

有限要素法에 의한 交流磁場計算에 관한 研究

論 文
30~7~2

—프로그램 TDEDDY 개발—

Alternating Magnetic Field Calculations by Finite Element Method

—Development of the Program TDEDDY—

金 仁 鎬* · 鄭 炫 教** · 李 基 植*** · 韓 松 曄****
(In-Ho Kim · Hyun-Kyo Jung · Gi-Shik Lee · Song-Yup Hahn)

Abstract

To solve alternating magnetic field problems, the program TDEDDY is developed with the use of the finite element method. Triangular finite elements of the first order are employed for the discretization of the field region. This program is constructed through an interactive system to check errors immediately when every routine is executed, and several subprograms are employed for the graphic representation of computed results.

As an example, it is applied to a model of semi-infinite slab excited by an alternating current source. Results by the program TDEDDY show the satisfactory accuracy in comparison with those of analytic calculations.

1. 서 론

有限要素法(Finite Element Method)은 연속계를 등가적인 이산계로 변환하여 취급하는 수치해석기술이다. 이 방법은 1950년대에 구조역학분야에서 처음 사용되기 시작하였는데 복잡한 기하학적 구조를 갖는 공학문제를 취급하는데 있어서 종래의 差分法보다 유리한 점이 많아 오늘날에는 모든 공학분야에서 널리 쓰이고 있다.

電氣工學분야에서는 1970년대초부터 電磁場계산에 이 방법⁽¹⁾이 쓰이기 시작하여 오늘날에는 많은 전기기기 제작회사에서 실용화되고 있다. 우리나라에서는 이에 관한 연구가 최근에 와서 비로서 시작되었는데 1979년 10월부터 서울대학교 공과대학 전기공학과 대학원 과정에서 靜電磁場계산용 프로그램 POISON이 이용되

었고 그후 靜磁場에 관한 논문^{(2)~(5)}이 수편 발표되었다. 그러나 유한 요소법에 의한 交流磁場 또는 渦流계산에 관한 연구는 몇 편^{(6)~(7)}에 지나지 않고 그 결과의 정확도 등에 대한 검토가 없어서 아직도 이에 관한 연구가 더욱 필요한 실정이다.

본 연구에서는 2차원에서 交流磁場 또는 渦流계산을 할 수 있는 프로그램 TDEDDY를 완성하였고 이 프로그램을 交流電流와 半無限平面導體의 모델에 적용하여 그 정확도를 검토하였다.

2. 알고리즘 導出

2.1 기본방정식

변위전류를 무시한 경우 線型媒質內에서 電磁場 방정식은

$$\nabla^2 \frac{A}{\mu} = \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - J, \tag{1}$$

로 표시된다. 여기서 μ 와 σ 는 각각 매질의 투자율 및 도전율이고 J 는 電流源이다. 또 A 는

$$\nabla \times A = B \tag{2}$$

*正會員: 서울大 大學院 電氣工學科 碩士課程
**正會員: 서울大 大學院 電氣工學科 博士課程
***正會員: 서울大 大學院 電氣工學科 博士課程
****正會員: 서울大 工大 電氣工學科 教授 · 工博
接受日字: 1981年 4月 23日

로 정의되는 벡터포텐셜이며 B 는 磁束密度이다.

본 연구에서는 2차원 交流磁場문제를 취급하기로 하였으므로 아래와 같은 가정을 취하였다.

(1) 電流源과 벡터포텐셜은 x -성분만을 갖고 正弦波 狀으로 변화한다.

(2) 媒質의 투자율 및 도전율은 일정하고 히스테리시스 및 자기포화현상은 무시한다.

위의 가정으로 벡터포텐셜 A 및 電流源 J_z 의 x -성분은

$$A_x = R_x [A(x, y) e^{j\omega t}] \quad (3)$$

$$J_{z,x} = R_x [J_z(x, y) e^{j\omega t}] \quad (4)$$

로 놓을 수 있고, 따라서 식(1)은

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = j\omega\sigma A - J_x \quad (5)$$

와 같이 된다. 여기서 A 및 J_x 는 복소량이다.

2.2 變分源理 적용

식(5)의 해법으로 본 연구에서는 變分法⁽⁶⁾을 이용하였다. 즉 식(5)을 직접 푸는 대신 복소량 A 를 변수로 하는 汎函數 F 를 정한 다음 이 汎函數 F 가 극치를 갖게 하는 A 를 구하였다. 식(5)에 해당하는 汎函數 F 는

$$F = \frac{1}{2\mu} \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} ds + \frac{j\omega\sigma}{2} \iint_R A^2 ds - \iint_R J_x A ds \quad (6)$$

이다. 여기서 R 은 계산영역인데 이 영역은 그 경계에서

$$A = \text{一定} \quad (7)$$

또는

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad (8)$$

가 되도록 잡아야 한다. 식(8)에서 n 은 경계면의 法線 方向 단위벡터이다.

2.3 有限要素法 적용

식(6)을 풀기 위하여 먼저 계산영역을 소영역(요소)으로 분할하였는데 본 연구에서는 그림 2-1과 같이 삼각형 요소를 택했다. 요소내에서 복소량 $A^*(x, y)$ 는 그 정점의 복소량 A_i, A_j 및 A_k 의 일차선형조합으로 표시하였다.

즉

$$A^*(x, y) = N_i(x, y) A_i + N_j(x, y) A_j + N_k(x, y) A_k \quad (9)$$

여기서

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A_e} (a_i + b_i x + c_i y)$$

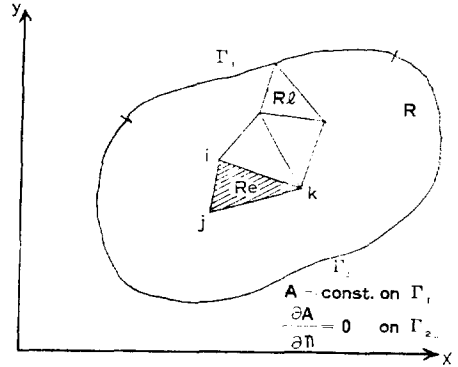


그림 2-1. 요소 및 경계 조건

Fig. 2-1. Elements and Boundary Conditions

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

이고, N_i, N_k 도 같은 방법으로 구해진다.

영역 R 을 m 개의 정점을 갖는 l 개의 요소로 나누었다면 식(6)은

$$F = \sum_{e=1}^l F_e(A_i, A_j, A_k) = F(A_a, A_b, \dots, A_i, A_j, A_k, \dots, A_m) \quad (10)$$

여기서

$$F_e(A_i, A_j, A_k) = \frac{1}{2\mu} \iint_{R_e} \left\{ \left(\frac{\partial A^*}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A^*}{\partial y} \right)^2 \right\} ds + \frac{j\omega\sigma}{2} \iint_{R_e} (A^*)^2 ds - \iint_{R_e} J_x \cdot A^* ds \quad (11)$$

이다. 범함수 F 가 극치를 갖기 위해서

$$\frac{\partial F}{\partial A_q} = \sum_{e=1}^l \frac{\partial F_e}{\partial A_q} = 0, \quad q = a, b, \dots, i, j, k, \dots, m \quad (12)$$

이어야 하고 이는

$$\{ [S_{pq}] + j[T_{pq}] \} [A_q] = [U_p], \quad p, q = a, b, \dots, i, j, k, \dots, m \quad (13)$$

로 표시되는 선형연립방정식이 된다. 여기서 $[S_{pq}]$ 와 $[T_{pq}]$ 는 $m \times m$ 대칭행렬, $[U_p]$ 는 $m \times 1$ 행렬이다. 이들 행렬은

$$\frac{\partial F_e}{\partial A_q} = 0, \quad q = i, j, k \quad (14)$$

를 만족하는 요소행렬 $[S_{pq}^*], [T_{pq}^*], [U_p^*]$ 로 쉽게 구해지는데

$$S_{pq}^* = \frac{1}{4A_e \mu_e} (b_p b_q + c_p c_q) \quad (15)$$

$$T_{pq} = \begin{cases} \frac{\omega \sigma_p \Delta z}{6} & (p=q) \\ \frac{\omega \sigma_p \Delta z}{12} & (p \neq q) \end{cases} \quad (16)$$

$$U_p = \frac{J_p \Delta z}{3}, \quad p, q = i, j, k \quad (17)$$

이다.

3. 프로그램 TDEDDY

이 프로그램은 앞 절에서 기술한 알고리즘에 따라 2차원 渦流문제 풀 수 있도록 되어 있으며 전체가 對話型으로 짜여 있어 계산 중간과정을 감지할 수 있고 계산결과를 Graphic CRT나 작도장치에 의해 여러 가지 형태로 표현할 수 있다.

전체의 흐름은 그림 3-1과 같이 되어 있으며, 크게 3개의 블럭으로 나뉘어 있고 각 블럭으로 넘어갈 때마다 에러체크를 할 수 있다.

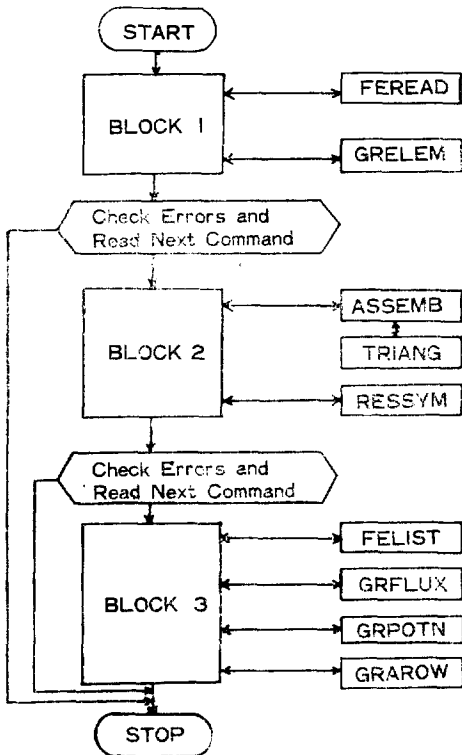


그림 3-1. 프로그램 TDEDDY의 흐름도
Fig. 3-1. Flow Chart of the Program TDEDDY

부프로그램 BLOCK1은 다시 부프로그램 FEREAD와 GRELEM으로 이루어지며, 전자는 요소의 정점좌표, 요소에 연결된 정점번호, 요소의 대질정수 및 전류밀도 등을 읽어들이며 후자는 이들 데이터로 요소의

모양을 그리는 역할을 한다. 읽어들이는 데이터에 잘못이 있으면 착오메시지가 화면에 나타나고 이것은 GR-ELEM에서 그린 요소모양에서도 볼 수 있다. 그러므로 BLOCK1이 수행된 후 異常有無의 결과에 따라 계산기가 다시 데이터를 읽게 하든지 BLOCK2를 수행하도록 명령한다.

부프로그램 BLOCK2는 부프로그램 ASSEMB와 RESSYM으로 이루어진다. ASSEMB는 요소행렬 [식 (15)(16)(17)]을 계산하는 부프로그램 TRIANG을 이용하여 계통행렬방정식 [식 (13)]을 만들어내며, RESSYM은 이식의 해를 구한다. 여기서는 직접해법의 일종인 역삼각화법을 적용하였다. 이 BLOCK2가 수행되는 동안에도 여러 단계에서 오류를 점검하는데, 이상이 있으면 CRT화면에 착오메시지가 나타난다.

부프로그램 BLOCK3은 앞에서 계산된 벡터포텐셜을 출력지에 적어내거나 등磁位線등을 그림으로 나타내게 하는 부분이다. 그림을 그리는 부프로그램에는 GRFLUX, GRPOTN, GRAROW가 있는데, 첫번째 것은 자력선의 시간변화를 그리고, 두번째 것은 복소량 A의 실수부 및 허수부를 각각 등磁位線으로 표시하며, 마지막 것은 磁力線의 크기와 방향을 화살표형식으로 표현하는 부프로그램이다.

4. 계산 예

본 연구에서 개발된 TDEDDY를 이용하여 한 交流勵磁시스템의 交流磁束分布 및 渦流分布를 계산하여 보았다. 즉 그림 4-1과 같이 半無限平面導體 가가이에 交流電流를 흘리는 경우를 취급하였는데 磁滲성을 고려하여 계산영역을 그림 4-2와 같이 요소수 620개, 정점수 352개의 반평면만 취했다. 도체의 깊이 (y축방향)는 침투깊이 ($\delta = \sqrt{1/\pi f \mu \sigma} \approx 8.53\text{mm}$)의 약 8배, 도체의 길이 (x축 방향)는 도체와 전류원과의 거리 ($a = 10.5\text{mm}$)의 약 8배를 취하였다. 半無限平面導體의 도전율은 $0.58 \times 10^8 \text{ } \Omega/\text{m}$, 비투자율은 1, 交流電源電流는 60Hz 正弦波 $0.2 \times 10^{10} \text{ A/m}^2$ (最大値)을 주었다. 그림

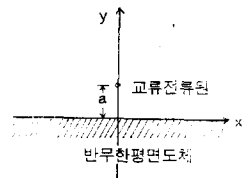


그림 4-1. 교류전류원과 반무한 평면도체
Fig. 4-1. Alternating Current Source and a Semi-infinite Slab

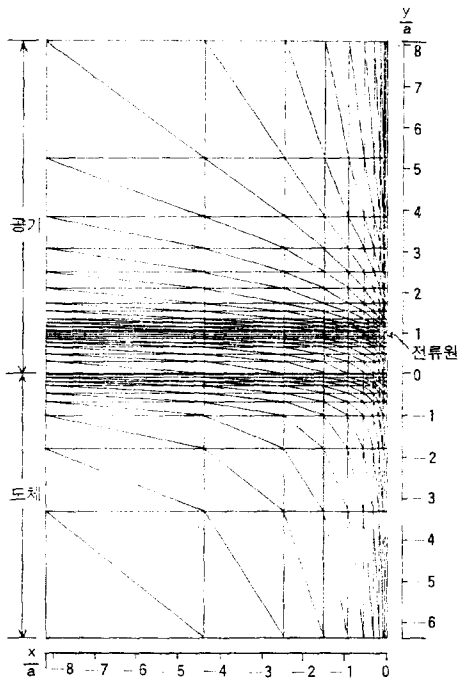


그림 4-2. 요소분할
Fig. 4-2. Element Discretization

4-2의 하단, 상단 및 좌단의 벡터포텐셜을 零으로 두고 FEM法으로 각 정점의 벡터포텐셜을 구하였으며, 이 값으로부터 도체내부의 誘導電流(渦流), 磁界의 세기, 磁束의 시간변화, 磁束의 방향 등을 구했다.

그림 4-3은 導體내부에서 벡터포텐셜의 分布를 그린 것이다. 그림 4-4는 電流源直下에서의 誘導電流密度를 그 표면 誘導電流密度的 比로써 나타낸 것이다. FEM

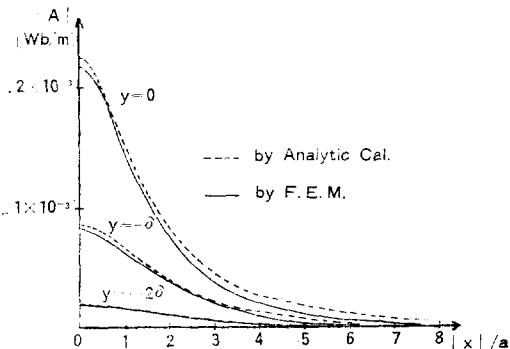


그림 4-3. 도체내부의 벡터 포텐셜(rms)
Fig. 4-3. RMS Vector Potentials in a Semi-infinite Slab

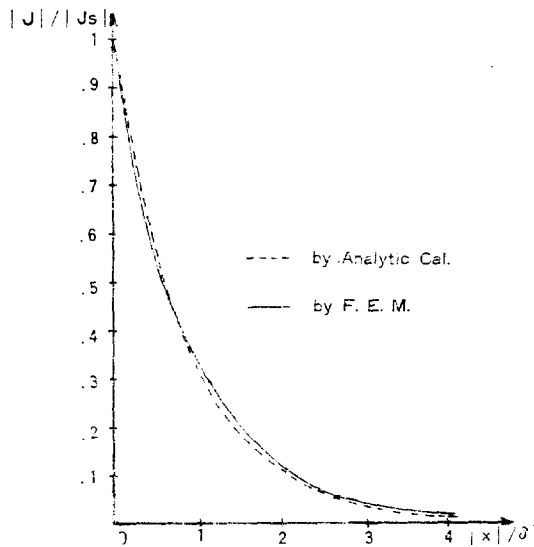


그림 4-4. 전류원 직하에서의 도체 전류밀도
Fig. 4-4. Current Density in a Semi-infinite Slab immediately below a Line Current Source

에 의한 결과와 해석적인 결과^{(9),(10)}가 잘 일치함을 알 수 있다. 그림 4-3과 그림 4-4에서 계산精度는 각각의 최대치에 대해 5%이내의 오차범위를 갖고 있는데 이는 실제 공학문제에 적용하는데 있어 충분히 받아들여질 수 있는 오차범위라 할 수 있다.

도체내부에서 $y = -0.03a$ 인 선상에서의 磁界의 세기 H_x 및 H_y 를 표시하면 그림 4-5와 같이 된다. FEM에 의한 결과는 계단함수로 나타나고 있는데 이것은 요소내에서의 補間함수(Interpolation Function)를 線型[식(9)]으로 취하였기 때문이다.

그림 4-6은 부프로그램 GRFLUX로 시간변화에 따른 磁束分布를 나타낸다. 시간변화에 따라 磁束이 도체내부로 침투하여 들어가는 현상을 잘 관찰할 수 있다. 이때 (d)의 경우는 (a)에 비해 電流源 주위에 磁束이 몰려있는데 이는 자속이 電流源과 導體에 흐르는 誘導電流의 合成電流에 의해 발생하며 이 두 電流 사이에 위상차가 있기 때문이다. 또한 요소분할을 그림 4-2와 같이 전류원에서 멀리 떨어진 부분에서는 크게 하였기 때문에 각 磁束分布가 그 부분에서는 완만하지 못함을 나타내고 있다.

그림 4-7 (a) 및 (b)는 부프로그램 GRPOTN으로 식 (3)에 나타난 복소량 A의 실수부와 허수부의 분포를 그린 것이다. 이 두 그림을 이용하면 주어진 영역內的 임의점에서의 벡터포텐셜을 구할 수 있다. 즉 어떤 점의 벡터포텐셜을 구하려면 그림(a) 및 (b)에서 그 점의

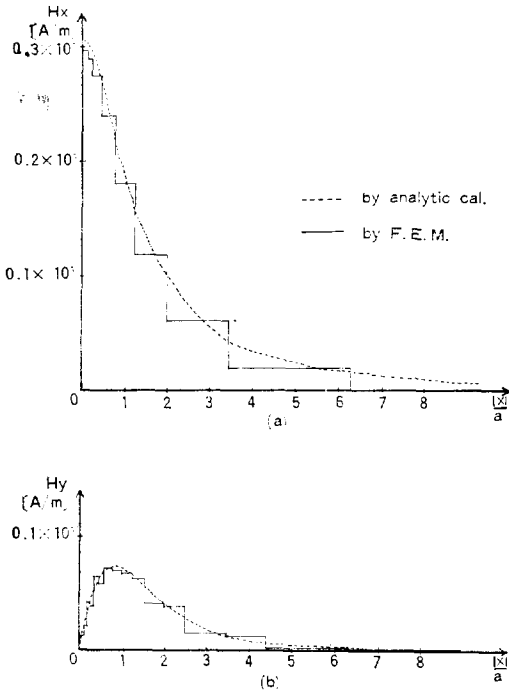


그림 4-5. 도체표면 ($y = -0.03\delta$)에서의 자계의 세기 분포
 Fig. 4-5. Field Intensity Distributions on a Semi-infinite Slab Surface

A_x 및 A_y 를 구하고,

$$A(x, y) = A_r(x, y) + jA_i(x, y) \quad (18)$$

로 한 다음 식(3)을 이용하여 벡터포텐셜을 구한다.

그림 4-8은 부프로그램 GRAROW에 의하여 $\omega t = 0^\circ$ 일때 도체내부에서 자속의 크기와 방향을 그린 것이다

5. 결 론

2차원 공간에서 有限要素法으로 交流磁場을 계산하기 위한 프로그램 TDEDDY를 개발하였고 이 프로그램이 실제로 어느 정도의 계산精度를 갖고 있는지를 예제를 통하여 보여주었다.

전체 프로그램은 對話型으로 짜여 있어 계산과정에서 발생하는 오류를 적시에 감지하여 계산시간의 낭비를 줄였고, 출력출을 여러개의 부프로그램을 이용하여 그림으로 나타낼 수 있게 하였다.

交流電流源과 半無限平面導體 모델을 620개의 요소와 352개의 정점으로 나누는 다음, 본 프로그램으로 벡터포텐셜, 渦流分布, 磁場分布 등을 계산하였는데 해석적 결과와 큰 오차없이 잘 일치하였다. 따라서 본

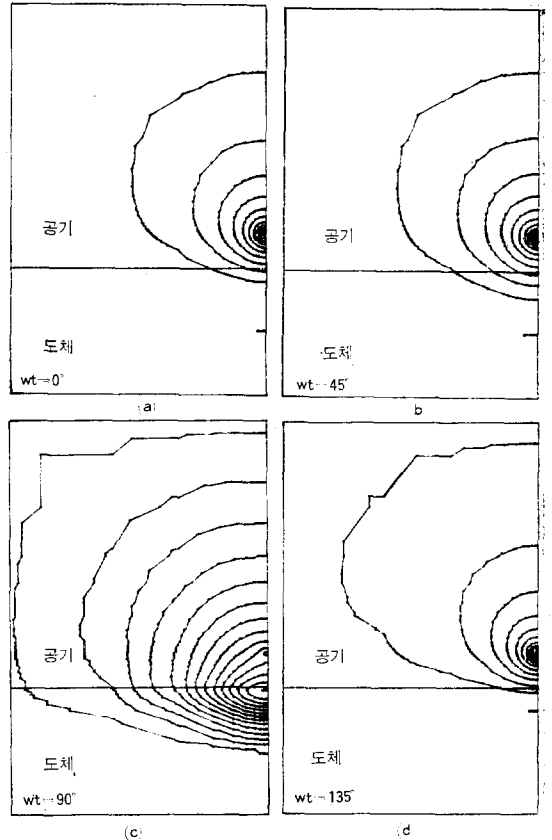


그림 4-6. 시간 변화에 따른 자속분포
 Fig. 4-6. Flux Distributions

프로그램 TDEDDY는 400개 정도의 미지수를 갖는 交流磁場問題를 해석하는데 있어 쉽게 적용될 수 있을 것으로 기대한다.

계산精度도 좋았고 계산 결과의 표시가 여러가지 형태로 쉽게 표현될 수 있어 앞으로 실제 공학 문제를 해석 또는 설계하는데 도움이 되리라 생각한다.

끝으로 본 연구는 80년도 현대연구비에 의하여 이루어졌음을 알리는 바입니다.

參 考 文 獻

[1] P.P. Silvester and M.V.K. Chari, "Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems", IEEE Trans. PAS, Vol. PAS-89, pp. 1642~1652, 1970.
 [2] 박민호, 한송엽, 이기식; "유한요소법에 의한 電磁場계산 프로그램개발", 제10회 전기기기 연구발표회, 1979년 12월.

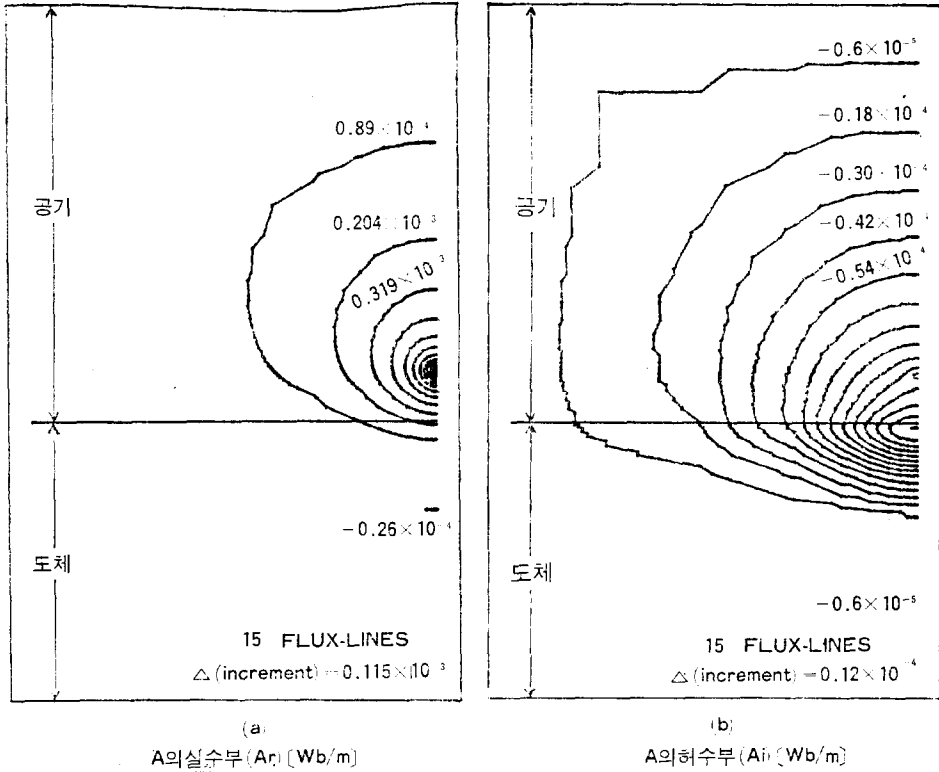


그림 4-7. 복소량 A의 분포
Fig. 4-7. Distributions of Complex Value A

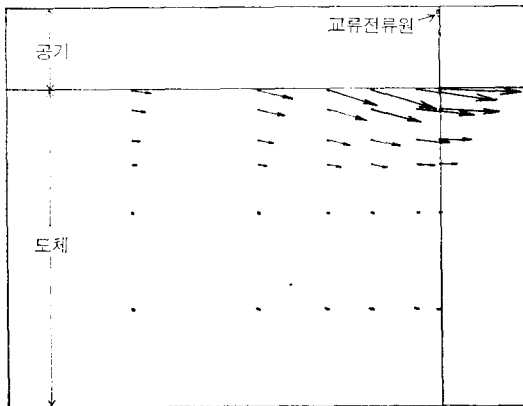


그림 4-8. 도체내의 자계의 세기 ($\omega t = 0^\circ$)
Fig. 4-8. Field Intensities in a Semi-infinite Slab ($\omega t = 0^\circ$)

[3] 이승원, 이병하; "The Determination of the Magnetic Field in the Air Gap of the Linear Stepper Motor by the Finite Element Method", 제10회 전기기기 연구발표회, 1979년 12월.

- [4] 임달호, 현동석, 이철직; "有限要素法에 의한 變壓器의 磁束分布 解析에 관한 研究", 대한전기학회지, 제29권, 제4호, pp.247~255, 1980년 4월.
- [5] 이기식; "有限要素法에 의한 磁氣回路 解析", 대한전기학회지, 제29권, 제9호, pp.599~603, 1980년 9월.
- [6] 정현교, 이기식; "有限要素法에 의한 渦流損 계산", 제12회 전기기기 연구발표회, 1980년 11월.
- [7] 김영중, 임달호; "유도형 Linear Motor의 설계물 위한 자속 분포해석에 유한요소법 적용 연구", 제12회 전기기기 연구발표회, 1980년 11월.
- [8] K.H. Huebner, The Finite Element Method for Engineers, John Wiley & Sons, Inc., 1975, pp.438~448.
- [9] Miloš Štafl, Electrodynamics of Electrical Machines, ILIFFE Books Ltd., London, 1967, pp.151~165.
- [10] R.L. Stoll, The Analysis of Eddy Currents, OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1974, pp.63~71.