● 特輯 ● 自動制御

適応 制御 의 紹介

崔 悰 鎬*

차 례

1. 서 론

현대 제어분야는 1960년대부터 state-space개념을 사용하여 $\dot{x}=Fx+Gu+w$, $y=Hx+v$로 표시되는 선형 시스템(F, G, H)에 대하여 많은 연구가 되어 왔으며, 임의의 원하는 위치에 시스템의 pole은 놓게하는 제어 입력이나 이차함수의 형태로 나타나는 목적함수를 극소화하는 제어 입력을 구하는 여러가지 방법들이 제시되었고 또한 이러한 방법들은 우주, 항공, 화학 공장 등의 여러분야에서 많이 응용되고 있다. 이러한 제어 이론을 응용하는데 중요한 문제점은 실제 시스템의 운동을 F, G, H라는 행렬로 나타내어야 하는데 시스템의 운동방정식을 쉽게 구할 수 없거나 또는 불가능한 경우에는 이러한 제어 이론을 그대로 사용할 수가 없다. 이러한 문제에 대하여 최근에 적응 제어(Adaptive Control)라는 이름 아래 많이 연구가 되었고 문제를 다루는 방법도 다양하여 졌으며 많이 쓰이는 방법으로는 self tuning regulator(STR)와 model reference adaptive control(MRAC)의 방법이 있다. STR[1]은 시스템의 입력과 출력으로 부터 시스템의 모르는 파라메터를 추정하고 이 추정한 파라메터들이 실제 시스템의 파라메타일때에 해당하는 제어 입력을 시스템에 넣고하는 과정을 시간에 따라 반복한다.

MRAC[2]은 주어진 모델에서 나온 출력과 실게 시스템에서 나온 출력간의 차이를 시간이 경과함에 따라 없게 하기 위하여 실제 시스템에서의 입력, 출력및 모델에서 나온 출력들을 가지고 보조신호를 발생시켜서 이를 실제시스템에 입력시킨다. 이 두가지 방법은 처음에는 각각 다른 방법으로 생각되었으나 최근에는 이들 상호간에 유사성이 존재하여 어떤 STR방법에는 이에 해당하는 MRAC방법이 존재한다는 것이 보여졌다.[3] 이런 방법들의 가장 중요한 고려사항은 안정도 문제이며 잡음이 안들어간 경우에는 잘 풀려져 있다.[4,5]

여태까지의 추세를 보면 STR은 주로 discrete time system에 대하여 취급되어 왔고 MRAC는 discrete time 및 continous time system에 대하여 취급되었으며 STR은 잡음이 들어가는 경우에 대하여도 취급되었다.

이러한 방법들을 실제 시스템에 사용하려는 노력은 많이 나타나고 있으나[6,7] 이러한 방법들의 복잡성, 이에 따른 계산량의 과다, 계산과정에서 나타나는 불안정한 요인들이 실제 문제에 적용하기 전에 해결되어야 하는 어려운 점들이다.

여기서는 STR 및 MRAC에 대하여 각각 설명하고 이 방법들을 사용할 때 고려하여야 할 점에 대하여 이야기 하겠다.

2. STR 및 MRAC

STR을 설명하기 위하여 다음과 같은 단일 입출력을 갖는 시불변 시스템을 생각하자[8].

$$A(z)y_k=B(z)u_k+\varepsilon_k$$
$$A(z)=1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n} \qquad (1)$$
$$B(z)=b_1z^{-1}+\cdots+b_n$$

* 正會員 ; 서울大工大 計劃制御工學科 敎授·工博

여기서 z^{-1}은 시간을 과거로 보내는 연산자로써 $z^{-n}x_k=x_{k-n}$인 관계가 성립되고 $\{\varepsilon_k\}$는 독립적으로 같은 확률 분포를 갖는 stochastic process이다.

식(1)과 같이 표시되는 안정된 시스템에 있어서 a_i 및 b_i, $i=1,2,\cdots,n$가 알려지지 않았을때 만약 입력 $u_1,u_2,\cdots,u_{k-1}$및 출력 $y_1,y_2,\cdots,y_k$를 안다면 $E[y^2_{k+1}]$을 최소를하는 u_k를 어떻게 구하는 것이 좋은가? 이것은 출력을 0이 되게끔 하는 regulator 문제로서

$$\theta^T=(b_2,b_3,\cdots,b_n,a_1,a_2,\cdots,a_n) \quad (2)$$
$$\beta^T=(b_1,\ \theta^T)$$

로써 정의하면

$$y_k=\zeta_k^T\ \theta+b_1u_{k-1}+\varepsilon_k \quad (3)$$
$$\zeta_k=(u_{k-2},\cdots,u_{k-n},-y_{k-1},\ \cdots,y_{k-n})$$

인 것을 알 수 있다.

$E[y^2_{k+1}]$을 가장 작게하는 제어 입력은

$$u_k=-\zeta^T_{k+1}\theta/b_1 \quad (4)$$

이 되는데 a_i 및 b_i를 모르기 때문에 이들을 구해야 한다.

$$x_k^T=(u_{k-1},\ \zeta_k^T) \quad (5)$$

로써 정의하면 식(3)은

$$y_k=x_k^T\beta+\varepsilon_k \quad (6)$$

가 되며

$$S(\beta)=\sum_{k=1}^{N}(y_k-x_k^T\beta)^2 \quad (7)$$

을 가장 작게하는 β의 추정치는

$$\hat\beta_N=(X_N^TX_N)^{-1}\ X_N^T\mathrm{Y}_N \quad (8)$$

$$X_N=\begin{bmatrix}x_1^T\\x_2^T\\\vdots\\x_N^T\end{bmatrix},\quad Y_N=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_N\end{bmatrix}$$

이 된다. 식(8)에서 $(X_N^TX_N)$은 $2n\times2n$인 행렬이므로 N의 크기가 하나씩 증가할 때 마다 매번 역행열을 구하는 것은 많은 계산량을 필요로 하므로

$$P_N=(X_N^T\ X_N)^{-1} \quad (9)$$

로 정의하면

$$P_{N+1}=\left(\begin{bmatrix}X_N\\x^T_{N+1}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}X_N\\x^T_{N+1}\end{bmatrix}\right)^{-1} \quad (10)$$
$$=(X_N^TX_N+x_{N+1}x^T_{N+1})^{-1}$$

이 되는데 다음과 같은 관계식(matrix inversion lemma)을 사용하면, 즉,

$$(A+BC)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \quad (11)$$

를 사용하면

$$P_{N+1}=I-P_N\frac{x_{N+1}x^T_{N+1}}{1+x^T_{N+1}P_Nx_{N+1}}P_N \quad (12)$$

인 관계식이 성립되어 P_N을 알며는 역행렬을 구하지 않고서도 P_{N+1}을 구할 수 있고 식(8)과 (12)로부터 다음과 같은 관계식을 얻게 된다.

$$\hat\beta_{N+1}=\hat\beta_N+K_{N+1}(y_{N+1}-x^T_{N+1}\hat\beta_N) \quad (13)$$
$$K_{N+1}=P_Nx_{N+1}/(1+x_N{}^T{}_{+1}P_Nx_{N+1})$$

이렇게 매번 $\hat\beta_N$을 주어진 x_N으로 부터 구하고 식(4)의 β대신에 $\hat\beta_N$을 사용하여 u_N을 구하고 이러한 과정을 반복한다. 이와같이 어떤 모르는 파라미터를 추정하여 마치 추정치가 실제값인것 같이 생각하여 이것에 가장 적절한 입력신호를 만드는 것이 STR방법이다. 다음은 MRAC방법을 설명하자[(2)].

어떤 시불변시스템의 단일 입력$u(t)$와 단일출력 $y_p(t)$가

$$\dot x_p=A_px_p+b_pu(t) \quad (14)$$
$$y_p=h^Tx_p$$

로써 나타날때 이 시스템의 전달 함수는

$$W_p(s)=h^T(sI-A_p)^{-1}b_p \quad (15)$$
$$\triangleq\frac{k_pZ_p(s)}{R_p(s)}$$

로써 나타나는데 $R_p(s)$의 차수는 n, $Z_p(s)$의 차수는 $m(=n-1)$이라 하고 $Z_p(s)$는 모든 근 σ_i가 $Re(\sigma_i)<0$인 Hurwitz다항식으로 $R_p(s)$ 및 $Z_p(s)$의 가장 높은 차항의 계수는 1이라 하자. 여기서 m과 n 그리고 k_p의 부호가 알려졌다고 가정하자(여기서는 k_p가 양수라 가정한다).

그리고 다음과 같은 입력 $r(t)$와 출력 $y_M(t)$를 갖는 모델을 생각하자.

$$W_M(s)=\frac{k_MZ_M(s)}{R_M(s)} \quad (16)$$

여기서 $Z_M(s)$와 $R_M(s)$는 최고 차수가 m,n인 Hurwitz 다항식으로 각각의 최고차 항의 계수가 1이라 하자. 시스템과 원하는 모델간의 출력 신호의 차는

$$e_1(t)=y_p(t)-y_M(t) \quad (17)$$

로써 MRAC방법은 적절한 출력 신호$u(t)$를 만들어서 $e_1(t)$가 시간이 지남에 따라 0이 되도록 하는 것이다. 여기에 시스템 입출력 신호 u와 y_p로 부터 다음과 같은 보조 신호를 만들자.

$$\dot v^{(1)}=\wedge v^{(1)}+bu \quad (18)$$
$$\dot v^{(2)}=\wedge v^{(2)}+b_py_p$$
$$b^T=[0,\ 0,\cdots,1]$$

여기서 $\wedge$는 $(n-1)\times(n-1)$인 안정한 행열이다. 또한 $c(t)$ 및 $d(t)$를

$$c^T(t)\triangleq[c_1(t),\ c_2(t),\cdots,c_{n-1}(t)] \quad (19)$$
$$d^T(t)\triangleq[d_1(t),\ d_2(t),\cdots,d_{n-1}(t)]$$

로 정의하고

$$\theta^T(t)\triangleq[k_0(t),\ c^T(t),d_0(t),d^T(t)] \quad (20)$$
$$\omega^T(t)\triangleq[r(t),v^{(1)}(t),y_p(t),v^{(2)}(t)]$$

으로 정의하여

$$u(t)=\theta^T(t)\omega(t) \quad (21)$$

가 되도록 하고 임의의 초기치 $\theta(0)$로부터 시작하여

$$\dot{\theta}=-\Gamma e_1(t)\omega(t) \quad \Gamma=\Gamma^T>0 \tag{22}$$

가 되도록 θ를 변화시키면 이러한 방법은 $e_1(t)$가 시간이 감에 따라 0으로 가는 것을 증명 할 수 있다. 여기서 시스템이나 모델의 전달 함수의 분자의 차수를 $m=n-1$인 경우에 대하여 설명을 하였으나 $m<n$인 경우에도 MRAC방법을 적용시킬 수가 있다.[2,5] 또한 이 방법과 STR방법간에는 근본적인 차이가 없고 둘 다 파라미터를 추정하는 부분과 파라미터의 추정치에 근거를 두고 어떤 목적에 맞는 제어입력을 구하는 두부분으로써 구성돼 있다고 생각 할 수 있다[3].

3. 적응제어 사용시의 고려사항

적응제어 이론을 실제 문제에 적용할 때 주의하여야 할점은 비록 이론적으로는 시간이 감에 따라 모르는 파라미터를 알 수 있다고 증명이 되었으나 디지탈 콤퓨터를 사용할 때 gain 및 sampling time을 어떻게 잡는가에 따라 실제의 파라미터에 수렴 할 수도 있고 또는 발산 할 수도 있다. 예를 들면 식(22)에서 θ의 크기를 결정하는 것이 중요한데 θ가 수렴하도록 Γ를 결정하는 것은 쉬운 일이 아니며 시행 착오에 의하여 결정될 수 있다. 또한 θ의 수렴 속도를 빠르게 하기 위하여 Γ를 크게하면 이에 따라sampling time를 짧게 잡아야 하는데 이에 따라 늘어나는 계산량도 고려하여야 할 문제이며 실제 문제에 적용할때 한 sampling time안에 모든 계산을 처리할 수가 있는가 하는 계산기의 계산 속도도 고려를 하여야 한다. 그리고 앞에 소개한 방법들은 시스템이 시불변인 경우인데 시스템이 시간에 따라 바뀌면 추정되어야 할 파라미터도 시간에 따라 바뀌게 되는데 파라미터를 추정하는 방법들의 수렴 속도보다 시스템의 파라미터가 변하는 속도가 아주 느리다면 앞에서 제시한 적응제어 방법들이 바라는 결과를 줄수도 있겠지마는 그렇지 않은 경우에는 좋은 결과를 기대하기가 어렵다. 이밖에도 시스템에 잡음이 들어가면 적응제어의 이론 및 계산상의 안정성에 어떠한 영향을 미치는가를 고려하는 것도 중요한 문제이다.

4. 결 론

이제까지 적응 제어의 이론을 설명하기 위하여 STR 방법과 MRAC방법에 대하여 각각 하나의 방법을 소개하였고 이들을 사용하는데 고려하여야 할 점들을 기술하였다. 이 분야는 현재 많은 연구가 행하여 지고있는데 앞으로 좀더 안정된 제어 방법이 나오기를 기대한다.

참 고 문 헌

〔1〕 K.J. Astrom and B. Wittenmark; "On selftuning regulators", Automatica 9, pp. 185~199, 1973.

〔2〕 K.S. Narendra and L.S. Valvani; "Stable adaptive controller design—direct control", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-23, No. 4, pp. 570~583, Aug. 1978.

〔3〕 B. Egardt; "Unification of some continuons-time adaptive control schemes", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-24, No. 4, pp. 588~592, Aug. 1979.

〔4〕 G.C. Goodwin, P.J. Ramadge, and P.E. Caines; "Discrete-time multivariable adaptive Control", IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-25, No. 3, pp. 449~456, June, 1980.

〔5〕 K.S. Narendra, Y.H. Lin, and L.S. Valavani; "Stable adaptive controller design, Part II : Proof of stability", IEEE Trans. Automatic Conlrol, Vol, AC-25, No. 3, pp. 440~448, June, 1980.

〔6〕 G.A. Dumont and P.R. Bélanger; "Self-tuning control of a titanium dioxide kiln", IEEE Trans. Automatic Control, AC-23, No. 4, pp. 532~538, August, 1978.

〔7〕 A.J. Morris et al; "Selftuning control of some pilot plant processe", Microprocessors and micro-systems, vol. 5, No. 1, pp. 3~12, Jan./Feb., 1981.

〔8〕 G.C. Goodwin and R.L. Payne; Dynamic system identification," Academic Press, 1977.