 따른 주기함수로 생각할 수 있다.

$$\Phi^D(x, y, z, t) = \text{Re}[-i\sigma\gamma_0\phi^d(x, y, z)e^{-i\sigma t}] \quad (10)$$

$$\Phi^R(x, y, z, t) = \text{Re}[-i\sigma x_0\phi^1(x, y, z)e^{-i\sigma t}] \quad (11)$$

여기서  $\phi^1$ 은 단위진폭의 속도를 갖는 강제수평운동에 대한 복소수형태의 위치포텐셜(position potential)을 의미한다.

전술한  $\phi^d$ 와  $\phi^1$ 이 만족해야 할 방정식과 선형화된 경계조건들을 정리하면 다음과 같다.

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (12)$$

$$\phi_z \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty) \quad (13)$$

$$k_0\phi + \phi_z = 0 \quad (z=0) \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|_{r=r_0} = h(x, y, z) \quad (15)$$

$\phi^d$ 에 대해서는

$$h(x, y, z) = -\left. \frac{\partial\phi^d}{\partial r} \right|_{r=r_0} = (-\cos\theta + i\sin\theta \cdot \cos\phi) \cdot e^{\beta(1-\cos\theta) + i\sin\theta \cdot \cos\phi} \quad (16)$$

이 되며,  $\beta$ 는 球의 반경  $r_0$ 로 무차원화시킨 파수로서  $\beta = kr_0 = (\sigma^2/g)r_0$ 의 값을 갖는다. 또한  $\phi^1$ 에 대해서는

$$h(x, y, z) = n_x + i\sin\theta \cos\phi \quad (17)$$

을 사용하여야 한다.

한편 무한원방에서

$$\phi \sim q(\phi) e^{-k_0 z} \cdot e^{i k_0 R} \cdot O(R^{-1/2}) \quad (18)$$

이 되며, 여기서  $q(\phi)$ 는 水面上의 方向을 표시하는 角  $\phi$ 의 함수다.

### 3. 解의 表示

#### 3.1 Wave-Free Potentials

Wave-free potential은 연속방정식과 해저경계조건 (13) 및 선형화된 자유 표면 경계 조건(14)를 만족하는 2종의 기본해의 결합으로 나타나는 속도 포텐셜이다 (Barakat, 1962).

$$M_{2n}^{2m} = \left[ \frac{P_{2n}^{2m}(\mu)}{r^{2n+1}} + \frac{k_0 P_{2n-1}^{2m}(\mu)}{2(n-m)r^{2n}} \right] \cdot \cos 2m\phi$$

$$\begin{pmatrix} n=1, \dots, \infty \\ m=0, \dots, n-1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$N_{2n}^{2m-1} = \frac{P_{2n+1}^{2m-1}(\mu)}{r^{2n+2}} + \frac{k_0 P_{2n}^{2m-1}(\mu)}{2(n-m+1)r^{2n+1}} \times \cos(2m-1)\phi \begin{pmatrix} n=1, \dots, \infty \\ m=1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (20)$$

여기서  $\mu = \cos\theta$ 이며  $P_j^i(\mu)$ 는 order  $j$ , degree  $i$ 의 associated Legendre function을 표시한다. 상기  $M_{2n}^{2m}$ 과  $N_{2n}^{2m-1}$ 은 비직교 조화함수(nonorthogonal harmonic function)들로서 Havelock(1965)의 표현 방식에 따라 wave-free potential이라 정의하였다.

Wave-free potential은 구와 인접된 부분에서의 유체 유동을 표시하는 속도 포텐셜로서 구로부터 멀어질수록  $O(R^{-2})$  또는 그 이상으로 줄어든다. 따라서 radiation condition은 만족시키지 못한다.

#### 3.2 Wave Potentials

Wave-free potential이 radiation condition에 대한 미 있는 해인 점을 감안, 자유표면 경계조건 및 무한원방에서 요구되는 유체 유동을 나타내며 Laplace 방정식을 만족하는 특이해를 첨가할 필요가 생긴다. Thorne [6]은 무한 수심인 경우  $(0, 0, f)$ 에 위치한 단 위 세기의 특이해에 대한 일반적인 표현식을 다음과 같이 유도한 바 있다.

$$G = \left[ \frac{P_n^m(\mu)}{r^{n+1}} - \frac{(-1)^{n+m-1}}{(n-m)!} \cdot PV \int_0^\infty \frac{k+k_0}{k-k_0} k^n e^{-k(z+f)} J_m(kR) dk \right] \cdot \cos m\phi - \frac{(-1)^{n+m-1}}{(n-m)!} \cdot 2\pi i k_0^{n+1} e^{-k_0(z+f)} J_m(k_0 R) \cdot \cos m\phi \begin{pmatrix} n=0, \dots, \infty \\ m=0, \dots, n \end{pmatrix} \quad (21)$$

여기서  $J_m$ 은 order  $m$ 인 제 1종의 Bessel function을 표시하며 積分項은 Cauchy의 principal-value integral을 의미한다.

본 문제를 다룰 때는 임의의  $n, m$ 에 대한 고려는 필요없으며, 단지  $n=m$ 인 경우만을 필요로 하고 특히  $f=0$ 일 경우 특이해는 다음의 표현식을 갖는다.

$$G|_{f=0} = \left[ G_1^m + iG_2^m \right] \cdot \cos m\phi \quad (22)$$

여기서  $G_1^m$ 은  $m$ -order의 극부적인 유체의 진동운동 (spatially local oscillating motion)을  $G_2^m$ 은 무한원방으로 발산하는 파를 내포하고 있으며, 이들의 표현식은 다음과 같다.

$$G_1^m = \frac{P_m^m(\mu)}{r^{m+1}} + PV \int_0^\infty \frac{k+k_0}{k-k_0} k^m e^{-kz} \cdot J_m(kR) dk \quad (23)$$

$$G_2^m = 2\pi k_0^{m+1} e^{-k_0 r} J_m(k_0 R) \quad (24)$$

본 논문에서 직접 사용한 윗식의 변형된 형태는 부록에 기재하였다.

**3.3 강제수평운동 (Forced Surge Motion)**

강제수평운동에 기인하는 속도포텐셜  $\phi^1$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi^1 = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (C_n^m + iD_n^m) r^{2n+2} \cdot M_{2n}^{2m}(r, \mu, \phi) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (E_n^m + iF_n^m) \times r_0^{2n+3} N_{2n}^{2m-1}(r, \mu, \phi) + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} (S_1^m + iS_2^m) r_0^{m+2} \times [G_1^m(r, \mu) + \\ & + iG_2^m(r, \mu)] \cdot \cos m\phi \end{aligned} \quad (25)$$

함수  $M_{2n}^{2m}$ ,  $N_{2n}^{2m-1}$ 은 식 (19, 20)에서 정의한대로 wave-free potential이며 미지전계계수  $C_n^m$ ,  $D_n^m$ ,  $E_n^m$ ,  $F_n^m$  및 wave potential의 세기  $S_1^m$ ,  $S_2^m$ 은  $\phi^1$ 에 대한 물체포면에서의 경계조건 (17)을 만족하도록 결정한다. 즉, 윗식을 식 (15) 및 (17)에 대입하면 다음과 같은 관계식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = & \sum_{m=0}^{\infty} (S_1^m + iS_2^m) \left[ r_0^{m+2} \frac{\partial G_1^m}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + \right. \\ & \left. + i r_0^{m+2} \frac{\partial G_2^m}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right] \cos m\phi - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (C_n^m + iD_n^m) \left[ (2n+1) P_{2n}^{2m}(\mu) + \right. \\ & \left. + \frac{2n}{2(n-m)} \beta P_{2n-1}^{2m}(\mu) \right] \cdot \cos 2m\phi - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (E_n^m + iF_n^m) \times \left[ (2n+2) P_{2n+1}^{2m-1}(\mu) + \right. \\ & \left. + \frac{(2n+1)}{2(n-m+1)} \beta P_{2n}^{2m-1}(\mu) \right] \cdot \cos(2m-1)\phi \\ = & \sqrt{1-\mu^2} \cdot \cos\phi \end{aligned} \quad (26)$$

본 논문의 목적은 포텐셜 자체에 있지 않고 유체유동으로 인해 물체에 가해지는 수평방향의 힘의 계산에 있다. 따라서 단지  $S_1^m$ ,  $S_2^m$ ,  $E_n^m$ ,  $F_n^m$ 의 값만을 구하면 된다. 이 사실은 수평방향의 힘을 계산하는 과정에서 쉽사리 파악할 수 있다.

Cosine함수의 직교성을 감안, 식 (26)에 나타나는 2종의 함수를 단순한 함수로 변형시킬 수 있다. 즉 (26)식의 양변에  $\cos\phi d\phi$ 를 곱하여 0에서  $2\pi$ 까지 적분하면 다음식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} (S_1^1 + iS_2^1) \left[ r_0^3 \frac{\partial G_1^1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + i r_0^3 \frac{\partial G_2^1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} (E_n^1 + iF_n^1) \times \left[ (2n+2) P_{2n+1}^1(\mu) + \right. \\ \left. + \frac{(2n+1)}{2n} \beta P_{2n}^1(\mu) \right] = \sqrt{1-\mu^2} = P_1^1(\mu) \end{aligned} \quad (27)$$

이제 미지계수들의 값을 결정하기 위하여 윗식의 양변에 함수  $O_j^1$ 를 곱하여  $\mu$ 에 대하여 0에서 1까지 적분하면 일련의 연립방정식들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} S_1^1 L_j^1 - S_2^1 L_j^2 - \sum_{n=1}^{\infty} E_n^1 \cdot I_{nj} = I_j^* \\ S_1^1 L_j^2 + S_2^1 L_j^1 - \sum_{n=1}^{\infty} F_n^1 \cdot I_{nj} = I_j^{**} \\ (j=0, 1, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (28)$$

함수  $O_j^1$ 는 다음과 같이 정의되어지고

$$\begin{aligned} O_j^1 = \begin{cases} 2P_1^1(\mu) & (j=0) \\ (2j+2)P_{2j+1}^1(\mu) + \frac{(2j+1)}{2j} \beta P_{2j}^1(\mu) & (j=1, \dots, \infty) \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

식 (28)에 나타나는 다른 함수들은 다음의 표현식을 갖는다.

$$L_j^1 = \int_0^1 r_0^3 \frac{\partial G_1^1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} O_j^1 d\mu \quad (30)$$

$$L_j^2 = \int_0^1 r_0^3 \frac{\partial G_2^1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} O_j^1 d\mu \quad (31)$$

$$I_{nj} = \int_0^1 O_n^1 O_j^1 d\mu \quad (32)$$

$$I_j^* = \int_0^1 P_1^1(\mu) O_j^1 d\mu \quad (33)$$

$$I_j^{**} = 0 \quad (34)$$

식 (30)과 (31)에 들어있는

$$r_0^3 \frac{\partial G_i^1}{\partial r} \Big|_{r=r_0}$$

항은 부록에 좀 더 상세히 설명되어 있다.

**3.4 Diffraction Problem**

Diffraction potential  $\phi^d$ 의 형태는  $\phi^1$ 에 대한 식 (25)와 같이 취하게 되나, 단지 전계계수 및 특이해의 세기는 강제수평운동이 아닌  $\phi^d$ 에 유효한 경계조건식 (16)이 만족되도록 결정되어야 한다. 이 점을 제외하고는  $\phi^1$ 에 대한 과정과 전혀 똑같은 과정을 통하여 diffraction potential을 구하게 된다.

Diffraction force는 이 포텐셜로부터 얻게되는데 이 경우 또한 강제수평운동에서와 마찬가지로 diffraction

potential에 대한  $S_1^1, S_2^1$  그리고  $E_n^1, F_n^1$ 의 값만이 실질적으로 의미를 갖는다. 이들 미지수를 결정하는 연립방정식의 우변의 항들이 이제는 다음과 같이 된다 (식 28, 33 그리고 34 참조).

$$I_j^* = \int_0^1 Re[h(\mu, \beta)] O_j^1 d\mu = 0 \quad (35)$$

$$I_j^{**} = \int_0^1 I_m[h(\mu, \beta)] O_j^1 d\mu \quad (36)$$

여기서

$$h(\mu, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-\mu + i\sqrt{1-\mu^2} \cos\phi) \times e^{\beta(-\mu + i\sqrt{1-\mu^2} \cos\phi)} \cos\phi d\phi \quad (37)$$

이 적분을 수행하면 실수부는 0이 되고 허수부는 다음과 같이 된다[7].

$$I_m[h(\mu, \beta)] = 2e^{-\beta\mu} [\sqrt{1-\mu^2} J_0(\beta\sqrt{1-\mu^2}) - (\mu + \frac{1}{\beta}) J_1(\beta\sqrt{1-\mu^2})] \quad (38)$$

#### 4. 動流體力

Bernoulli 方程式으로부터 流體壓力  $p$ 는

$$p = -\rho(\Phi_t + \frac{1}{2} \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi - gz) \quad (39)$$

로 표시되며 球에 가해지는 유체력의 水平方向 成分은

$$F_x = \iint_S p n_x dS \quad (40)$$

가 된다.

선형이론에서는 고차항을 무시하고, 또한 순간적인 위치에서의 球의 침수표면  $S$ 에 대한 平衡位置에서의 球의 침수표면  $S_0$ 에 대하여 적분을 수행한다.

이제 식 (6)을 윗식에 대입하면

$$F_x = -\rho \iint_{S_0} (\Phi^I + \Phi^D + \Phi^R)_t n_x dS \quad (41)$$

의 결과를 얻는다.

##### 4.1 부가질량과 감쇠력

Radiation potential로부터 계산되는 동유체력은 球의 강제진동에 연관된 가속도와 속도의 위상을 갖는 성분으로 구분할 수 있다. 전자는 부가질량, 후자는 감쇠력이라 정의된다.

$$F_x^R = -\rho \iint_{S_0} \Phi_t^R n_x dS = \Delta m_x \ddot{x}(t) + b_x \dot{x}(t) \quad (42)$$

이로부터 부가질량  $\Delta m_x$ 는

$$\Delta m_x = -\rho r_0^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} Re[\phi^1] \sin^2\theta \cos\phi d\phi d\theta \quad (43)$$

가 되며  $\rho r_0^3$ 으로 무차원화시킨 부가질량 계수  $\Delta m_x'$ 는

$$\Delta m_x' = \Delta m_x / \rho r_0^3 = - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} Re[\phi^1 / r_0] \times$$

$$\times \sin^2\theta \cos\phi d\phi d\theta \quad (44)$$

이다.

또한 감쇠력은

$$b_x = -\rho \sigma r_0^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_m[\phi^1] \sin^2\theta \cos\phi d\phi d\theta \quad (45)$$

로 표시되고  $\rho \sigma r_0^3$ 으로 무차원화시킨 동유체감쇠계수  $b_x'$ 는

$$b_x' = b_x / \rho \sigma r_0^3 = - \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_m[\phi^1 / r_0] \sin^2\theta \cos\phi d\phi d\theta \quad (46)$$

로 얻어진다.

윗식에서 알수 있듯이  $\phi^1$ 에 대한 표현식에서  $\cos m\phi$  ( $m \neq 1$ )을 포함하고 있는 항들은 동유체력에 기여하지 못한다.

$\phi^1$ 에 대한 표현식 (25)를 식(44)와 (46)에 대입하면 수치계산을 위한 최종식으로 나타낼 수 있다.

$$\Delta m_x' = -\pi \left[ \sum_{n=1}^{\infty} E_n^1 I_n + S_1^1 K_1 - S_2^1 K_2 \right] \quad (47)$$

$$b_x' = -\pi \left[ \sum_{n=1}^{\infty} F_n^1 I_n + S_2^1 K_1 + S_1^1 K_2 \right] \quad (48)$$

여기서

$$I_n = \int_0^1 \left[ P_{2n+1}^1(\mu) + \frac{\beta}{2n} P_{2n}^1(\mu) \right] \sqrt{1-\mu^2} d\mu$$

$$K_1 = \int_0^1 r_0^2 G_1^1 \Big|_{r=r_0} \sqrt{1-\mu^2} d\mu$$

$$K_2 = \int_0^1 r_0^2 G_2^1 \Big|_{r=r_0} \sqrt{1-\mu^2} d\mu$$

로 표시되는 적분치이며  $r_0^2 G_1^1 \Big|_{r=r_0}$ 와  $r_0^2 G_2^1 \Big|_{r=r_0}$ 는 부록에 제시한  $G_1^1$ 과  $G_2^1$ 의 표현식을 이용하여 십사리 계산

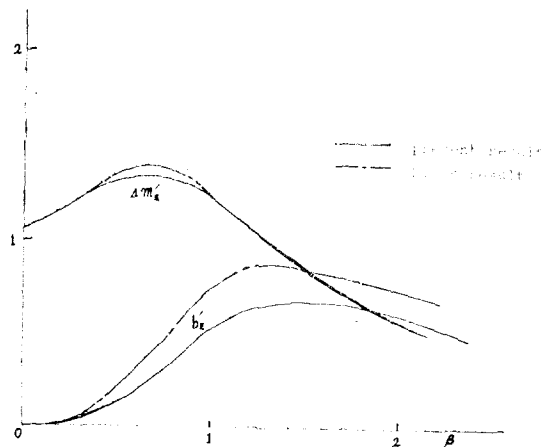


Fig. 2. Added mass and hydrodynamic damping coefficients of a surging sphere

되어진다.

$\beta$ 에 따른  $\Delta m_x'$ 와  $b_x'$ 의 수치결과를 Fig. 2에 Kim의 결과와 함께 도시하였다.

4.2 Diffraction Force

수평방향으로 작용하는 diffraction force는 Haskind-Newman 관계식을 이용할 수도 있으나 本論文에서는 이 관계식을 利用하지 않고 부가질량과 감쇠력을 구하는 방법과 같은 과정을 거쳐 직접 계산하였다.

식(41)의 둘째項으로 표시되는 diffraction force도 水面變位の 加速度와 速度的 위상을 갖는 두 成分으로 나눌 수 있다.

$$F_x^D = -\rho \iint_{S_0} \Phi_i^D n_x dS = c_x \dot{\eta}(t) + d_x \ddot{\eta}(t) \quad (49)$$

즉  $\dot{\eta}(t)$ 의 위상에서 작용하는 diffraction force  $c_x$ 는

$$c_x = -\rho r_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \text{Re}[\phi^d] \sin^2 \theta \cos \phi d\phi d\theta \quad (50)$$

이며  $\ddot{\eta}(t)$ 의 위상에서 작용하는  $d_x$ 는

$$d_x = -\rho \sigma r_0^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_m[\phi^d] \sin^2 \theta \cos \phi d\phi d\theta \quad (51)$$

가 된다.

두차원화하기 위하여  $c_x$ 는  $\rho r_0^2$ 으로  $d_x$ 는  $\rho \sigma r_0^3$ 으로 나누고 수치계산은 부가질량계수와 감쇠력계수에 대한 식(47) 및 (48)과 동일한 표현식을 사용하되, 단지 전개계수  $E_n^1, F_n^1$ 과 특이점의 세기  $S_1$ 과  $S_2$ 는 diffraction potential에 유효한 값으로 대치하여야 한다. Fig. 3에 이들의 수치결과를 보여주고 있다.

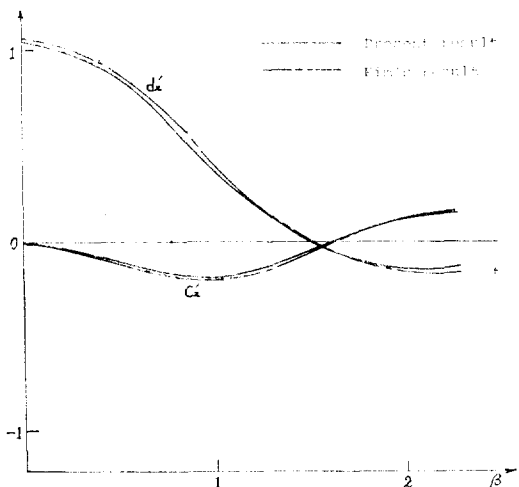


Fig. 3. Dimensionless diffraction forces in the horizontal direction

4.3 Froude-Krylov Force

入射波가 球에 의하여 攪란되는 效果를 고려하지 않

고 流體粒子的 加速運動으로 因하여 球에 作用하는 動流體力를 말하며, 水平方向成分은

$$F_x^{FK} = -\rho \iint_{S_0} \Phi_i^i n_x dS = e_x \dot{\eta}(t) + f_x \ddot{\eta}(t) \quad (52)$$

와 같이 두 成分으로 다시 나눌 수 있다.

$\dot{\eta}(t)$ 의 位相으로 作用하는  $e_x$ 는 0이 되어 Froude-Krylov force는  $\ddot{\eta}(t)$ 의 位相에서만 다음의 크기로 作用함을 알 수 있다.

$$f_x = -\rho \sigma \iint_{S_0} I_m[\phi^i] n_x dS = \frac{2\pi \rho g r_0^2}{\sigma} \int_0^1 e^{-\beta \mu} J_1(\beta \sqrt{1-\mu^2}) \sqrt{1-\mu^2} d\mu \quad (53)$$

다른 유체력과의 비교를 위하여  $f_x$ 를  $\rho \sigma r_0^2$ 으로 나누어 두차원의 값  $f_x'$ 으로 만든다.

球의 運動을 야기시키는 유체기진력인 이 힘과 diffraction force를 Fig. 4에 비교하여 도시하였다.

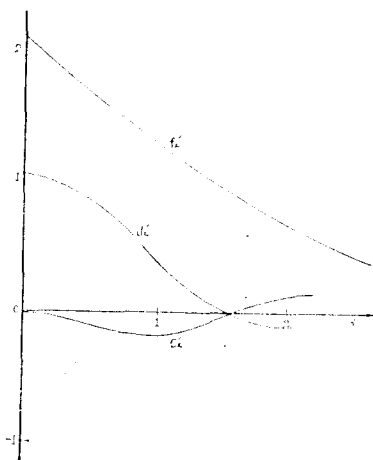


Fig. 4. Dimensionless wave exciting forces in the horizontal direction

5. 運動方程式

本論文의 目的은 規則波에 놓인 球의 運動특성을 고찰함에 있다. 처음 波가 球에 접근하여오면 球는 高 유진동수로 transient motion을 하지만 곧 入射波의 周期로 運動하게 되는 정상상태에 도달하게 된다. 따라서 문제는 球의 運動과 入사파간의 진폭비와 위상차의 결정으로 귀착되는데, 이 값들은 다음의 運動방정식으로 부터 구하게 된다. 球에 가해지는 모든 힘들의 합은 물체의 관성력과 같아야 한다.

$$m \ddot{x}(t) = F_x = F_x^R + F_x^{FK} + F_x^D \quad (54)$$

여기서  $m$ 은 球의 質量이다.

앞章의 結果를 式(8)에 代入하면

$$(m + \Delta m_x)\ddot{x}(t) + b_x \dot{x}(t) = c_x \ddot{\eta}(t) + (d_x + f_x)\dot{\eta}(t) \quad (55)$$

와 같이되고 식(8)과(9)를 式(55)의  $\eta(t)$  및  $x(t)$ 에 代入하면 진폭비는

$$\frac{x_0}{\eta_0} = \left| \frac{-\sigma^2 c_x - i\sigma(d_x + f_x)}{-\sigma^2(m + \Delta m_x) - i\sigma b_x} \right| = |X_1 + iX_2| \quad (56)$$

와 같고 위상차는 아래와 같다.

$$\epsilon_x = \arctan(X_2/X_1) \quad (57)$$

수치계산의 結果를 Fig. 5에 도시하였다.

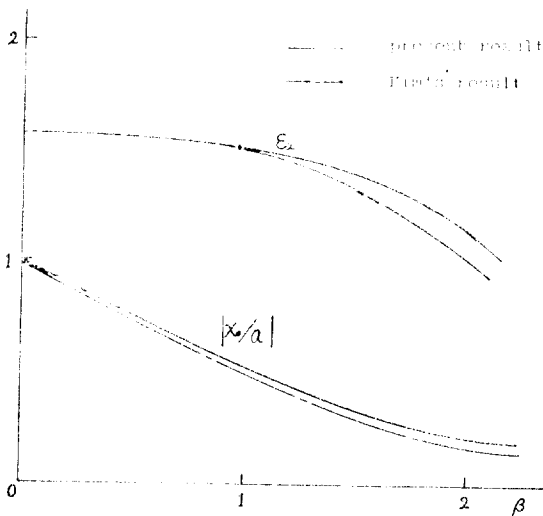


Fig. 5. Amplitude ratio and phase lag of the surge motion of a freely-floating sphere

### 6. 數值計算 및 討論

일반적인  $\beta$ 의 값에 대한 수치계산을 수행하기 전에 우선 입사파의 파장이 매우 긴 경우, 즉  $\beta \rightarrow 0$ 인 극한 경우를 해석적으로 살펴보고자 한다. Radiation potential을 구하는 식(28)에서 적분항들은 부록(A3) 및(A4)에 표시한 바와 같이 다음과 같은 극한수렴치를 갖는다.

$$L_j^1 \rightarrow -6 \int_0^1 \sqrt{1-\mu^2} O_j d\mu$$

이 적분을 수행하면

$$L_0^1 = -8, L_1^1 = -\frac{27}{2}\beta, L_2^1 = 75\beta, \dots$$

가 되고

$$L_j^2 = 0 \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

임을 알 수 있다. 또한

$$I_j^{*'} = I_0^{*'} = \frac{4}{3}, I_1^{*'} = \frac{9}{8}\beta, I_2^{*'} = -\frac{25}{48}\beta, \dots$$

가 되므로 결국  $\beta \rightarrow 0$ 에 대하여 다음의 결과를 얻게 된다.

$$S_1^1 = -\frac{1}{6}, S_2^1 = 0, E_n^1 = F_n^1 = 0$$

이 계산결과를 이용하여 부가질량계수와 감쇠계수를 구하면 식(47)과(48)에서  $K_1 = 2$ 이므로 부가질량계수와 감쇠계수는

$$\Delta m_x' = \frac{\pi}{3}, b_x' = 0 \text{와 같다.}$$

2차원의 문제와는 달리 3차원의 문제에서는  $\beta = 0$ 에서 부가질량계수가 유한함을 확인할 수 있고, Kim[5]의 수치계산결과도 대략  $\Delta m_x = 1.05$ 이어서 본논문의 해석의 정확성을 간접적으로 입증할 수 있다.

Diffraction potential을 구하는 과정은 전술한 바와 같이 radiation potential의 경우와 동일하나, 단지 물체 표면에서의 경계조건이 다르다. 즉 radiation potential을 결정할 식(28)에서 미지수  $S_1^1, S_2^1$ 과  $E_n^1, F_n^1$ 을 이제는 diffraction potential에 대한 특이점의 세기 및 전개계수라 간주하고 우변의  $I_j^{*'}, I_j^{**}$  대신 (35)와(36)식으로 주어진 표현식으로 대체하여야 한다.

$\beta \rightarrow 0$ 일 경우 order 1과 2의 제 1종 Bessel함수는

$$J_0(x) \rightarrow 1, J_1(x) \rightarrow \frac{1}{2}x$$

에 수렴하므로  $I_j^{**}$ 는 다음과 같이 되어

$$I_j^{**} \rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-\mu^2} O_j d\mu$$

$$I_0^{**} = \frac{4}{3}, I_1^{**} = \frac{9}{8}\beta, I_2^{**} = -\frac{25}{48}\beta, \dots$$

의 결과가 된다. 결국  $\beta \rightarrow 0$ 일때 diffraction potential을 결정하는 미지계수들의 값은

$$S_1^1 = 0, S_2^1 = -\frac{1}{6}, E_n^1 = F_n^1 = 0$$

이 되어 diffraction force coefficients는

$$c_x' = c_x / \rho r_0^3 = 0, d_x' = d_x / \rho \sigma r_0^3 = \frac{\pi}{3}$$

이된다. 이 결과는  $\dot{\eta}(t)$ 의 위상에서 작용하는 diffraction force coefficient  $d_x'$ 가  $\beta = 0$ 에서 부가질량계수의 값과 같음을 말해준다. Kim도 같은 값을 주고있다.

한편  $\beta \rightarrow 0$ 일때 Froude-Krylov force는 식(53)으로부터

$$f_x' = f_x / \rho \sigma r_0^3 = -\frac{2\pi}{\beta} \int_0^1 e^{-\beta\mu} J_1(\beta\sqrt{1-\mu^2}) \sqrt{1-\mu^2} \times d\mu \rightarrow \pi \int_0^1 (1-\mu^2) d\mu = \frac{2}{3}\pi \text{가 된다.}$$

이로부터  $\beta \rightarrow 0$ 일때 Froude-Krylov force와 diffraction

force는 같은 위상에서 작용함을 알 수 있고, 또한 Froude-Krylov force가 diffraction force보다 두배나 큼을 알 수 있다. 즉 Froude-Krylov force는 球의 mass force와 diffraction force는 added mass force과 그 크기가 각각 같다는 것을 의미한다. 일반적인  $\beta$ 의 값에 대한 수치계산은  $\beta=0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0$ 에 대하여 수행하였으나  $\beta=3$ 에 대하여는 수치적분의 수렴상태가 매우 나빠져 계산에서 제외시켰다.

일련의 연립방정식으로부터 전개계수 및 특이점의 세기를 구할 때 전개계수항을 10항, 5항, 3항을 취하여 결과를 비교하였으나 수치결과의 차이가 매우 미소하여 계산시간을 단축하기 위하여 전개계수는 모든  $\beta$ 에 대하여 첫 3항만을 취하였다.

수치적분은 Gauss적분법을 사용하였으며  $N=40, N=24, N=20$ 에 대하여 수렴도를 조사한 결과 보통의  $\beta$ 값에 대하여는  $N=24$ 이 적당함이 밝혀졌고  $\beta$ 가 커짐에 따라 수렴상태가 나빠지는 경향이 있으나 계산의 편의를 위하여 계산된 모든  $\beta$ 값에 대하여  $N=24$ 로 일정하게 택하였다.

부가질량계수와 감쇠력계수의 결과는 Kim의 결과와 무시할 수 없는 차이를 보이고 있어 수치계산을 좀 더 정밀하게 수행할 필요가 있다고 사료된다.

무차원화시킨 확산력 계수  $c_x'$ 과  $d_x'$ 은 서로 부호가 반대임을 알 수 있고 대략  $\beta=1.5$ 근처에서 작용하는 위상이 바뀌어짐을 볼수있다.

$\beta$ 에 따른 진폭비는 Kim의 결과와 비슷하며 위상차도 Kim의 결과와 비슷하다. Fig.5에서는 Kim의 결과와 비교하기 위하여 본논문의 결과를 도시하였다.

## 7. 結 論

본 논문에서는 Barakat이 전개한 multipole expansion method를 이용하여 규칙파에 놓인 球의 수평운동을 해석하였다. Green's function method를 사용한 Kim의 결과와 비교할 때 대체로 일치하는 경향을 보이고 있으나 수치상의 차이가 있다. 이는 본 논문에서 사용한 Gauss적분법이  $\beta$ 의 값에 따라 수렴문제가 완전히 해결되지 못한점에 기인되었으리라 생각된다.

본 논문에서 전개한  $\beta=0$ 에서의 해석적 결과와  $\beta=0.05$  및  $\beta=0.1$ 에 대한 수치계산 결과가 부드럽게 연결되어져 본 논문의 수치계산 결과를 최소한 작은 값의  $\beta$ 의 범위에서는 인정할 수 있다.

한편 연직운동의 경우와는 달리 수평운동에서는

diffraction force의 대부분과 Froude-Krylov force가 같은 위상에서 작용한다는 사실을 지적하고자 한다.

끝으로 서울대학의 黃宗屹教授와 나눈 많은 討論이 본 논문의 작성에 크게 도움이 되었으며 수치계산은 서울대학교 전산실의 IBM370과 한국과학기술연구소 CDC-CYBER 기종을 사용하였음을 附記한다.

## 참 고 문 헌

- [1] John, F., "On the Motion of Floating Bodies-I" Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 2, 1949.
- [2] Havelock, T.H., "Waves due to a Floating Sphere Making Periodic Heaving Oscillations" Proceedings of the Royal Society, London, England, Vol. 231, series A, 1955, pp.1-7.
- [3] Barakat, R., "Vertical Motion of a Floating Sphere in a Sine-Wave Sea" Journal of Fluid Mechanics, Vol. 13, 1962, pp.540-556.
- [4] Kim, W.D., "On the Harmonic Oscillation of a Rigid Body on a Free Surface" Journal of Fluid Mechanics, Vol. 21, 1965a, pp.427-451.
- [5] Kim, W.D., "On a Free-Floating Ship in Waves" Journal of Ship Research, Vol. 10, 1965b, pp. 182-200.
- [6] Thorne, R.C., "Multipole Expansion in the Theory of Surface Waves" Proc. Cambridge Phil. Soc. Up. 1953, pp.707-716.
- [7] Abramowitz, M. and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ., Inc., 1965.

## 부 록

본 논문에서 사용한 주기적으로 용출하는 특이점 (periodically pulsating source)의 속도 포텐셜의 표현식은 다음과 같다(Barakat 참조).

$$G_1^+(r, \theta) = \frac{3\sin\theta}{r^2} - 2\pi k_0^2 e^{-k_0 r \cos\theta} Y_1(rsin\theta) + \pi k_0^2 e^{-k_0 r \cos\theta} [H_{-1}(k_0 rsin\theta) - Y_{-1}(k_0 rsin\theta)] - \frac{k_0^2}{2} \tan\theta \sec\theta e^{-k_0 r \cos\theta} \int_0^1 (t^2 + \tan^2\theta)^{-3/2} e^{tk_0 r \cos\theta} dt \quad (A1)$$

$$G_2^+(r, \theta) = 2\pi k_0^2 e^{-k_0 r \cos\theta} J_1(k_0 rsin\theta) \quad (A2)$$



여기서  $Y_m$ 은 order  $m$ 인 제 2종의 Bessel함수를, 그리고  $H_{-1}$ 은 order  $-1$ 인 Struve함수를 나타낸다.

Radiation potential과 diffraction potential을 결정하기 위하여 필요한 계산에 나타나는 식 (30)과 (31)에는  $r=r_0$ 에서의

$$r_0^3 \frac{\partial G_1^1}{\partial r} \text{과 } r_0^3 \frac{\partial G_2^1}{\partial r} \text{을 계산하여야 한다.}$$

본 논문에서 사용한 관계식은 다음과 같다.

$$r_0^3 \frac{\partial G_1^1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = -6 \sqrt{1-\mu^2} - \pi \beta^3 e^{-\beta \mu} \left[ \frac{2}{\pi} \mu + \right.$$

$$\begin{aligned} &+ \{ Y_0(\beta \sqrt{1-\mu^2}) + H_0(\beta \sqrt{1-\mu^2}) \} \sqrt{1-\mu^2} - \\ &- \{ Y_1(\beta \sqrt{1-\mu^2}) + H_1(\beta \sqrt{1-\mu^2}) \} \left( \mu + \frac{1}{\beta} \right) \Big] + \\ &+ \frac{\beta^3}{2} \mu^2 \sqrt{1-\mu^2} e^{-\beta \mu} \int_0^1 \frac{(1-t) e^{t \beta \mu}}{(1-\mu^2+t^2 \mu^2)^{3/2}} dt \end{aligned} \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} r_0^3 \frac{\partial G_2^1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} &= 2\pi \beta^2 e^{-\beta \mu} [ \beta \sqrt{1-\mu^2} J_0(\mu \sqrt{1-\mu^2}) - \\ &- (\beta \mu + 1) J_1(\beta \sqrt{1-\mu^2}) ] \end{aligned} \quad (A4)$$