

電荷重疊法에 의한 2媒質場의 電界計算

論 文
30~9~3

A Charge Simulation Method for the Calculation of Electric Fields in Two-dielectric Media

池 哲 根* · 李 民 濟**
(Chol-Kon Chee · Min-Jea Lee)

Abstract

A numerical method for the calculation of electric fields with two-dielectric media is described. The basis of the method is the use of fictitious charges as a particular solution of Laplace's (and Poisson's) equations. Simple examples were chosen for the explanation of the method and the close agreement between calculated and analytical values was obtained. It has been shown that the charge simulation method is better in calculation time and accuracy.

1. 서 론

고전압이 인가되는 機器의 절연설계, 방전현상의 해석 등 많은 분야에서 電界計算은 매우 중요한 요소가 된다.⁽¹⁾

電位, 電界의 분포를 구하는 방법에는 等角寫像, 座標變換 등의 解析的方法和 電解槽, 抵抗紙를 이용하는 實驗的方法, 계산기에 의한 數值的方法 등이 있지만 실제의 시스템은 매우 복잡하기 때문에 解析的方法은 불가능 하지는 않지만 매우 어렵다.⁽²⁾

대형 계산기의 발달과 더불어 差分法, 有限要素法 등 각종 數值電界計算法이 매우 발달하였고 有限化的方法에 따라 領域分割法과 境界分割法으로 크게 분류된다.⁽³⁾

領域全體를 分割하여 分割點(格子點, 節點)의 電位를 定式化하는 有限要素法, 差分法에 대하여 본 연구에서는 境界 및 場을 형성하는 電荷를 分割하고 電極內部的 假想電荷를 未知數로 하는 電荷重疊法 program을 개발하여 高電壓機器의 回轉對稱場을 해석하였다.

이 電荷重疊法은 對稱성을 갖는 場의 精密計算, 場이 無限遠까지 확대된 경우 등에 적당하고 다른 방법

에 비해 program도 용이하며 一般三次元場의 計算 등 特殊場의 해석에도 쉽게 응용될 수 있다.⁽⁴⁾

2. 電荷重疊法의 原理

Laplace방정식을 만족시키는 몇개의 解 u_1, u_2, \dots, u_n 의 和 ϕ 가 場의 境界條件을 만족시킨다면 靜電界의 唯一性定理에 의하여 ϕ 는 구하는 解가 된다. 이와같이 部分解의 和에 의하여 解를 구하는 방법은 오래전부터 검토되었고 解析的方法의 級數解도 이것의 一例이다.⁽⁵⁾

電荷重疊法은 電極의 表面電荷로써 형성되는 場을 電極內部에 배치된 有限個의 假想電荷에 의한 電位場 u_i 의 和로 치환하는 것이 그 기본이다. 假想電荷群에 의한 場 $\phi = \sum u_i$ 의 等電位面이 電極表面과 일치된다면 각 u_i 는 Laplace방정식을 만족시키므로 ϕ 가 電極外部의 바른 解가 된다는 것이 보증된다.⁽⁶⁾

假想電荷로써 點, 線, ring電荷를 사용하는 電荷重疊法이 많은 軸對稱 電界問題의 有效한 解法이라는 것을 제시한 사람은 西獨의 Steinbigler이고⁽²⁾ 그후 각종의 문제에 적용되었고 다른 數值的方法和 병행하여 지금 발전도상에 있다.

그림 1은 電荷重疊法의 說明圖를 표시한다. 點, 線, ring電荷의 電荷量을 Q_i 라 하면 Q_i 는 i 點에 $u_i = P_{ij}Q_j$ 의 電位를 유기시키고 i 點의 全體電位 ϕ_i 는 n 電荷 작용의

* 正會員: 서울대 工大 電氣工學科 教授 · 工博

** 正會員: 한국 전기통신연구소 선임연구원

接受日字: 1981年 7月 18日

되기 때문에 약간의 경험을 필요로 하는등의 문제가 있다.

3. 2媒質場의 電界計算

두개의 誘電體가 電界의 작용을 받아 分極될때 각각의 誘電率이 장소에 따라 일정하면 分極電荷는 界面에 만 나타나서 그 界面電荷는 電氣一重層이 된다. 電氣一重層은 單極性 電荷의 層으로써 그 兩側에서 電位는 連續이지만 電界는 形成된 電荷量에 비례하여 不連續이 된다. 또한 場의 電界는 分極電荷를 포함하는 전체의 공간이 單一誘電體(眞空인 경우 포함)인 경우의 電界와 같다.⁽⁷⁾

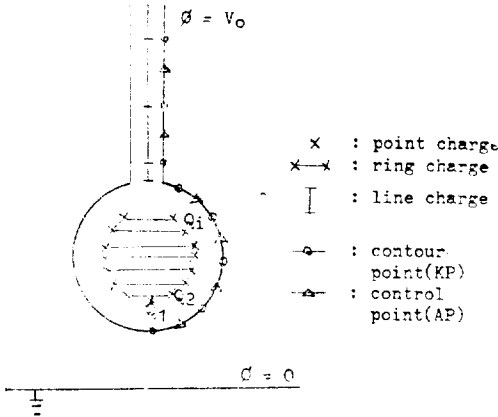


그림 1. 電荷重疊法의 說明圖
Fig. 1. Diagram illustrating the charge simulation method

線形和 $\phi_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} Q_j$ 로 된다. 여기서 P_{ij} 는 電位係數이다. 電極上의 적당한 n 點(韓廓點: KP點)에서 假想電荷群에 의한 電位(影像電荷의 작용도 포함)를 電極電壓과 같게 놓으면 다음 의 連立一次方程式이 형성된다.⁽⁶⁾

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

電極電壓 $V_1 \sim V_n$ (그림 1에서는 전부 V_0)는 境界條件으로써 주어지고 係數 P_{ij} 는 假想電荷와 輪廓點의 위치가 정하여지면 계산이 되고 (1)식으로 부터 電荷 $Q_1 \sim Q_n$ 가 구하여 진다.

電荷量이 구하여지면 이것에 의하여 領域中의 임의의 點의 電位, 電界를 解析的으로 계산할 수 있다. 즉 電位는

$$\phi = \sum_{j=1}^n P_{ij} Q_j \quad (2)$$

에 의하여, 또 電界는 r, z 방향의 성분 E_r, E_z 가 電位와 같이 Q_i 에 대하여 線形加算法이 있으므로 係數 F_{ij}, G_{ij} 를 이용하여

$$E_r = \sum_{j=1}^n F_{ij} Q_j, E_z = \sum_{j=1}^n G_{ij} Q_j \quad (3)$$

로 부터 계산된다.⁽⁶⁾

解의 精度는 電極形狀이 어느 정도 等電位面에 모의되는가 에 의존되기 때문에 通常 電極表面上的 輪廓點 중간에 檢査點(AP點)을 취하고 이 點의 電位가 어느 정도 電極電壓에 近接하는가 를 調査한다.

電荷重疊法의 原理는 매우 간단하고 또한 有限要素法에 비해 program도 용이하다. 그러나 실제의 계산에서는 解의 精度가 輪廓點과 假想電荷의 배치에 의존

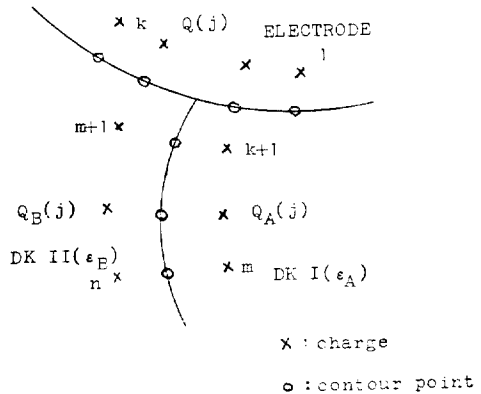


그림 2. 2媒質場의 電荷重疊法
Fig. 2. Arrangement of charges and contour points for the two-dielectric arrangement

電荷重疊法에서는 電極表面電荷의 작용을 電極內部에 배치한 假想電荷의 작용으로써 代用하는것 처럼 界面電荷를 假想電荷로 代用한다.⁽²⁾ 보통 誘電體의 界面에서는 電極表面과는 다른 境界條件이 필요하다. 그림 2에 표시한 것처럼 誘電體 ϵ_A, ϵ_B 쌍방의 內部에 假想電荷를 배치하여 ϵ_A 內의 假想電荷 Q_A 와 電極內의 假想電荷 Q 가 ϵ_B 內의 電界를, ϵ_B 內의 假想電荷 Q_B 와 電極內의 假想電荷 Q 가 ϵ_A 內의 電界를 발생시킨다. 각각의 假想電荷는 電極表面과 誘電體界面의 境界條件으로부터 형성되는 전체의 連立一次方程式의 解로써 주어진다.

境界條件은

(a) 電極上: 電位一定(= $V(i)$).

(b) 誘電體界面上: 電位의 連續 및 電束密度의 法線方向成分의 連續.

이다. 그림 2에서 電極內, ϵ_A 內, ϵ_B 內의 假想電荷에 번호를 붙여 각각 $Q(j)$ ($j=1 \sim k$), $Q_A(j)$ ($j=k+1 \sim$

m), $O_B(j)$ ($j=m+1 \sim n$)로 하면 각 輪廓點 i 에서의 境界條件 (a), (b)는 다음과 같이 된다. ^{(1), (2), (7)}

(a) 電極上,

$$\epsilon_A \text{側 電極上: } \sum_{j=1}^m P(i, j) Q(j) + \sum_{j=m+1}^n P(i, j) Q_B(j) = V(i) \quad (4)$$

$$\epsilon_B \text{側 電極上: } \sum_{j=1}^m P(i, j) Q(j) + \sum_{j=m+1}^n P(i, j) Q_A(j) = V(i) \quad (5)$$

(b) 誘電體界面上,

電位の 連續條件:

$$\sum_{j=m+1}^n P(i, j) Q_A(j) - \sum_{j=m+1}^n P(i, j) Q_B(j) = 0 \quad (6)$$

界面上 電束密度의 連續條件:

$$\epsilon_A \left\{ \sum_{j=1}^m F_n(i, j) Q(j) + \sum_{j=m+1}^n F_n(i, j) Q_B(j) \right\} - \epsilon_B \left\{ \sum_{j=1}^m F_n(i, j) Q(j) + \sum_{j=m+1}^n F_n(i, j) Q_A(j) \right\} = 0 \quad (7)$$

여기서 $P(i, j)$ 는 電位係數이고 $F_n(i, j)$ 는 j 點의 單位電荷量이 界面上 i 點에 발생시키는 法線方向 電界인 電位係數로써 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{二次元場: } F_n(i, j) &= F_x(i, j) \sin \theta + F_y(i, j) \cos \theta \\ \text{回轉對稱場: } F_n(i, j) &= F_r(i, j) \sin \theta + F_z(i, j) \cos \theta \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 θ 는 그림 3에 표시한것 처럼 $\epsilon_A < \epsilon_B$ 인 경우 ϵ_B 로부터 ϵ_A 에 세운 직선이 y 축(또는 z 축)과 이루는 角으로 정의된다. ⁽⁷⁾

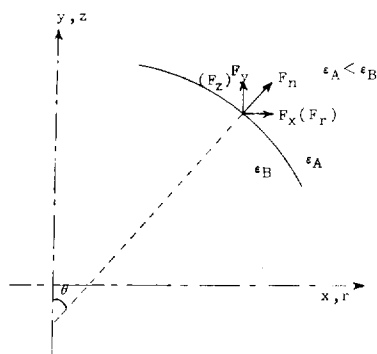


그림 3. 界面上 電界의 法線方向成分
Fig. 3. Normal field strength on the dielectric boundary

이상의 식들을 matrix로 표시하면 식 (9)와 같고 이 식에서 구하여진 電荷量을 이용하여 各所의 電位, 電界를 구하는 방법은 單一誘電體인 경우와 같다.

$$\begin{pmatrix} P(i, j) & 0 & P(i, j) \\ P(i, j) & P(i, j) & 0 \\ 0 & P(i, j) & -P(i, j) \\ (\epsilon_A - \epsilon_B) F_n(i, j) & -\epsilon_B F_n(i, j) & \epsilon_A F_n(i, j) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Q(j) \\ Q_A(j) \\ Q_B(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(i) \\ V(i) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

4. 計算 model 및 結果

4.1 單一誘電體場의 電界計算

그림 4와 같은 空氣中($\epsilon_A = \epsilon_B = 1$)의 球電極의 電位, 電界分布를 計算하여 理論值과 比較하였다. 이 計算에서 사용된 電荷數는 19個(點電荷: 1, ring 電荷: 1)이고 點 $A \sim F$ 에서의 結果가 표 1에 나와있다.

4.2 2媒質場의 電界計算

그림 5와 같이 空氣中($\epsilon_A = 1$)의 球-平板 電極에서 $\epsilon_B = 4$ 인 誘電體半球가 배치되어 있는 2媒質場을 해석

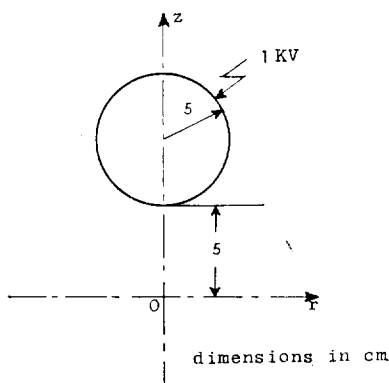


그림 4. 球電極
Fig. 4. Sphere electrode

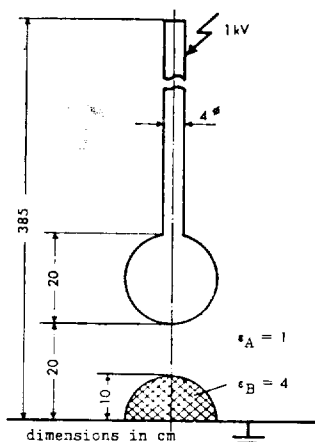


그림 5. 誘電體半球를 갖는 球-平板 電極
Fig. 5. Sphere-plane gap with dielectric hemisphere

丑 1. 球電極의 電位, 電界計算 結果

Table 1. Potentials and field strengths of the sphere electrode

計算點p(r,z)	電 位 (KV)			電 界 強 度(KV/cm)	
	理 論 值	計 算 值	誤 差 (%)	理 論 值	計 算 值
A(5, 10)	1.0	1.0	0	0.2	0.2
B(6, 10)	0.83333333	0.83332834	0.00006	0.1389	0.1389
C(7, 10)	0.714285714	0.714285284	0.00006	0.1020	0.1020
D(8, 10)	0.625	0.624999622	0.00006	0.07812	0.07812
E(9, 10)	0.555555555	0.555555219	0.00006	0.06173	0.06173
F(10, 10)	0.5	0.499999697	0.00006	0.05	0.05

丑 2. 電極表面의 電界強度

Table 2. Field strengths on the electrode surface

α	電界強度(KV/cm)
0°	0.1430
30°	0.1349
60°	0.1211
90°	0.1087
120°	0.0947
150°	0.0701

丑 3. 誘電體界面의 電界強度

Table 3. Field strengths along the dielectric boundary

α	電 界 強 度 (KV/cm)	
	DK I (ϵ_A)	DK II (ϵ_B)
0°	0.01259	0.01259
15°	0.01623	0.01288
30°	0.02535	0.01377
45°	0.03862	0.01519
60°	0.05501	0.01698
75°	0.07041	0.01866
90°	0.07713	0.01928

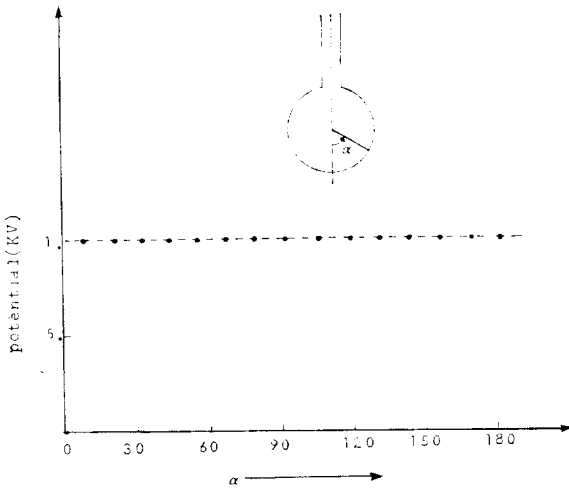


그림 6. 電極表面의 電位分布

Fig. 6. Potential distributions on the electrode surface

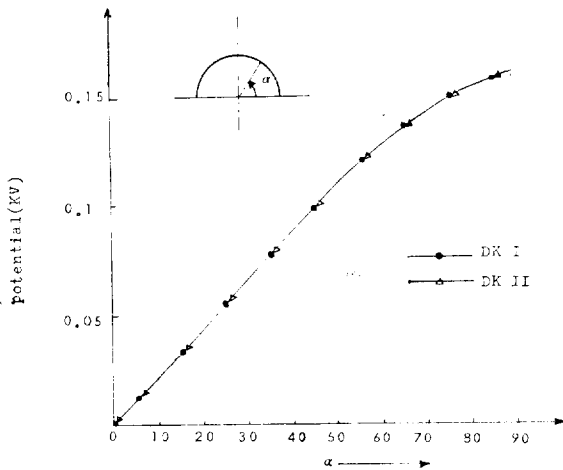


그림 7. 誘電體界面의 電位分布

Fig. 7. Potential distributions along the dielectric boundary

하였다. 計算에서 사용된 球電極의 電荷數는 31個(點電荷:1, ring 電荷:30), 誘電體界面은 20個의 ring 電荷로 模擬되었고 계산시간은 CYBER 172로 7.3초 소요되었다. 電極表面 및 誘電體界面에서의 電位, 電界分布가 그림 6, 7과 표 2, 3에 나와있다.

5. 결 론

본 논문에서는 電荷重疊法 program을 개발하고 入力의 自動化(境界形狀의 入力만으로 電荷와 輪廓點등이 자동적으로 배워치는) 및 2媒質場의 計算등 그 범위를 확장시켰다.

球電極의 해석에서 理論值와의 誤差는 $\pm 0.00006\%$, 소요시간은 3.1초 이었다. model#2의 계산결과 電極

表面의 電位誤差, 最大電界強度는 각각 $\pm 0.02\%$ 이내, 0.1430kv/cm 이었고 誘電體界面에서는 電位の 連續誤差가 $\pm 0.05\%$ 이내, 最大電界強度는 ϵ_A 側이 0.077kv/cm , ϵ_B 側이 0.0193kv/cm 이었다.

이 방법은 計算精度가 매우 높고 連立一次方程式의 係數 matrix가 order가 有限要素法에 비해 작기 때문에 高電壓機器의 精密計算등에 尤호하게 사용될 수 있고 이 program을 더욱 확장시키면 特殊場의 해석, 電界最適化法등에도 응용할 수 있다.

參 考 文 獻

- [1] P.K. Mukherjee et al.; "Computation of fields in and around insulators by fictitious point charges", IEEE Trans. Electr. Insul., Vol. EI-13, pp. 24~31, 1978.
- [2] H. Steinbigler et al.; "A charge simulation method for the calculation of high voltage fields", IEEE Trans. PAS, Vol. PAS-93, pp. 1660~1668, 1974.
- [3] S. Sato et al.; "The application of charge simulation method to the three dimensional asymmetric field with two-dielectric media", Gaseous dielectric II, pp. 312~321, Pergamon Press, Inc., 1980.
- [4] T. Takeshi et al.; "Electric fields in dielectric multi-layers calculated by digital computer", IEEE Trans., Electr. Insul., Vol. EI-13, pp. 37~44, 1978.
- [5] M.D.R. Beasley et al.; "Comparative study of three method for computing electric fields", Proc. IEE, Vol. 126 No. 1, 1979.
- [6] 電氣學會技術報告, "最近의 電界計算法(II部)," 第 98號, 1980. 8.
- [7] 宅間 董, 他; "數值電界計算法", corona社, 1980. 10.
- [8] 李民濟; "最近의 電界解析法과 그 應用", 電試研報 Vol. 4, No. 2, 1980.
- [9] P.J. Lawrenson et al.; "Analysis and computation of electric and magnetic problems", Pergamon Press, Inc., 1973.
- [10] 李民濟; "各種 數值電界計算法의 比較와 應用", 전기학회지 Vol. 30, No. 7, 1981. 7.