

# 各種 數值電界計算法の 比較와 應用

李 民 濟\*

1. 序 論	3.1 抵抗分을 갖는 場
2. 計算法の 基礎	3.2 Ion流場의 計算
2.1 差分法	3.2 空間電荷가 존재하는 場
2.2 有限要素法	3.3 Combination法
2.3 電荷重疊法	4. 最適形狀의 自動計算法
2.4 表面電荷法	4.1 電極形狀의 最適化
2.5 數值電界計算法の 特徵	4.2 絶緣物形狀의 最適化
3. 特殊場의 計算法	5. 結 論

## 2. 計算法の 基礎

### 1. 序 論

高電壓이 인가되는 機器의 絶緣設計, 放電現象의 解析 등 많은 분야에서 電界計算은 매우 重要한 역할을 하고 있다.

電位, 電界의 분포를 구하는 方法에는 數值의 方法이 的 等角寫像, 座標變換등의 解析의 方法과 電解槽, 抵抗紙를 이용하는 實驗的 方法 등이 있지만 여기서는 최근의 발전이 현저하고 적용범위가 광범한 數值電界計算法에 한하여 설명하기로 한다.

1960年代末 電荷重疊法에 의한 電界計算法이 개발된 이래 差分法, 有限要素法을 포함한 數值電界計算法이 대단히 발전되었다. 현재까지 이러한 기본적인 計算法의 확립, 개발 및 計算精度 등에 대해서 제 1 단계는 종료된 감이 있고 최근에는 단순한 靜電界計算단인 아닌 보다 實際場에 가까운 해석이 이루어지고 있다. 즉 一般三次元場의 計算, 空間電荷, Ion 流場의 計算, 漏波抵抗이 있는 場의 計算 등이 이루어지고 보다 計算精度도 향상되고 있다<sup>(1)</sup>.

入出力의 自動化 및 最適形狀의 自動計算(電界最適化法)도 최근 특징의 하나이다.

다음에는 각종 數值計算法の 基礎와 特徵, 特殊場의 計算 등 최근의 進歩상황에 초점을 집중시켜 설명을 한다.

靜電界計算은 境界 S의 내부에서 Laplace方程式  $div(grad\phi)=0$

$$(\phi) \text{ at } S=\phi_0 \tag{2}$$

에 의하여 函數  $\phi$ 를 구하는 境界值問題이다. 여기서  $\phi$ 는 電壓, S는 電極表面이다. 그리고 電界 E는

$$E=-grad\phi \tag{3}$$

로써 주어진다.

空間電荷  $\rho$ 가 존재하는 곳에서는 Poisson의 方程式  $div(grad\phi)=-\rho/\epsilon$

$$\tag{4}$$

를 사용하여야 한다. 또한 문제에 따라서는 (2)식과는 다른 境界條件이 필요하다. 例로써 電氣力線이 面에 沿한 成分만일 경우 다음의 境界條件이 자주 사용된다.

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{atS}=0$$

( $\partial\phi/\partial n$ 은  $\phi$ 의 法線方向微係數)

또한 1種類이상의 誘電體가 존재하는 複合誘電體場에서는 (1)식 대신에 誘電率  $\epsilon$ 를 포함한 식

$$div(\epsilon grad\phi)=0 \tag{5}$$

를 사용하여야 한다. 그러나 보통의 靜電界問題에서는 誘電率이 장소와 함께 연속적으로 변화하는 경우는 거의 없기 때문에 誘電率이 일정한 영역에 (1)식을 적용하고 誘電體境界面에 適當한 境界條件을 적용하는 것이 보통의 計算方法이다<sup>(2)</sup>.

正會員: 서울大 大學院 電氣工學科 碩士課程

2.1 差分法(Finite difference method)

差分法은 오래전부터 연구되어 온 數值的方法으로써 電界計算에도 다른 방법보다 먼저 적용되었다. 差分法의 기본은 領域을 格子로 分割하고 各格子點의 電位를 Taylor 전개하여 Laplace方程式을 近接格子點間의 關係式으로 하는 것이다.

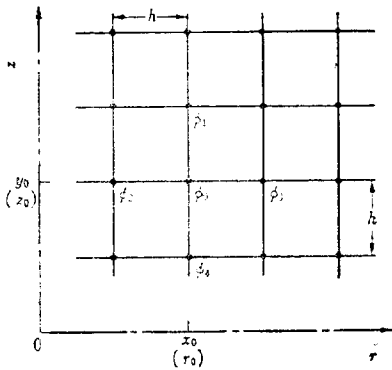
$r, z$ 의 回轉對稱場에서 그림 1(a)와 같은 等間隔格子(間隔  $h$ )의 경우에는  $\phi_0 = \phi(r_0, z_0)$ ,  $\phi_1 = \phi(r_0, z_0 + h)$  등으로 표시하고 Taylor전개의 二次微分項까지 취하면 (1)식은 다음 식과 같이 近似된다.

$$4\phi_0 - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + (h/2r_0) \times (\phi_2 - \phi_4) = 0 \quad (6)$$

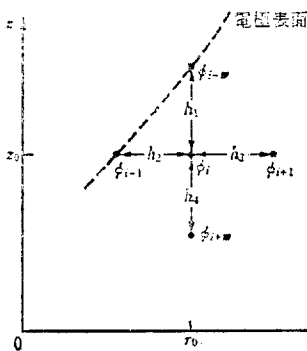
또 格子間隔이 다른 경우 그림 1(b)와 같이 格子點의 번호를 붙이면  $i$ 번 格子點에 있어서

$$P_{i,i}\phi_i + P_{i,i-m}\phi_{i-m} + P_{i,i-1}\phi_{i-1} + P_{i,i+1}\phi_{i+1} + P_{i,i+m}\phi_{i+m} = 0 \quad (7)$$

와 같은 格子點電位  $\phi_i$ 에 대한 一次式이 주어진다. 여기서  $P_{ij}$ 는 格子間隔  $h_1 \sim h_4$ 와  $i$ 點의 좌표  $r_0$ 로써 주어지는 係數이고 최초의 添字는 連立方程式의  $i$ 行인 것



(a) 格子間隔이 일정한 경우



(b) 格子間隔이 다른 경우

그림 1. 差分法에 의한 領域의 分割

을 표시한다.

領域全體의 格子點에 식 (6), (7)을 적용해서 全體의 連立一次方程式을 境界條件(電極上에서  $\phi_i = V_0$ ; 電極電壓)을 이용하여 풀면 各點의 電位가 구하여진다. 즉

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

의 多元連立一次方程式을 푸는 문제가 된다<sup>(9)</sup>.

이와 같이 差分法의 원리는 극히 간단하고 Program도 容易하지만 실제의 計算에 있어서는 領域分割, 境界의 處理, 方程式의 解法 등 各종의 문제가 있기 때문에 최근에는 有限要素法으로 점차 옮겨가는 경향이 다.

2.2 有限要素法(Finite element method)

有限要素法은 機械, 建築, 土木 등의 분야에서 構造解析의 方法으로써 눈부신 발전을 하였고 靜電界計算에 있어서도 近年 有限要素法의 利點을 살려 이용의 증가가 현저하다.

差分法이 Laplace方程式에서 직접 格子點電位  $\phi_i$ 의 關係式을 유도하는데 대해 有限要素法은 領域을 有限要素라 불리는 小面積(二次元), 또는 小體積(三次元)으로 分割하여 要素의 特性을 간단한 關係로 표시하고 Potential energy 最小原理를 적용하여 定式化한다.

일반적으로 誘電率  $\epsilon$ 를 포함하는 電位의 方程式은 (5)식이지만 이것은 變分法에서의 Euler理論에 의해 Potential energy  $X$ 를 最小化시키는 것과 等價이다.

여기서  $X$ 는

$$X = \frac{1}{2} \int \epsilon \sum_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)^2 \left\{ \begin{matrix} d(\text{surface}) (\text{二次元}) \\ d(\text{volume}) (\text{三次元}) \end{matrix} \right. \quad (9)$$

構造解析 分野에서의 利用에 따라 여러가지 計算 Technique이 개발되고 있으나 여기서는 電位  $\phi$ 의 一次方程式에 이르는 과정을 간단하게 기술한다.

二次元場의 例에서 領域을 그림 2와 같이 三角形으로 分割하여 三角形要素 1內의 電位  $\phi$ 를 座標  $x, y$ 의 一次多項式으로써 표시한다.

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (10)$$

$\alpha_1 \sim \alpha_3$ 는 三角形의 3頂點(節點)  $i, j, m$ 의 座標와  $\phi$ 로부터 다음의 식에서 계산된다.

$$\left. \begin{matrix} \phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ \phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ \phi_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{matrix} \right\} \quad (11)$$

즉  $\phi$ 를 matrix로 표시하면

$$\phi = \begin{pmatrix} N_i & N_j & N_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \text{等}$$

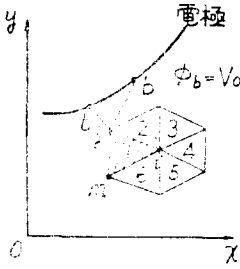


그림 2. 有限要素法에 의한 領域分割

여기서  $a_i, b_i, c_i$ 는  $i, j, m$ 점의 座標에서 定하여지는 定數,  $\Delta$ 는 要素의 面積이다.

이  $\phi$ 의 값을 (9)식에 대입하면 하나의 三角形要素의 Potential energy  $X(e)$ 가 구하여지고 領域全體의  $X$ 는 各要素의 和  $X = \sum X(e)$ 이다.  $X$ 를 最小로 하는 process는 各節點의 電位  $\phi_i$ 를 Parameter로 하여  $\phi_i$ 에 대한 微分을 0으로 하는 것이다. 그리하면 그림 2에서는  $i$ 節點에 關係되는 6개 要素의 微分만이 남는다.

$$\frac{\partial X}{\partial \phi_i} = \sum_{e=1}^6 \frac{\partial X(e)}{\partial \phi_i} = 0 \quad (13)$$

(12)식에서도 알 수 있는 바와 같이  $\phi$ 는 座標  $x, y$ , 節點電位  $\phi_i, \phi_j, \phi_m$  兩者에 대한 一次式이다. 따라서 potential energy  $X$ 의 被積分項은  $x, y$ 의 項은 偏微分에서 消去되고  $\phi_i \sim \phi_m$ 의 二次式이 되고 또한 (13)식에 의하여  $\phi_i \sim \phi_m$ 의 一次式이 유도된다.

즉  $n$ 個의 全節點電位  $\phi_i$ 에 대한 微分과 境界條件(電極上의 節點電位  $\phi_b = V_0$ )으로부터 (8)식과 같은  $\phi_i$ 의 連立一次方程式이 형성되고 差分法과 같은 方程式解法의 문제에 귀착된다.

有限要素法은 場을 규칙적으로 分割하여 (10)식을 이용할 때에는 差分法과 같은 方程式이 되며 이점은 없다. 그러나 불규칙적인 分割, 복잡한 境界形狀의 처리, 6節點을 갖는 要素의 使用(電位는 座標의 二次式으로 表現) 등에 解의 精度를 향상시킬 수 있는 手法을 사용할 수 있다<sup>(1)</sup>.

### 2.3 電荷重疊法(Charge simulation method)

Laplace 方程式을 만족시키는 몇개의 解  $u_1, u_2 \dots u_n$ 의 和  $\phi$ 가 場의 境界條件을 만족시킨다면 靜電界의 唯一性定理에 의하여  $\phi$ 는 求하는 解가 된다. 이와같이 部分解의 和에 의하여 解를 求하는 方法은 오래전부터 검토되었고 解析的 方法의 級數解도 이것의 一例이다.

電荷重疊法은 實제는 電極의 表面電荷로써 형성되는

場을 電極內部에 배치한 有限個의 假想電荷에 의한 電位場  $u_i$ 의 和로 求하는 것이 그 기본이다. 假想電荷群에 의한 場  $\phi = \sum u_i$ 의 等電位面이 電極表面과 일치된다면 各  $u_i$ 는 Laplace 方程式을 만족시키므로  $\phi$ 가 電極外部의 正解가 된다는 것이 보증된다. 假想電荷로써 點, 線, Ring電荷를 使用하는 電荷重疊法이 많은 軸對稱電界問題의 有력한 解法이라는 것을 제시한 것은 Steinbigler로써 1969年의 일이지만 그후 各種의 問題에 적용되었고 다른 數值的方法和 平行하여 發展 途上에 있다.

그림 3은 電荷重疊法의 說明圖이다.

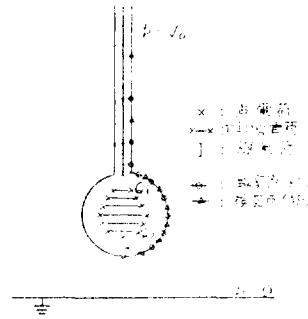


그림 3. 電荷重疊法의 說明圖

點, 線, Ring 電荷의 電荷量을  $O_i$ 라 하면  $O_i$ 는  $j$ 點에  $u_i = P_{ji} O_i$ 의 電位를 誘起시키고  $j$ 點의 全電位  $\phi_j$ 는  $n$ 個의 電荷作用의 線形和  $\phi_j = \sum_{i=1}^n P_{ji} O_i$ 로 된다. 電極表面上的 適當한  $n$ 個의 點(輪廓點: KP點)에서 假想電荷群에 의한 電位(影像電荷의 作用도 포함)를 電極電壓과 같게 놓으면 다음의 連立一次方程式이 形成된다.

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_1 \\ \dots \\ O_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

電極電壓  $V_1 \sim V_n$ (그림 3에서는 전부  $V_0$ )는 境界條件으로써 주어지고 係數  $P_{ji}$ 는 假想電荷와 輪廓點의 위치가 定하여지면 計算할 수 있으므로 (14)식으로부터  $O_1 \sim O_n$ 가 구하여진다. 電荷量이 구하여지면 이것에 의하여 領域中의 任意의 點의 電位, 電界를 解析的으로 計算할 수 있다.

즉 電位는  $\phi = \sum_{i=1}^n P_{ji} O_i$ , 電界는

$$E_r = \sum_{i=1}^n F_{ji} O_i, \quad E_z = \sum_{i=1}^n G_{ji} O_i \quad (15)$$

로부터 計算된다( $F, G$ 는 係數). 解의 精度는 電極形狀이 어느 정도 等電位面으로 模擬되는가에 의 존되기 때문에 通常 輪廓點의 中間에 「檢査點: AP點」을 취하

고 이 點의 電位가 어느 정도 電極電壓에 近接하는가 를 조사한다.

電荷重疊法의 원리는 매우 간단하고 또한 有限要素法에 비해 Program도 容易하다. 그러나 實際의 計算에서는 解의 精度가 輪廓點과 假想電荷의 배치에 의존되기 때문에 다소의 經驗을 필요로 하는 등의 문제가 있다<sup>(12)</sup>.

2.4 表面電荷法(Surface charge method)

表面電荷法은 場을 形成하는 電極表面上의 電荷를 分割하는 方法이다. 表面에 分割된 電荷의 값을 電極表面의 輪廓點의 電位로부터 구하는 點은 電荷重疊法과 같다.

一般的으로 表面積 S의 電極이 點 P에 誘起시키는 電位  $\phi$ 는 다음 식으로 주어진다(그림 4).

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_s \frac{\sigma ds}{l} \quad (16)$$

여기서  $\sigma$ 는 微小面積  $ds$ 上的 表面電荷密度,  $l$ 은 點 P와  $ds$  사이의 거리이다.

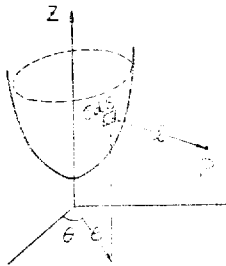


그림 4. 表面電荷法

回轉對稱場에서는 그림 5에 표시한 것처럼 電極의  $i$ 區分이 點  $P(r, z)$ 에 誘起시키는 電位  $u_i$ 는 微小거리  $dt$ 의 座標를  $(e, d)$ , 電荷密度를  $\sigma_i$ 로 하면

$$u_i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{t_1}^{t_2} \sigma_i dt \int_0^{2\pi} \frac{ed\theta}{\sqrt{(r-e)^2 + (z-d)^2 + 2er(1-\cos\theta)}} \\ = \frac{1}{\pi\epsilon} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sigma_i e K(k)}{\sqrt{(r+e)^2 + (z-d)^2}} dt \quad (17)$$

여기서  $K(k)$ 는 第一種完全橢圓積分으로써  $k = \sqrt{4er / (r+e)^2 + (z-d)^2}$  이다.

各區分의 電荷密度  $\sigma_i$ 를 區分內에서 一定하게 하면 電界計算은 電荷重疊法과 같은 Process가 된다. 즉 計算의 순서는 다음과 같다.

- (a) 電極表面을  $n$ 區分으로 分割한다.
- (b) 各區分上의 적당한 處에 輪廓點을 취하고 輪廓

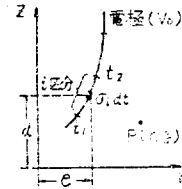


그림 5. 回轉對稱場의 表面電荷法

點에 미치는  $\sigma_i$ 의 作用(電位係數)을 (17)식으로 부터 計算한다.

(c) 輪廓點  $j$ 에서  $\phi_j = \sum_{i=1}^n \sigma_i = V_0$  (電極電壓)의 境界條件에 의하여  $\sigma_i$ 에 대한 連立一次方程式을 푼다.

(d) 구하여진  $\sigma_i$ 의 값을 이용하여 다시 (17)식에 의하여 필요한 點의 電位, 다시 電位로부터 電界를 計算한다.

表面電荷法은 같은 電荷法인 電荷重疊法과 비교하면 電位, 電界를 解析式으로 표시할 수 없기 때문에 計算 시간이 길고 program도 복잡하다. 그러나 두께가 얇은 電極 및 誘電體界面을 몇개 포함한 배치의 電界計算에는 電荷重疊法보다 有利하다.

2.5 數值電界計算法의 特徵

4種의 數值電界計算法의 가장 근본적인 차이점은 連續인 場을 어떻게 有限하게 分割하는가에 있다. 差分法과 有限要素法은 場의 領域全體를 分割하고 分割點의 電位를 未知數로써 定式化하는 것에 對히 電荷重疊法과 表面電荷法은 境界 및 場을 形成하는 電荷를 分割하는 것이다. 이 分割法의 차이가 方程式의 解法, 誤差의 評價, 對象으로 하는 問題의 適否등에 다음과 같은 決定的인 차이점을 가져온다.<sup>(2)</sup>

(1) 境界分割法(電荷重疊法, 表面電荷法)에서는 領域分割法(有限要素法, 差分法)에 비해 分割數가 一次元 낮다. 즉 二次元場, 回轉對稱場에서는 領域分割法이 面을 分割하는 것에 對해 線의 分割이 되고 方程式(未知數)의 數는 領域分割法의 平方根의 Order이다.

그 결과 境界分割法에서는 場의 方程式(14)식이 消去法으로써 直接解가 되는 것에 對히 領域分割法에서는 보통 (8)식을 풀기 위하여 특별한 방법이 필요하다.

(2) 假想電荷, 表面電荷의 作用은 無限遠에서 자동적으로 零이 되기 때문에 無限遠의 境界條件을 고려할 필요가 없다. 이것에 대해 差分法, 有限要素法에서는 無限遠까지의 적당한 處에 境界를 설정하지 않으면 안 된다. 즉 境界分割法은 無限遠까지 확대된 場의 計算에 특히 適當하다.

표 1. 數值的電界計算法の 分類와 그 特徵<sup>(4)</sup>

	差 分 法	有 限 要 素 法	電 荷 重 疊 法	表 面 電 荷 法
有限化的 方法	領域全體의 分割		境界와 電荷의 分割	
未 知 數	分割點(格子點)電位	分割點(節點)電位	電極內假想電荷	表面電荷密度
未知數의 數	400~50,000		1,000 以下	
係 數 行 列	대개의 項이 0이다		대개의 項이 0이 아니다	
方 程 式 解 法	直接法 또는 反復法(SOR法)		直接法(消去法) 또는 反復法	
電界值의 計算	電位를 數值微分		電荷로부터 解析的 計算	電位의 數值微分 또는 電荷로부터 計算
適當한 문제의 種 類	一般的이지만 境界, 界面이 복잡한 경우에는 취급이 곤란하다.	복잡한 境界, 誘電體의 數가 많은 경우, 電界의 變化가 큰 경우에 適當하다.	對稱性을 갖는 場의 精密 計算, 場이 無限遠까지 미치는 경우에 適當하다.	電荷重疊法과 거의 같으나 특수한 形狀, 誘電體의 種類가 많은 경우에 適當하다.
기 타	지금까지 電界計算에 제일 오래전부터 사용되었다. 分割方法, 境界처리, 無限遠의 취급이 곤란하다	program, 入力 Data의 作成이 곤란하지만 복잡한 문제에 유연성이 있다. 無限遠의 境界처리가 곤란하다	假想電荷의 배치방법에  경험에  필요하다. 두께가 얇은 電極은 취급이 어렵다.	programming이 어렵다. 電荷重疊法과 併用하면 좋다. 電荷배치에  경험은  必要없다.

(3) 境界分割法은 局所의 電界를 구하는데 適當하지만 場 全體의 等電位線圖를 그리는 것과 같은 경우에는 領域分割法이 우수하다.

(4) 有限要素法, 差分法에서는 場의 方程式 (8)식으로부터 구하여지는 것은 電位이기 때문에 電界를 구할 때의 微分誤差가 큰 것이 문제이다. 電荷重疊法에서는 電界는 電荷量과 座標로부터 解析的으로 구하여지므로 電位誤差와 비교해서 큰 차이는 없다.

表 1에 4種의 方法의 구체적인 特徵를 종합하여 표시하였다.

### 3. 特殊場의 計算法

#### 3.1 抵抗分을 갖는 場

지금까지는 일반적인 靜電界計算만을 행하였지만 實際의 機器에 대하여 생각하면 絶緣材料에는 體積의 導電率도 고려하여야 하는 것이 바람직하다.

絶緣材料의 誘電率을  $\epsilon$ , 導電率을  $k$ 라고 할때 兩者가 존재하는 場의 방정식은

$$\text{div}(kE + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}) = 0 \tag{18}$$

로 표시된다. 여기서  $E$ 는 電界,  $t$ 는 時間을 나타낸다.

直流電界가 인가될 때에 (18)식은

$$\text{div}(kE) = 0$$

으로 되고 靜電界와 定常電流界와의 대응으로부터 靜電界計算 경우의  $\epsilon$ 를  $k$ 로 치환하므로써 풀 수가 있다. 그러나 일반적으로는  $k$ 가  $E$ 의 함수로 되는 것이 많고 이것을 고려한 非線形問題로 된다.

한편 (18)식에 交流電界가 인가될 때에는

$$\text{div}\{(k+j\omega\epsilon)\dot{E}\} = 0 \tag{19}$$

으로 되고 인가전압의 角速度  $\omega$ 에 의존한 複素數計算이 된다. 여기서  $\dot{E}$ 는 複素電界를 나타낸다.

이와같은 場의 計算을 실제로 행하는 데에는 差分法, 有限要素法, 電荷重疊法 등이 이용되지만 有限要素法, 電荷重疊法에 한하여 다음에 설명한다.

交流電界下에서 場의 Energy汎函數  $J_s$ 는

$$J_s = \int_V \frac{1}{2} (k+j\omega\epsilon) \dot{E}^2 dV \tag{20}$$

로 표시되고 이 경우는 靜電界計算에서의  $E$ 를  $\dot{E}$ 로,  $\epsilon$ 을  $(k+j\omega\epsilon)$ 로 치환하여 같은 방법으로 풀 수가 있다.

電荷重疊法을 이용하는 경우도 線形인 경우에는 複素數計算이 되는 것 외에는 완전히 같은 방법으로 할 수 있다. 단 絶緣物界面上에서 다음 식과 같은 電束密度法線成分의 連續性을 고려할 필요가 있다.

$$\left(\epsilon_1 + \frac{k_1}{j\omega}\right)\dot{E}_{n1} = \left(\epsilon_2 + \frac{k_2}{j\omega}\right)\dot{E}_{n2} \tag{21}$$

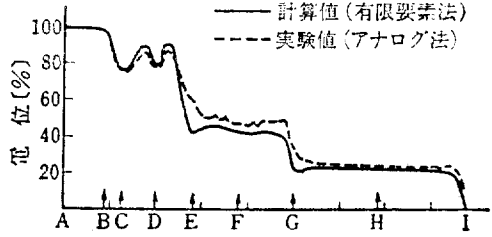
여기서  $\epsilon_1, \epsilon_2$  및  $k_1, k_2$ 는 誘電體 1, 2의 誘電率 및 導電率이고  $n$ 은 法線方向成分인 것을 표시한다<sup>(3)</sup>.

이상 體積抵抗이 있는 場에 대하여 설명을 했지만 絶緣材料의 表面에 抵抗이 존재하는 場도 거의 같은 방법으로 풀 수가 있다. 表面抵抗이 존재하는 場의 計算例로써 有限要素法을 이용한 50Hz의 交流電界場 計算結果를 그림 6에 표시하였다. 그림 6(a)에는 Pin 애자 표면에 반도파도器( $k_s = 1.4 \times 10^{-8} \text{ 1}/\Omega$ )가 A-B간 에 도포되어 있는 경우와 도포되지 않은 경우의 等電位面의 比較가 표시되어 있고 그림 6(b)에는 測定值와 의 比較가 나와 있다.<sup>(4)</sup>

3.2 Ion流場의 計算

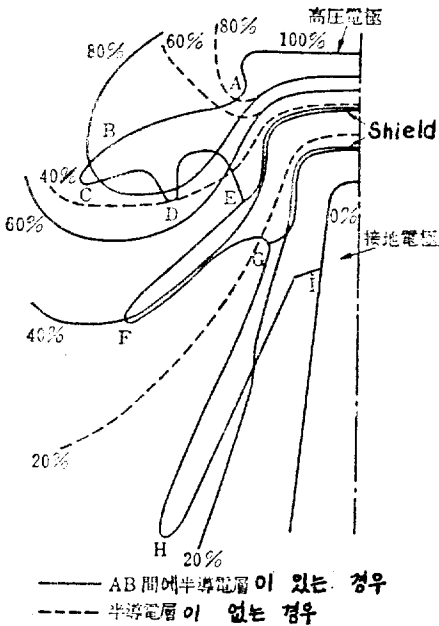
電界計算을 Ion流場에 적용시킨 報告에는 直流 Ion流場의 解析이 알려져 있다. 計算을 單純化하기 위하여

- (i) Ion流가 電界를 變化시키지 않는다.
- (ii) Ion流가 電界의 方向을 變化시키지 않는다 등의 制約을 設定하는 경우가 많다. 이들중 (i)은 Poisson場을 Laplace場으로 간주하여 計算을 하는 것이지만 極히 微小한 Ion流의 경우가 取扱되어 實測과도 일치되지 않는 것이 보고되고 있다. (ii)의 조건은 「Deutsch



(b) 實驗値와의 比較

그림 6. 抵抗場의 計算(有限要素法)



(a) 等電位面의 比較

의 假定」으로도 불리고 未知數  $\phi, \rho$ 를 구하는 과정을 단순화한 것이다. 최근의 계산에서는 放電의 物理量을 상세히 加味하여 행하고 있다. 그림 7에 單極의 導體(線)對 平板의 配置에서 Deutsch의 假定에 의한 計算(近似法)과 差分法에 의한 精密計算과의 結果가 比較되어 있다. (4)

가장 일반적인 計算을 하기 위해서는

- (iii) Ion流가 電界의 크기, 方向을 변화시킨다 라는 조건으로 計算할 필요가 있다. 이 경우는 有限要素法, 差分法으로 풀 수밖에 없다. 바람(풍속  $W$ )도 고려한 雙極性의 Ion流場을 해석하는 것에는

$$\text{div}(\text{grad}\phi) = (q^- - q^+)/\epsilon_0 \quad (22)$$

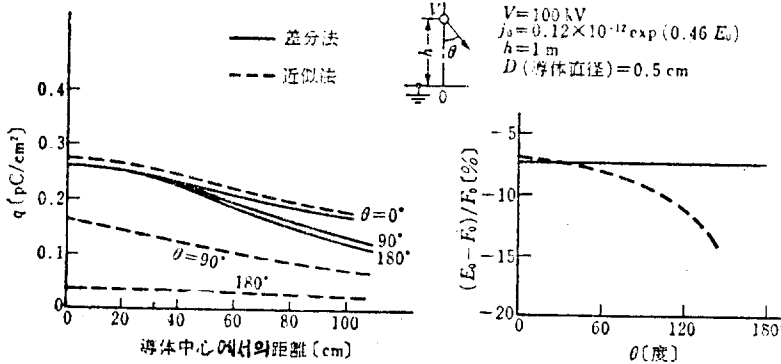
$$J^+ = q^+(-k^+ \text{grad}\phi + W) \quad (23)$$

$$J^- = q^-(-k^- \text{grad}\phi - W) \quad (24)$$

$$\text{div} J^+ = -Rq^+q^-/e \quad (25)$$

$$\text{div} J^- = Rq^+q^-/e \quad (26)$$

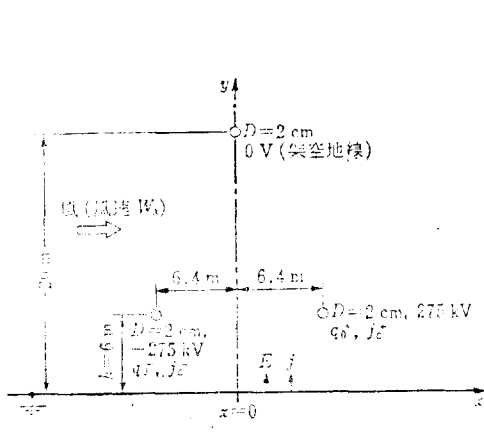
( $\phi$ : 電位,  $q$ : 電荷密度,  $\epsilon_0$ : 誘電率,  $J$ : 電流密度,  $k$ : 移動度,  $R$ : Ion의 再結合係數,  $e$ : 電子의 電荷)



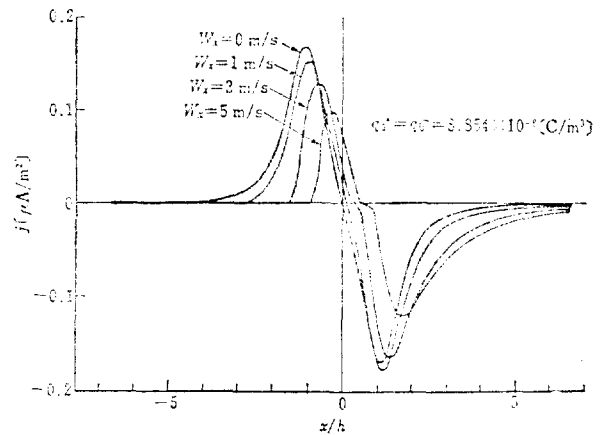
(a) 電荷密度

(b) 導體表面電界의 變化率

그림 7. 差分法과 近似法의 比較計算



(a) 雙極送電線の 配置



(b) 地表面電流密度分布에 對한 風速의 影響

그림 8. Ion流場의 計算(有限要素法)

라는 식에서 空間을 微小한 要素로 分割하여 電位를 주고 (22)~(26)식으로부터 電荷量을 구하여 反復計算이 종료되면

$$E = -\text{grad}\phi \tag{27}$$

로부터 電界를 계산한다. Ion流場의 계산은 q에 대한 境界條件이 문제되지만 導體表面에서의 J, 또는 q의 분포 및 k의 電界依存性을 實驗値에 의해 주는 등의 방법이 행하여지고 있다. 宅間氏는 그림 8 (a)의 model을 계산하여 그림 8 (b)에 표시된 결과를 얻었다.<sup>(8)</sup>

3.3 空間電荷가 존재하는 場

放電現象 Simulation 등의 과정에서는 Corona streamer에 의해 生成된 空間電荷에 의한 電位, 電界를 계산해야 한다. 空間電荷電界의 계산에는 電荷를 직접 취급하는 電荷重疊法이 많이 이용되고 Singer 등은 다음과 같은 방법을 제안하였다. (P), (Ps)를 電位係數, (Q), (Qs)를 電荷, (φ)를 境界電位(단 s는 空間電荷에 의한 것을 표시하고 (Q)만을 未知數로 한다)라 하면 이들 사이에는

$$(P) \cdot (Q) + (Ps) \cdot (Qs) = (\phi) \tag{28}$$

가 성립하기 때문에 (Q)를

$$(Q) = (P)^{-1} \{ (\phi) - (Ps) \cdot (Qs) \} \tag{29}$$

으로 구하고 이 (Q)와 주어진 空間電荷 (Qs)에 의하여 電位, 電界를 구한다.

Graf는 棒-平板Gap에 이 방법을 적용하여 實測值

와 잘 일치하는 것을 보고 하였고 그 결과가 그림 11에 나와 있다.<sup>(9)</sup> 또 誘電體界面의 空間電荷(表面電荷)에 대해서는 大木氏가 電束의 法線成分의 連續性에 의하여 面電荷密度 σ(既知量)로써

$$\epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma \tag{30}$$

를 고려하여 眞空中의 帶電狀態를 검토하였다.

差分法, 有限要素法인 경우 空間電荷의 취급은 거의 變化없다.

3.4 Combination法

各各의 電界計算法들은 各各 특유의 性質을 갖고 있다. 그러나 몇몇의 方法들을 단독으로 사용하지 않고

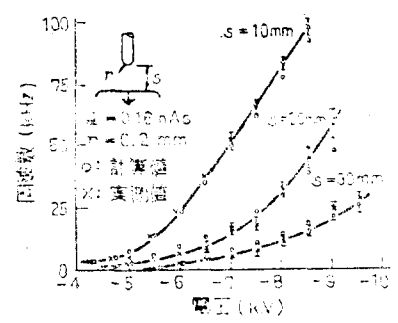


그림 9. 空間電荷를 고려한 電荷重疊法에 의한 棒-平板 Gap의 計算

組合하여 사용하므로써 그 方法의 적용범위를 확대시키고 精度를 향상시키는 것이 고려되고 있다. 그중의 하나가 소위 Combination法이다. 이것은 電荷重疊法과 有限要素法을 조합한 것, 즉 兩者의 장점을 살린 方法이라고 할 수 있다. 따라서 無限遠까지 확대한 공간과 局所의 計算, 또 多媒質場과 空間電荷가 존재하는 場, 漏洩抵抗이 존재하는 場 등의 계산에 넓게 응용될 수 있다. 그림 10는 Combinat法의 說明圖이다.<sup>(7)</sup>

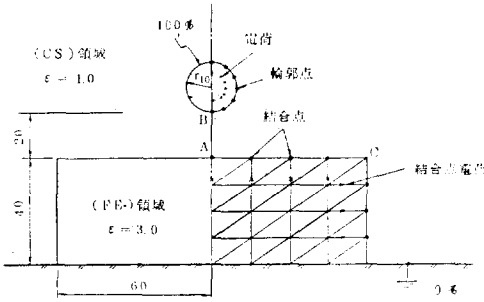


그림 10. Combination法의 說明圖

4. 最適形狀의 自動計算法

지금까지와 같이 絶緣物形狀에 대하여 電界計算을 하는 것만이 아니라 電極 및 絶緣物表面의 電界強度分布을 주어진 條件下에서 最低化시키는 形狀의 試圖(電界最化)가 행하여지게 되었다.

물론 機器의 絶緣設計時에는 電界分布 이외에 放電物性, 機械的強度, 熱的 問題 등을 포함하여 검토할 필요가 있으나 현재에는 電界만에 대한 最適化가 행하여지고 있다. 이 電界最適化는 電界空間의 有效利用이라는 점에서 대단히 중요하고 급후의 발전이 기대된다.<sup>(8)</sup>

4.1 電極形狀의 最適化

電極表面의 電界強度의 最適化는 Rgowski, Borda 電極에서 처럼 解析的方法에 기초한 계산결과를 볼 수 있지만 二次元場에 한하여 졌다.

軸對稱三次元場, 一般三次元場 등에도 적용할 수 있고, 더구나 計算精度, 계산시간, Program의 難易度 등의 점에서 유리한 電荷重疊法을 이용하는 電界最適化法이 Singer, Metz, 大久保 등에 의하여 개발되어 왔다.<sup>(9)</sup>

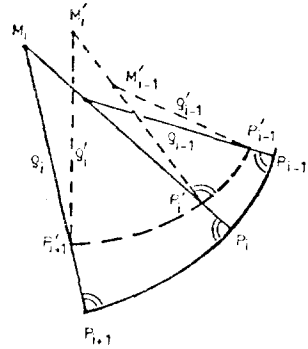
Singer法, Metz法은 어느 것이나 初期形狀의 電界分布에 어떤 조건에 의하여 修正을 가하고 다시 電界分布을 구하여 最適한 形狀에 가깝게 하는 反復法이 되지만 Singer法이 輪廓點에서 출발하는 것에 대해

Metz法은 電荷로 부터 출발하는 點이 서로 다른 것이다.

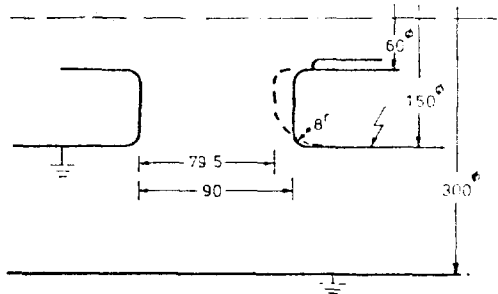
Singer가 이용하는 修正條件은 Spielrein에 의한 電極上의 電界強度 E와 曲率 C와의 관계식

$$\frac{\partial C}{\partial E} = -\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{E} \right) = \frac{\partial E}{\partial n} / E^2 \quad (31)$$

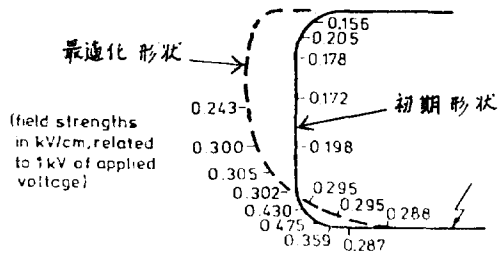
이다. (31)식에 의하여 적당한 電界가 되도록 하는 曲率, 즉 輪廓點의 위치를 변화시켜 가면 그림 11 (a)에



(a) 輪廓點의 移動



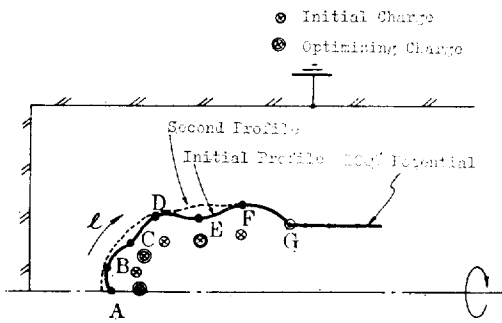
(b) 電極配置(断路器)



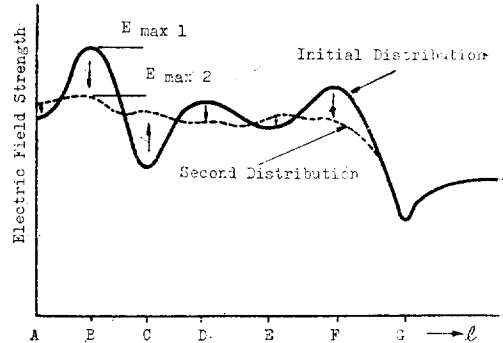
(c) 最適化形狀

그림 11. Singer의 電界最適化法





(a) 電極形狀의 變化



(b) 電界分布

그림 12. Metz의 電界最適化法

서처릴  $P_{i-1}$ ,  $P_i$ ,  $P_{i+1}$ 로부터  $P'_{i-1}$ ,  $P'_i$ ,  $P'_{i+1}$ 로 形狀이 變化된다. 이렇게 하여 斷路器電極의 形狀(그림 11(b))을 最適化한 結果를 그림 11(c)에 표시하였다.<sup>(6)</sup>

한편 Metz는 最適化領域內의 輪廓點을 利用하지 않고 電荷量 혹은 電荷位置의 變化에 의하여 等電位面을 變化시켜 電極形狀이 되는 方法을 취하고 있다. 일반 電極部의 電位係數 matrix, 電荷量, 電位를 각각 ( $P$ ), ( $Q$ ), ( $\phi$ )로 하고 最適化領域內에 배치한 電荷(Optimizing charge) ( $Q'$ )와 일반 電極部의 輪廓點 사이의 電位係數를 ( $P'$ )라 하면

$$(P) \cdot (Q) + (P') (Q') = (\phi) \quad (32)$$

로 되고 (32)식에 의하여 未知의 ( $Q$ )를 구하면

$$(Q) = (P^{-1}) \{ (\phi) - (P') (Q') \} \quad (33)$$

로 된다. (33)식으로 부터 場中의 全體電荷量이 구하여지므로 電界計算이 가능하다. 電界計算結果를 判定하고 修正條件에 의하여 最適化領域內의 電荷의 位置 혹은 크기를 變化시켜 反復하여 계산하는 것이 Metz法이다.<sup>(9)</sup>

Metz法에 의하여 計算한 結果의 例를 그림 12(a)에 표시하였고 그에의 電極表面에 따른 電界分布를 그림 12(b)에 표시하였다.<sup>(6)</sup> Singer法은 自動化가 용이한 반면 계산시간, 精度의 면에서 Metz法에 미치지 못한 다.

Metz法의 修正條件은 어떤 點의 電界強度에 미치는 電荷의 寄與를 計算하는 方法이지만 大久保氏등은 다시 Metz法을 발전시켜 電極表面의 電界分布에 의하여 自動적으로 새로운 電荷를 추가해 가는 方法을 개발하였다.<sup>(5)</sup>

최근에는 電極表面의 電界分布의 最適化 自動計算단 이 아니라 媒質의 破壞特性 등의 物性値와 관련성을

갖는 最適化가 시작되고 있다. Singer는 電極表面의 Corona開始電界를 고려하여 最適化形狀을 구하였다.<sup>(6)</sup>

#### 4.2 絶緣物形狀의 最適化

電極形狀의 最適化와 병행하여 絶緣物形狀의 最適化가 행하여지게 되었다. 電極形狀의 경우와 같이 電荷重疊法이 이용되지만 電極表面과 달리 誘電體境界面을 이동시킬 필요에서 差分法 및 表面電荷法도 이용되고 있다. 그밖에 沿面放電과의 관련에 의해 絶緣物形狀의 最適化에는 沿面方向電界強度에 대하여 判定을 하는 경우가 많다.

Antolic에 의해 Gas絶緣母線의 Spacer形狀에 대하여 差分法을 이용한 最適化結果가 보고되었고 大久保氏등은 表面電荷法을 이용하여 絶緣 Spacer形狀의 最適化를 행하고 있다.<sup>(8)</sup>

#### 5. 結 論

以上 각종 數值電界計算法의 기본원리와 최근의 개발상황을 기술하였다. 電界計算技術은 絶緣設計 등 高電壓放電分野에서 매우 중요한 위치를 차지하기 때문에 일본의 電氣學會高電壓絶緣電界計算分科會, 또 국제적으로는 ISH(International Symposium on High-Voltage Engineering) 등에서 電界計算技術에 대한 최근의 연구, 개발상황이 보고되고 활발한 토론이 이루어지고 있다.

國內에서도 電界計算의 중요성에 대한 새로운 인식과 program 개발의 뒷받침이 電氣學會 放電 및 高電壓工學研究會를 추축으로 일어나기를 바라며 끝으로 이 資料가 高電壓機器의 絶緣設計, 放電現象 및 여러

분야에서 도움이 될 것을 기대하며 소개하는 바이다.

Vol. 4, No. 2 1980.

參 考 文 獻

- [1] 宅間; CAD の基礎と應用, 第 5 章 電界計算, 電氣學會關西支部專門講習會論文集, p.72 1976.3.
- [2] 宅間, 他; 最近の電界計算法, 電氣學會技術報告 (II部) 第98號 1980.8.
- [3] 李民濟; 最近의 電界解析法과 그 應用, 電試研報
- [4] 宅間, 他; 數值電界計算法, コロナ社 1980.10.
- [5] H. Okubo, et al; ISH-79, Milano, 11.16 1979.
- [6] H. Singer; ISH-79, Milano, 11.06 1979.
- [7] 大久保, 他; コンビネーション電界計算法, 電氣學會放電研究會, ED-79-10 1979.3.
- [8] 宅間, 他; イオン流場における電界計算, 電氣學會全國大會, S. 2-7 1980.
- [9] D. Metz; ISH-79, Milano, 11.12 1979.

原 稿 募 集

아래와 같이 會員여러분의 玉稿를 기다립니다.

技術資料, 技術展望, 技術解説, 技術報告, 技術情報, 製品紹介, 現場經驗談, 海外旅行記 등 많은 投稿 있으시기 바랍니다.

아 래

內 容 : 論文, 技術解説, 技術展望, 技術情報, 技術資料, 技術報告, 講座, 現場經驗談, 製品紹介, 國內外動靜, 國內外旅行記, 會員消息 等

要 領 : 200字 原稿用紙 30枚~50枚 内外

마 감 : 隨時接受(但 論文은 期日前이라도 接受順에 따름)

送付處 : 大韓電氣學會(編修委員會안) 서울特別市 中區 水標洞 11-4 電氣會館 306號 260-2253, 267-0213

- 參 考 : ① 原稿 投稿時는 會誌投稿規程에 따를 것
- ② 論文提出時는 國文要旨도 꼭 提出하시되 本文中의 圖面은 바로 印刷에 들어갈 수 있도록 緣으로 깨끗이 그리시어 提出하시기 바람
- ③ 그림의 說明文句들은 축소할 경우를 고려하여 글자를 삽입하시기 바람

論文掲載料變更案内

當學會에서는 會員여러분의 負擔을 줄이고자 아래와 같이 掲載料를 變更하였으니 諒知하시기 바랍니다.

	改 定 前	改 定 後
審 查 料	없 음	12,000원
掲 載 料	전 액 負擔 (1page當 8,000원)	4 page까지 學會負擔 5 page부터 投稿者負擔 (1page當 8,000)
備 考	投稿時掲載料納付	投稿時審査料納付

※ 1981年 4月 15日 施行