

# Tubular Motor의 磁束分布 特性 解析을 위한 有限要素法 適用研究

論	文
30~12~1	

## A Study on the Application of Finite Element Method to Analysis of the Magnetic Flux Distribution Characteristics of the Tubular Motor

任 達 鎬\* · 任 泰 彬\*\*  
(Dal-Ho Im · Tae-Bin Im)

### Abstract

In this paper, the finite element method is applied to find the flux distribution of the magnetic field in the end region of the tubular motor.

In order to analyze two-dimensional flux distribution, the r-z domain to be analyzed is subdivided into 56 nodes, 84 elements. In the case of  $\omega t=0$  and  $\pi/2$ , the flux distribution is shifted to the edge with frequency ( $\omega$ ) and time ( $t$ ) increase in the edge and the air gap. It is proved that this study does fit the actual phenomena.

### 序 論

一般的으로 電氣機器의 磁束分布는 電氣機器의 設計前에 誘導磁界, 起磁力, 에너지 分布度<sup>(1)</sup> 등을 計算하는데 필요한 基礎資料가 되어 왔다. 이에 따라 증견에는 E. Roth, L. Rabins, Birke, Parmer氏 等に 의해 電氣機器의 磁界를 “Fourier級數變換法<sup>(1)</sup>”, “導電紙法” 등을 사용하였으며, 이들에 대한 基本式은 Maxwell電磁方程式에서 誘導되는 線型 傳波方程式을 使用하였다. 그러나, 이 方程式은 機器의 構造가 간단하거나, 完全한 對稱性을 지닌 경우를 제외하고는 正確한 解를 얻을 수 없으며, 실제에 있어서 電氣機器는 幾何學的인 복잡성을 지니고 있으므로 近似的으로 解析할 수 밖에 없다.<sup>(2), (3)</sup>

이에 따라, 最近에 研究된 近似解析法으로는 Ritz Method, 有限差分法, 有限要素法, 加重殘差法(Weighted Residual Method), 積分方程式法 등이 있으나 Ritz Method, 有限差分法 등은 有限要素法<sup>(4), (5)</sup>이나 加重殘差法에 비해 解析上 誤差의 범위가 크므로 最近에는 使用하지 않고 있다.<sup>(6)</sup>

이와 같은 이유에 따라, 本 研究에서는 有限要素法을 使用<sup>(6), (7)</sup>하여 Tubular Motor의 磁束分布 特性을 機械的 對稱性을 고려하여 軸對稱 座標系에서 解析하였다.

### 1. 基本 方程式

電氣機器 內에서의 電磁界를 Maxwell方程式에 의해 表現하면

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times H &= J + J_i \\ \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \cdot D &= 0 \\ J_i &= \sigma E \end{aligned} \tag{1}$$

이다. 여기서  $J$ 는 External forcing current density,  $J_i$ 는 Induced current density,  $\sigma$ 는 導電率(Conductivity)이다. 또한 磁束密度,  $B$ , 磁氣벡터포텐셜,  $A$ , 磁界의 세기,  $H$ 의 상호관계는

$$\begin{aligned} B &= \mu H \\ B &= \nabla \times A \end{aligned} \tag{2}$$

로 된다.

式(2)의 透磁率,  $\mu$ 를 線型이라 가정하여 式(1)에 代入하여 整理하면 定常狀態에서

\* 正 會 員 : 漢陽大 工大 電氣工學科 教授 · 工博  
\*\* 正 會 員 : 漢陽大 大學院 電氣工學科 博士課程  
接受日字 : 1981年 7月10日

$$\nabla^2 A = -\mu J + j\omega\sigma\mu A \quad (3)$$

인 Poisson Equation으로 된다. 여기서  $\omega$ 는 角速度 ( $\omega=2\pi f$ )이며  $\sigma$ 는 導電率이다.

따라서, 電磁界 問題에 있어서의 解는 Dirichlet나, Neumann의 境界條件을 만족하는 微分方程式, (3)을 만족하는 벡터포텐셜,  $A$ 를 구하는 것으로 요약된다. (7)

### 2. 變分 原理

電磁界를 표현하는 微分方程式, (3)은 에너지 汎函數 (7)에서 變分原理에 의해 誘導되는 式과 같은 형태로 표현할 수 있으며, 이와 같은 관계는, 電磁界에서 적용되는 에너지 汎函數가 式(3)의 微分方程式과 境界條件을 만족할 때 만이 最少化됨을 의미한다.

一般的으로 電磁界에서 적용되는 에너지 汎函數는

$$\omega = \int_R \left\{ \frac{1}{2\mu} (\nabla \times A) \cdot (\nabla \times A) + j \frac{\omega}{2\rho} A^2 - J \cdot A \right\} dR \quad (4)$$

이다. 여기서  $\rho$ 는 抵抗率( $\rho=1/\sigma$ )이며  $R$ 은 解析領域 (그림 2)이다.

따라서, 式(4)를 벡터포텐셜,  $A$ 에 대해 變分을 취해 零으로 놓아

$$\delta\omega=0 \quad (5)$$

解를 구하는 것은 Dirichlet나 Homogeneous의 Heumann 境界條件 (7)下에서 式(3)의 解를 구하는 것과 일치하게 된다.

그러므로 벡터포텐셜,  $A$ 의 解는 式(4)의 에너지 汎函數를 最少化함으로써 구할 수 있다.

### 3. 에너지 汎函數

軸對稱 圓筒座標系에서 對稱軸 (1)-(4)을  $Z$ -軸으로 잡으면 電流密度,  $J$ 와 벡터포텐셜,  $A$ 는 偏角成分인  $\theta$ -成分만 갖게 되므로

$$\begin{aligned} J &= J(r, z) a_\theta \\ A &= A(r, z) a_\theta \end{aligned} \quad (6)$$

으로 되며, 磁束密度의 各 成分이

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \\ B_z &= -\frac{\partial A}{\partial z} \end{aligned} \quad (7)$$

로 정해짐에 따라 軸對稱 圓筒座標系에서의 에너지 汎函數는

$$\omega = \iint_R \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + \frac{2}{r} A \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r^2} \right] \right.$$

$$\left. + j \frac{\omega}{2\rho} A^2 - J \cdot A \right\} r dr dz \quad (8)$$

으로 정해진다.

### 4. 有限要素法

有限要素法은  $n$ 개의 節點으로 연결되어 있는 有限個의 要素로 解析領域을 分割하는 것이며, 이 방법은 결국 解析領域을 세분화하여 관계영역을 近似化시켜 近似解를 구하는 것이라 할 수 있다.

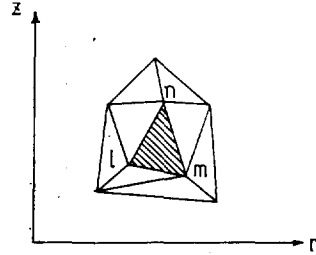


그림 1. 삼각요소  
Fig. 1. Triangular element

따라서, 解析領域 內에 있는 各 要素內에서의 벡터포텐셜은 연속函數로서 近似化된다고 생각하여 近似解를  $\hat{A}^*$ 로 표시하면

$$\hat{A}^* = \sum_{K=1}^N N_K A_K^* = [N]^T [A]^* \quad (9)$$

로 되고, 여기서  $A_K^*$ 는 要素  $e$ 에 속하는 節點  $K=1, 2, \dots, N$ 에서의 節點값이며  $N_K^*$ 는 Stiffness Matrix 성질을 지닌 補間函數이다. 따라서 式(8)을 解析領域內에 있는 節點  $N$ 개에 대하여 變分을 취하면 變分은  $A_K$ 의  $N$ 개의 未知變數에 대하여 취해지며, 이에 대한 結果式은

$$\frac{\partial \omega}{\partial [A]} = [P] [A] + K^2 [Q] [A] + [F] = 0 \quad (10)$$

$$P_{ii} = \sum_{K=1}^N p_{ii}^*, \quad Q_{ii} = \sum_{K=1}^N q_{ii}^*, \quad K^2 = j \frac{\omega}{\rho},$$

$$F_i = \sum_{K=1}^N F_i^* \quad (11)$$

의 Matrix方程式으로 된다.

### 5. 要素方程式

軸對稱 圓筒座標系에서 한개의 偏角  $\theta$ 方向에 대한 半徑  $r$ 인 解析領域  $R$ 에서의 全體 에너지 汎函數는

$$\begin{aligned} \omega &= \iint_R \left( \int_0^B v b db r \right) \cdot dr \cdot dz + j \frac{\omega}{2\rho} \iint_R A^2 r \cdot dr \cdot dz \\ &\quad - \iint_R J \cdot A r dr dz \end{aligned} \quad (12)$$

로 되며, 한개의 要素 內에서 벡터포텐셜,  $A$ 가 線型

函數라고 가정하면

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z \quad (13)$$

으로 쓸 수 있으며 式(7)은

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z} = -\alpha_3$$

$$B_z = \frac{A}{r} + \frac{\partial A}{\partial r} = \frac{A}{r} + \alpha_2 \quad (14)$$

로 整理된다.

그러나, 有限要素法의 數值解析上 三角形要素는 每우 작기 때문에 中心에서의 磁束密度的 軸方向成分,  $B_z$ 는

$$B_z = \frac{A_c}{r_c} + \alpha_2 \quad (15)$$

로 바꾸어 쓸 수 있으며, 벡터포텐셜도 要素 內에서는 線型函數로 가정했으므로 中心에서의 벡터포텐셜,  $A_c$ 의 값은

$$A_c = \frac{1}{3}(A_l + A_m + A_n) \quad (16)$$

과 같다.

또한 全體 磁束密度는

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_z^2} \quad (17)$$

이며 式(17)에 式(14)를 代入, 整理하면

$$B = \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \frac{2A_c}{r_c}\alpha_2 + \left(\frac{A_c}{r_c}\right)^2} \quad (18)$$

이 된다. 여기서 各 常數  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 는 式(13)의 要素의 頂點  $l, m, n$ 에 代入하여 方程式을 세운 후 各 係數를 구하면

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Delta} \{A_l(r_m z_n - z_m r_n) + A_m(r_n z_l - z_n r_l) + A_n(r_l z_m - z_l r_m)\}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\Delta} \{A_l(z_m - z_n) + A_m(z_n - z_l) + A_n(z_l - z_m)\}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\Delta} \{A_l(r_n - r_m) + A_m(r_l - r_n) + A_n(r_m - r_l)\} \quad (19)$$

이다. 여기서

$$\Delta = (r_m z_n - r_n z_m) + (r_n z_l - r_l z_n) + (r_l z_m - r_m z_n)$$

또한, 領域,  $R$  內의 三角形要素의 各 頂點에서의 벡터포텐셜에 대한 에너지는 式(12)에서

$$W = W_1 + W_2 + W_3 \quad (20)$$

$$W_1 = \iint_R \left( \int_0^B \nu b db \right) r dr dz \quad (21)$$

$$W_2 = \iint_R \frac{j\omega}{2\rho} A^2 r dr dz \quad (22)$$

$$W_3 = \iint_R -J \cdot A \cdot r dr dz \quad (23)$$

이며 한개의 三角形要素 內의 頂點  $l$ 에 대한 에너지函數  $W_1$ 의 變分은

$$\frac{\partial W_1}{\partial A_l} = \iint_R \left( \frac{\partial}{\partial B} \int_0^B \nu b db \frac{\partial B}{\partial A_l} \right) r dr dz$$

$$= \iint_R \left( \nu B \frac{\partial B}{\partial A_l} \right) r dr dz \quad (24)$$

으로 된다. 式(15), (16)에서

$$\frac{\partial B}{\partial A_l} = \frac{1}{2B} \frac{\partial(B^2)}{\partial A_l}$$

$$= \frac{1}{2B} \left( 2\alpha_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_l} + 2\alpha_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial A_l} + \frac{2\alpha_2}{3r_c} + \frac{\partial A_c}{r_c} \frac{\partial \alpha_2}{\partial A_l} + \frac{2A_c}{3r_c^2} \right) \quad (25)$$

式(25)에 式(19)를 代入, 整理하면

$$\nu B \frac{\partial B}{\partial A_l} = \nu \left[ \alpha_2 \frac{z_m - z_n}{\Delta} + \alpha_3 \frac{r_n - r_m}{\Delta} + \frac{1}{3r_c} \left( \alpha_2 + 3A_c \frac{z_m - z_n}{\Delta} + \frac{A_c}{r_c} \right) \right]$$

이며 이를 式(24)에 代入하면

$$\frac{\partial W_1}{\partial A_l} = \frac{\nu r_c}{2} \left\{ \alpha_2 (z_m - z_n) + \alpha_3 (r_n - r_m) + \frac{1}{3r_c} (\Delta \alpha_2 + 3A_c (z_m - z_n) + \Delta \frac{A_c}{r_c}) \right\} \quad (27)$$

로 整理된다.

式(22)에서

$$W_2 = j \frac{\omega}{2\rho} A_c^2 r_c \frac{\Delta}{2} \quad (28)$$

이며 頂點  $l$ 의 벡터포텐셜,  $A_l$ 로 變分을 취하면

$$\frac{\partial W_2}{\partial A_l} = j \frac{\omega}{6\rho} A_c r_c \Delta \quad (29)$$

이며 같은 方法으로

$$W_3 = -J A_c r_c \frac{\Delta}{2} \quad (30)$$

을 變分을 취하면

$$\frac{\partial W_3}{\partial A_l} = -\frac{1}{6} J \cdot r_c \Delta \quad (31)$$

이다. 따라서, 全 領域에서  $l$  成分의 벡터포텐셜,  $A_l$ 에 대한 變分은 式(20)에서

$$\sum_r \frac{\partial W}{\partial A_l} = \sum_r \frac{\partial}{\partial A_l} (W_1 + W_2 + W_3) = 0 \quad (32)$$

이며 式(32)에 式(27), (29), (31)을 代入하여 整理하면

$$\sum_r \frac{\partial W}{\partial A_l} = A_l \sum_r \nu \left\{ \frac{r_c}{2\Delta} [(z_n - z_m)^2 + (r_n - r_m)^2] + \frac{1}{3} (z_m - z_n) + \frac{\Delta}{18r_c} \right\}$$

$$+ A_m \sum_r \nu \left\{ \frac{r_c}{2\Delta} [(z_m - z_n)(z_n - z_l)] + (r_n - r_m)(r_l - r_n) \right\} + \frac{1}{6} (z_n - z_l)$$

$$+ \frac{1}{6} (z_m - z_n) + \frac{\Delta}{18r_c} \left\{ \right.$$

$$\left. + A_n \sum_r \nu \left\{ \frac{r_c}{2\Delta} [(z_m - z_n)(z_l - z_m)] \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (r_n - r_m)(r_m - r_i) + \frac{1}{6}(z_i - z_m) \\
 & + \frac{1}{6}(z_m - z_n) + \frac{\Delta}{18r_c} \} \\
 & + (j \frac{\omega}{18\rho} \sum_r r_c \Delta) \cdot (A_i + A_m + A_n) \\
 & - \frac{1}{6} \sum_r J \cdot r_c \Delta \quad (33)
 \end{aligned}$$

이다. 따라서,  $m, n$ 에 대해서도 式(33)과 같은 方法으로 하여 全 Matrix를 구성하면

$$\nu[M] \{A\} + K^2 \{N\} \{A\} = \{J\} \quad (34)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned}
 M_{11} = & \frac{r_c}{2\Delta} [(z_m - z_n)^2 + (r_n - r_m)^2] \\
 & + \frac{1}{3}(z_m - z_n) + \frac{\Delta}{18r_c}
 \end{aligned}$$

$\ll M_{22}, M_{33}$ 는  $l, m, n$ 을 차례로 代入

$$\begin{aligned}
 M_{12} = M_{21} = & \frac{r_c}{2\Delta} [(z_m - z_n)(z_n - z_i) \\
 & + (r_n - r_m)(r_i - r_n)] + \frac{1}{6}(z_m - z_n) \\
 & + \frac{1}{6}(z_n - z_i) + \frac{\Delta}{18r_c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{23} = M_{32} = & \frac{r_c}{2\Delta} [(z_i - z_m)(z_n - z_i) \\
 & + (r_m - r_i)(r_i - r_m)] \\
 & + \frac{1}{6}(z_n - z_i) + \frac{1}{6}(z_i - z_m) + \frac{\Delta}{18r_c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{13} = M_{31} = & \frac{r_c}{2\Delta} [(z_m - z_n)(z_i - z_m) \\
 & + (r_n - r_m)(r_m - r_i)] \\
 & + \frac{1}{6}(z_i - z_m) + \frac{1}{6}(z_m - z_n) + \frac{\Delta}{18r_c}
 \end{aligned}$$

$$[N] = \frac{\Delta r_c}{18} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K^2 = j \frac{\omega}{\rho}$$

이다.

또한 解析 모델 및 要素 分割은 그림 2(a), (b)와 같다.

### 6. 結 論

Tubular Motor(T.M)는 一般의 2相 및 3相 勵磁方式에 의하여 移動磁界를 公극에 形成시키고 空隙磁束과 二次誘導電流에 의한 發生추력을 利用하는 電動機로서 그 特性에 관한 理論의 규명은 端部效果 등의 部分的인 問題를 제외하고는 대체적으로 해결되어 있다<sup>(10)</sup>. 端部效果를 고려 入口端 Slot(슬롯) 한 개를 취

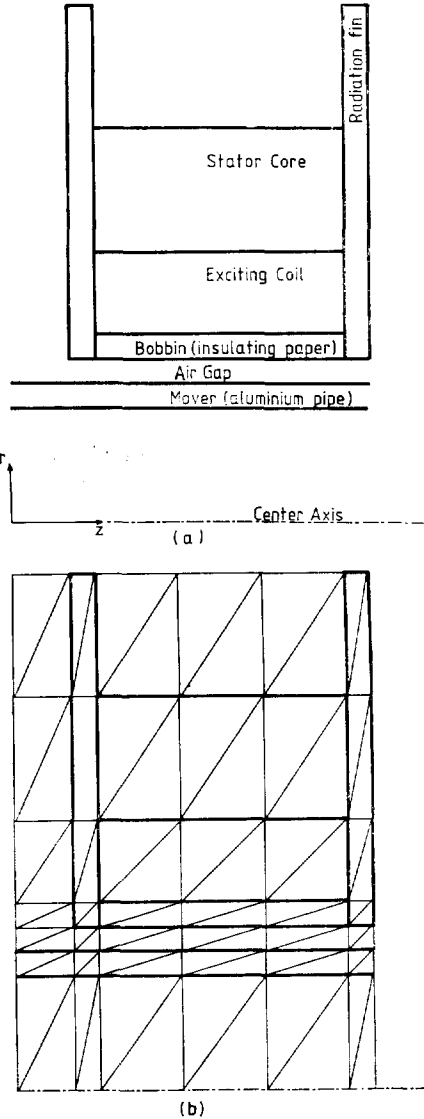


그림 2. 요소  
Fig. 2. Element

하여, 要素數 84, 節點數 56(그림 2 참조), 一次入力電流密度  $J = 5 \times 10^4 \sin(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x)$  [A/m<sup>2</sup>] (단,  $\tau = \pi$ ), 鐵心部 및 放熱板의 比透磁率을 各各  $\mu_s = 7000$ ,  $\mu_r = 2000$ , 移動子의 導電率을  $\sigma = 0.356 \times 10^8$  [mho/m]로 定하였고 境界條件은  $z$ -中心軸 및 Yoke外部의 벡터포텐셜,  $A$ 를 零으로 하여 移動子 구속시 時間( $t$ )의 변화에 따른 一次入力電流空間分布 變化에 대한 各部分의 磁束分布特性 해석은 一次入力空間電流密度分布가 入口端側으로 증가할수록 내부 방열판 및 公극 누설자속

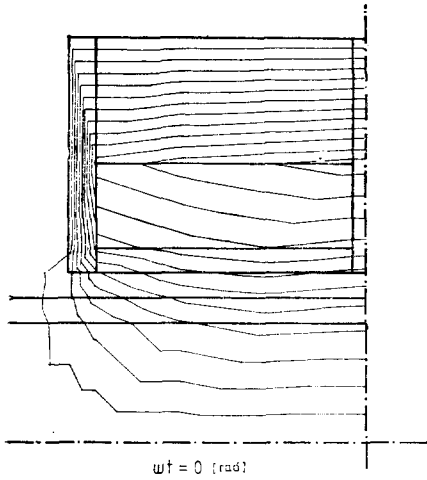


그림 3. 자속분포도  
Fig. 3. Flux distribution

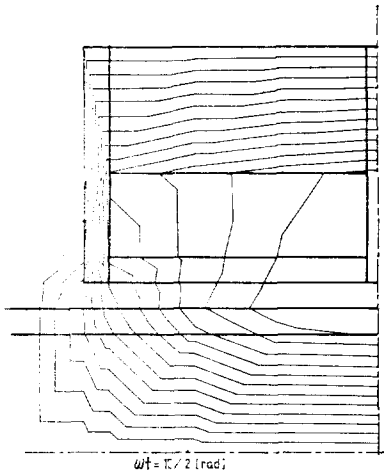


그림 4. 자속분포도  
Fig. 4. Flux distribution

이 현저히 감소하며, 入口端部磁束密度는 증가하고 심하게 일그러지며 外側으로 휘는 경향은 진행과 및 반사파의 영향, 二次誘導電流에 따른 發生磁束의 영향 및 단부효과에 의한 것으로서 결론지을 수 있다. (그림 3, 4 참조)

더 나아가 투자율( $\mu$ )의 非線型性, 解析영역요소분할 증가, 移種子 移動(運轉)時 등을 고려하여 해석한다면 더욱 실제에 부합된 特性結果를 얻어 機器解析 및 設計에 圓대한 기여를 할 것으로 전망된다.

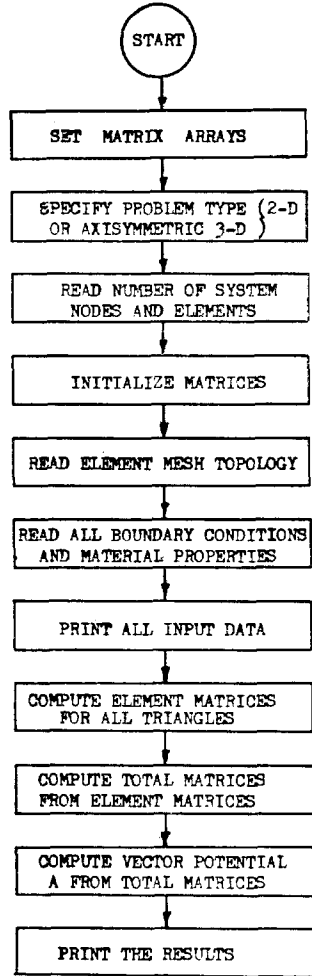


그림 5. 플로우 차트  
Fig. 5. Flow chart

参 考 文 献

- [1] E. Guancial, S. Das Gupta; "A finite element computer programme for 2-D and axisymmetric magnetic field problems," IE(I) Journal-EL. 1978, Vol. 58, pp. 166~170.
- [2] O.W. Andersen; "Transformer leakage flux program based on the finite element method IEEE PES. 1972, pp. 682~689.
- [3] P. Silvester, A. Konrad; "Analysis of transformer leakage phenomena by high-order finite elements," IEEE Power Engineering Society. 1973.2. pp. 1843~1855.
- [4] K.C. Rockey, H.R. Evans, D.W. Griffiths, D.A.

Nethercot; "The finite element method," pp. 96 ~176, 1975 William Clowes & Sons, Limited.

[5] P. Silvester, M.V.K. Chari; "Finite element solution of saturable magnetic field problems", IEEE Trans. Vol. PAS-80, No. 7, pp. 1642~1652, 1970.

[6] M.V.K. Chari; "The finite element solution of the eddy-current problem in magnetic structures," IEEE Trans. VOL. PAS-93, pp. 62~72, 1974.

[7] O.C. Zienkiewicz; "The finite element method in engineering science," McGraw-Hill, 1976.

[8] RICHARD L. STOLL; "The analysis of eddy currents," Oxford University Press 1974.

[9] 任達鎬, 玄東石, 任泰彬; "有限要素法에 의한 三相誘導電動機의 磁束分布 解析에 관한 研究", 대한전기학회지 第30卷 第4號 pp. 219~226, 1981.

[10] 任達鎬, 李殷雄, 張錫明; "Tubular Motor의 특성에 관한 연구, —試作 및 기동시의 특성—", 전기학회지 Vol. 28, No. 3, pp. 246~251, 1979.