

<技術論文>

橢圓孔을 가진 無限平板의 應力集中係數와 橢圓柱를 가진
Potential Flow의 壓力係數와 比較研究

金 東 炫* · 尹 甲 英**

(1981年 6月 4日 接受)

A Comparative Study Between Stress Concentration Factor of
the Infinite Plate with Elliptic Hole and Pressure Coefficient of
the Potential Flow Around Elliptic Cylinder.

Dong Hyun Kim and Kab Young Yoon

Abstract

This study aims to compare stress concentration factors in a loaded elastic body of the infinite plate with pressure coefficients of a fluid in the potential flow. First, in view of hydrodynamics, when a single elliptic cylinder in the form of a bluff body stands in the potential flow, the pressure distribution (coefficient, C_p) around the elliptic cylinder which is changed according to the position (angular displacements) is theoretically analyzed and calculated; secondly, in view of theory of elasticity, when an elliptic hole which is made on a flat plate gets tension, the stress distribution (factor) around the elliptic hole which is changed according to the position (angular displacements) is theoretically (K_t) and experimentally (K_e) measured; and finally, The results are compared and examined.

記 號 說 明

a : Half the major axis of an elliptic cylinder (Hole)
 b : Half the minor axis of an elliptic cylinder (Hole)
 c : Focus of an elliptic cylinder (Hole)
 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
 C_p : Pressure coefficient $C_p = \frac{P_0 - P_v}{\frac{\rho V_\infty^2}{2}}$
 h : Half width of model
 K_e : Experimental value of stress concentration factor
 K_t : Theoretical value of stress concentration

factor

n : Fringe order
 P_0 : Pressure at the boundary (Surface) of the Elliptic cylinder
 P : Load acting on model
 P_∞ : Pressure of uniform stream
 s : Simple tensile stress in the infinite plate
 t : Thickness of model
 V_η : Velocity component at the boundary (surface) of the elliptic cylinder on a curve η
 V_ξ : Velocity component at the boundary (surface) of the elliptic cylinder on a curve ξ
 V_∞ : Velocity of uniform stream
 α : Stress optical coefficient
 β : Angle below the positive x axis in the Fig. 2

* 正會員, 漢陽大學校 大學院

**正會員, 漢陽大學校 工科大學

- η : η coordinates of elliptic coordinate system ($\eta = \text{const}, 0 \leq \eta \leq 2\pi$)
- θ : Angular displacement (eccentric angle¹⁰⁾ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)
- ξ : ξ coordinates of elliptic coordinate system ($\xi = \text{const}, 0 \leq \xi < \infty$)
- σ_0 : Average stress
- σ_n : Normal stress component at the boundary (surface) of the elliptic hole on a curve η
- σ_ξ : Normal stress component at the boundary (surface) of the elliptic hole on a curve ξ
- σ_θ : Tangential stress at the boundary (surface) of the elliptic hole

1. 序 論

材料力學의 主應力線을 流體의 流線으로 置換해 보면 應力集中 또는 應力狀態의 攪亂 등이 어떠한 條件으로서 發生하는 것인가를 確實하게 알게 되며 여기에서 流體力學의 流線과 材料力學(彈性學)의 主應力線과는 嚴密하게 따지면 물론 相似되는 것은 아니지만 兩

자가 定性的으로 類似한 傾向을 가지고 있으며 특히 攪亂이 緩慢한 경우에 對해서는 兩者를 서로 對比해서 考察한 研究가 있다.^{1), 2), 3), 11)} 또 眞直棒을 비틀 경우에 있어서는 橫斷面에 對하여^{1), 12)}, 또는 軸方向으로 지름이 變化하는 圓形斷面棒이 비틀어지는 경우에는 그 縱斷面이²⁾ 各已 流體力學과 完전한 相似性이 保存되는 것이 理論적으로 알려져 있으며 水流가 應力集中의 概念으로 附與될 뿐만 아니라 이러한 것들이 비틀림에 있어서의 應力分布狀態를 相似의으로 求할 수 있는 하나의 有力한 方法이 될 수 있다는 發表도 있다.^{1), 2), 3)} 그러나 兩者사이의 類似性에 관한 定量的 比較研究는 全然 없음에 鑑하여 本 研究에서는 橢圓要素를 對象으로 兩者間의 定量的 類似性 有無를 究明하여 比較 研究코지 流體力學의으로는 單獨橢圓柱를 Potential Flow 에 Bluff Body 로 設置했을 때 橢圓柱 주변의 흐름에서 位置(角變位)에 따라 나타나는 壓力分布(係數)를 理論式에 依하여 計算하고, 材料力學의으로는 平板에 橢圓구멍을 내어 引張했을 때 橢圓구멍 주위의 位置(角變位)에 따라 나타나는 應力分布狀態를 理論的 및 實驗的으로 求하여 그 結果를 比較하여 考察하였다.

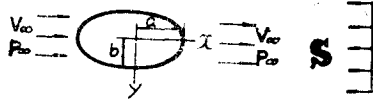


Fig. 1 Steady potential flow of an infinite fluid around an elliptic cylinder without circulation.

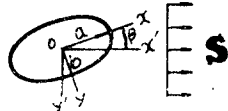


Fig. 2 The infinite plate in a state of simple tensile stress S.

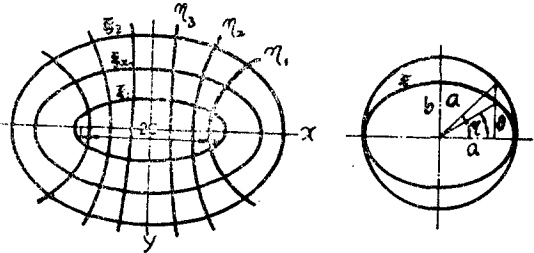


Fig. 3 The elliptic coordinates ξ, η .

2. 理論的 考察

2.1. 流體力學의 理論解析

Fig. 1과 같이 表示된 長軸 a와 短軸 b인 橢圓 cylinder 주위의 循環이 없는 定常 Potential flow를 考察해 본다. 이 때에 橢圓 cylinder로부터 充分히 떨어진 곳의 流動은 長軸에 平行하다. Fig. 3과 같이 表示된 橢圓座標系를 써서 橢圓 cylinder 주위의 位置에 따라 나타나는 速度分布 $\frac{V_\eta}{V_\infty}$ 를 解析한 理論^{4), 5), 6), 7)}을

利用하여 橢圓 cylinder 주위의 壓力係數 C_p 를 求하면 다음과 같다.

i) 流動이 橢圓柱의 長軸에 平行한 경우

$$\left\{ \frac{V_\eta}{V_\infty} \right\}_{\xi=\xi_0} = \frac{\left(\frac{a+b}{a} \right) \sin \eta}{\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2} \cos^2 \eta \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (1)$$

$$C_p = 1 - \left(\frac{V_\eta}{V_\infty} \right)^2 = 1 - \left\{ \frac{\sin \eta}{\sqrt{\sin^2 \eta + \sinh^2 \xi_0}} \right\}^2$$

$$= 1 - \left\{ \frac{\frac{a+b}{a} \sin \eta}{\left(1 - \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \eta \right)^{\frac{1}{2}}} \right\}^2 \quad (2)$$

이 되고 식(2)에서 C_p 의 최소값은 短軸의 끝($\eta=90^\circ, 270^\circ$)에서

$$(C_p)_{\min} = -\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{2b}{a}\right) \text{ 이 되고}$$

또한 C_p 의 최대값은 長軸의 끝($\eta=0^\circ, 180^\circ$)에서 (C_p)_{max}=1 이 된다.

ii) 流動이 橢圓柱의 長軸에 垂直한 경우

$$\left\{ \frac{V_\eta}{V_\infty} \right\}_{\xi=\xi_0} = \frac{\frac{a+b}{a} \cos \eta}{\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2} \cos^2 \eta\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

$$C_p = 1 - \left\{ e^{\xi_0} \frac{\cos \eta}{\sqrt{\sin^2 \eta + \sinh^2 \xi_0}} \right\}^2$$

$$= 1 - \left\{ \frac{\frac{a+b}{a} \cos \eta}{\left(1 - \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \eta\right)^{\frac{1}{2}}} \right\}^2 \quad (4)$$

이 되고 식(4)에서 C_p 의 최소값은 長軸의 끝($\eta=0^\circ, 180^\circ$)에서

$$(C_p)_{\min} = -\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{2a}{b}\right) \text{ 이 되고}$$

C_p 의 최대값은 短軸의 끝($\eta=90^\circ, 270^\circ$)에서 (C_p)_{max}=1 이 된다.

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{b \sin \eta}{a \cos \eta} = \frac{b}{a} \tan \eta \quad (5)$$

식(5)를 適用하여 角變位 η 와 θ 에 따라 $\frac{V_\eta}{V_\infty}$ 와 C_p 를 長短軸比 $\frac{b}{a}=0.2 \sim 2.0$ 까지 식(1)과 (3) 및 식(2)와 (4)에 依하여 計算한 結果中에서 $\theta=90^\circ$ 일 때 값만 表示하면 Table 1과 같다.

Table 1 Velocity distributions and pressure coefficients around elliptic cylinder ($\theta=90^\circ$).

Ratio of axes $\frac{b}{a}$	η (deg)	θ (deg)	$\frac{V_\eta}{V_\infty}$	C_p
0.2	90	90	1.2	-0.44
0.4	90	90	1.4	-0.96
0.5	90	90	1.5	-1.25
0.6	90	90	1.6	-1.56
0.8	90	90	1.8	-2.24
1.0	90	90	2.0	-3.0
1.2	90	90	2.2	-3.84
1.4	90	90	2.4	-4.76
1.5	90	90	2.5	-5.25
1.6	90	90	2.6	-5.76
1.8	90	90	2.8	-6.84
2.0	90	90	3.0	-8.0

2.2. 材料力學的 理論解析

Fig. 2와 같이 荷重을 받는 彈性體內의 應力은 無限平板에 橢圓구멍을 내어 引張했을 때 橢圓구멍 주위의 位置(角變位)에 따라 나타나는 應力分布狀態는 Fig. 3과 같은 橢圓座標系를 써서 解析한 理論⁽¹⁰⁾을 利用하여 그 結果만 表示하면 橢圓구멍에서의 應力은 다음식과 같다.

$$(\sigma_t)_{\xi=\xi_0} = 0$$

$$(\sigma_n)_{\xi=\xi_0} = S \cdot \frac{\sinh 2 \xi_0 + \cos 2 \beta - e^{2\xi_0} \cos 2(\beta - \eta)}{\cosh 2 \xi_0 - \cos 2 \eta} \quad (6)$$

i) 引張應力 s 가 長軸($\beta=0$)과 平行일 때

$$(\sigma_n)_{\xi=\xi_0} = s \cdot e^{2\xi_0} \left\{ \frac{\sinh 2 \xi_0 (e^{-2\xi_0} - 1)}{\cosh 2 \xi_0 - \cos 2 \eta} + 1 \right\}$$

$$= s \cdot \frac{a+b}{a-b} \left\{ \frac{\frac{2ab}{c^2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right) - 1}{\frac{a^2+b^2}{c^2} - \cos 2 \eta} + 1 \right\} \quad (7)$$

이 되고 σ_n 의 최대값은 短軸의 끝 ($\eta=90^\circ, 270^\circ$ 이고 $\cos 2 \eta = -1$)에서

$$(\sigma_n)_{\max} = s \cdot \left(1 + \frac{2b}{a}\right), \quad K_t = \frac{(\sigma_n)_{\max}}{s} = 1 + \frac{2b}{a}$$

σ_n 의 최소값은 長軸의 끝($\eta=0^\circ, 180^\circ$ 이고 $\cos 2 \eta = 1$)에서

$$(\sigma_n)_{\min} = -s, \quad K_t = \frac{(\sigma_n)_{\min}}{s} = -1$$

ii) 引張應力 s 가 長軸($\beta=90^\circ$)과 直角일 때

$$(\sigma_n)_{\xi=\xi_0} = s \cdot e^{2\xi_0} \left\{ \frac{\sinh 2 \xi_0 (1 + e^{-2\xi_0})}{\cosh 2 \xi_0 - \cos 2 \eta} - 1 \right\}$$

$$= s \cdot \frac{a+b}{a-b} \left\{ \frac{\frac{2ab}{c^2} \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)}{\frac{a^2+b^2}{c^2} - \cos 2 \eta} - 1 \right\} \quad (8)$$

이 되고 σ_n 의 최대값은 長軸의 끝($\eta=0^\circ, 180^\circ$ 이고 $\cos 2 \eta = 1$)에서

$$(\sigma_n)_{\max} = s \cdot \left(1 + \frac{2a}{b}\right), \quad K_t = \frac{(\sigma_n)_{\max}}{s}$$

$$= 1 + \frac{2a}{b}$$

σ_n 의 최소값은 短軸의 끝($\eta=90^\circ, 270^\circ$ 이고 $\cos 2 \eta = -1$)에서

$$(\sigma_n)_{\min} = -s, \quad K_t = \frac{(\sigma_n)_{\min}}{s} = -1$$

이 된다. 따라서

前과 같은 方法으로 식(5)를 適用하여 位置(角變位) η 와 θ 에 따라 $\sigma_n(\sigma_\theta)$ 와 應力集中係數 K_t 를 $\frac{b}{a}=0.2 \sim 2.0$ 까지 식(7)과 (8)에 依하여 計算한 結果中에서 $\theta=90^\circ$ 일 때 값만 表示하면 Table 2와 같다.

Table 2 Stress distributions and stress concentration factors around Elliptic Hole ($\theta=90^\circ$).

Ratio of axes $\frac{b}{a}$	η (deg)	θ (deg)	$\sigma_\eta(\sigma_0)$	K_t
0.2	90	90	1.4 s	1.4
0.4	90	90	1.79s	1.79
0.5	90	90	2.00s	2.00
0.6	90	90	2.20s	2.20
0.8	90	90	2.60s	2.60
1.0	90	90	3.0 s	3.0
1.2	90	90	3.4 s	3.4
1.4	90	90	3.79s	3.79
1.5	90	90	4.0 s	4.0
1.6	90	90	4.19s	4.19
1.8	90	90	4.60s	4.60
2.0	90	90	5.0 s	5.0

3. 實驗의 解析

3.1. 實驗對象

本 實驗에서 使用한 試驗片은 日本製 ALALDITE CT-200 과 HARDNER HT-903-S 를 3 : 1 로 혼합해서 Epoxy 板을 만들어 그 形狀과 尺寸가 Fig. 4 와 Table 3 과 같이 하여 楕圓구멍의 長短軸의 比 $\frac{b}{a}=0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.8, 2.0$ 倂게 12 種의 Model 을 製作하였다. 有限板의 幅의 尺寸는 切去孔의 長徑의 尺寸의 3 倍以上으로 하여 有限幅板의 影響을 無視할 수 있게 하였다.⁽¹⁵⁾ 그리고 加工應力은 電氣爐에서 充分히 Annealing 處理하여 除去시켰다. 또한 同一한 試驗片으로부터 光彈性 感度係數 $\alpha=0.672 \text{ mm/kg}$ 을 求해냈다.

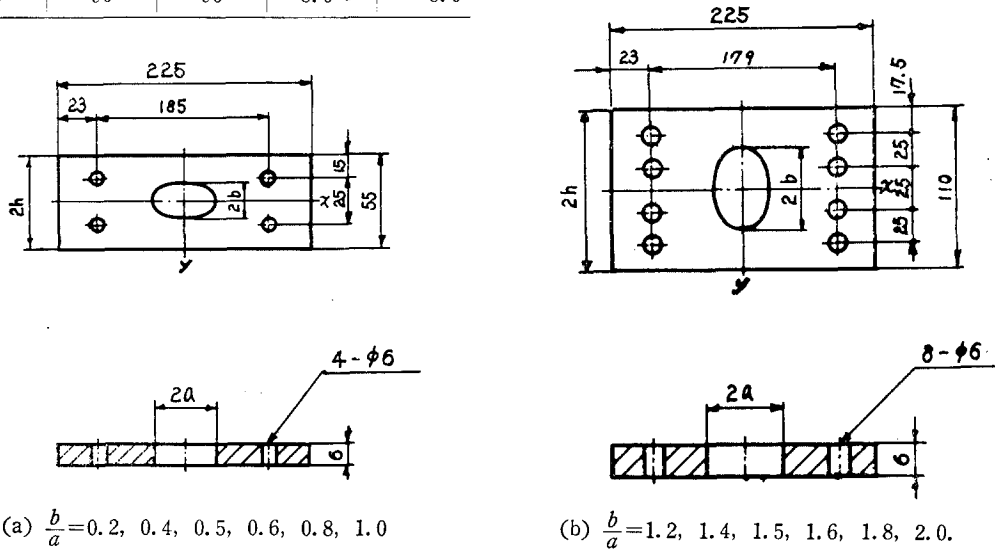


Fig. 4 Shape of models.

Table 3 Dimension of models.

Model		Ratio of axes $\frac{b}{a}$	Dimension(mm)	
Number	Shape		2a	2b
Model 1	Elliptic hole	0.2	50	10
" 2		0.4	25	10
" 3		0.5	20	10
" 4		0.6	16.666	10
" 5		0.8	12.5	10
" 6	Circular hole	1.0	10	10

"	7	Elliptic hole	1.2	16.666	20
"	8		1.4	14.285	20
"	9		1.5	13.333	20
"	10		1.6	12.5	20
"	11		1.8	11.111	20
"	12		2.0	10	20

3.2. 實驗方法 및 內容

本實驗에서는 荷重이 鉛直方向(x方向)으로 均等하게 分布하도록 一軸引張荷重을 加하고 水平方向(y方向)의 變位를 拘束하지 않도록 특히 留意하면서 引張荷重을 加하였으며 光彈性 實驗裝置에 依한 直接 觀察 和 攝影된 光彈性 寫眞에 依하여 光彈性 무늬의 等色線으로부터 式(9)들을 利用하여 各 Model의 구멍 周圍의 位置(角變位)에 따른 應力分布와 最大應力을 測定(解析)하였다. 그리고 Fringe order의 測定은 Tardy의 方法을 使用해서 $\frac{1}{10}$ 의 Fringe order까지 行하였다.⁽¹⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{P}{2(h-b)t} \\ K_t &= \frac{\sigma_0}{\sigma_0} = \frac{\sigma_0 \cdot 2(h-b)t}{P} \\ \alpha &= \frac{n}{\sigma_0 \cdot t} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Fig. 5는 本實驗에서 使用한 光彈性 實驗裝置의 配置圖이고 Fig. 6은 荷重裝置의 概略圖이다.

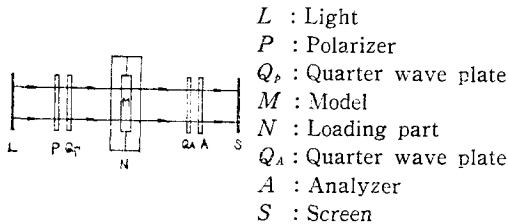


Fig. 5 Schematic diagram of circular polariscope.

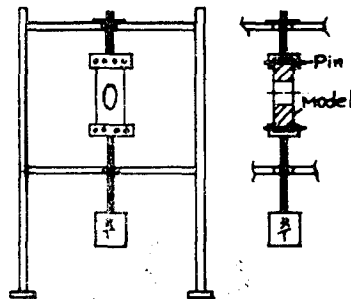


Fig. 6 Schematic diagram of loading part.

3.3. 實驗結果

以上の 12種類의 Model로써 實驗한 內容과 結果를 各 Model別로 綜合하여 整理한 中에서 $\theta=90^\circ$ 일 때 값만 表示하면 Table 4와 같고 이 때 나타나는 光彈性 무늬의 代表的인 例는 Fig. 7과 같다.

Table 4 Fringe orders and stress concentration factors of models($\theta=90^\circ$).

Model	Ratio of axes $\frac{b}{a}$	$\theta=90^\circ$		
		n	σ_0	K_t
Model 1	0.2	5.7	1.41 σ_0	1.41
" 2	0.4	7.5	1.86 σ_0	1.86
" 3	0.5	8.2	2.03 σ_0	2.03
" 4	0.6	8.9	2.20 σ_0	2.20
" 5	0.8	10.5	2.60 σ_0	2.60
" 6	1.0	12	2.97 σ_0	2.97
" 7	1.2	13.7	3.39 σ_0	3.39
" 8	1.4	15.3	3.79 σ_0	3.79
" 9	1.5	16	3.96 σ_0	3.96
" 10	1.6	17	4.21 σ_0	4.21
" 11	1.8	18.5	4.58 σ_0	4.58
" 12	2.0	20	4.96 σ_0	4.96

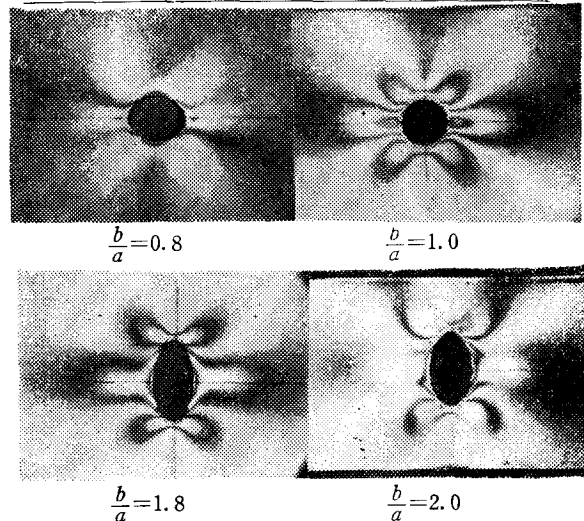


Fig. 7 Photo elastic view of models.

4. 考 察

4.1. 應力集中係數 K_t 및 K_e 와 壓力係數 C_p 값과의 比較

本 論文에서 使用한 理論計算式에서 考察해 보면 C_p 의 絕對값과 K_t 값이 最大가 되는 位置($\theta=90^\circ$)에서 $C_p = -\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{2b}{a}\right)$ 이고 $K_t = 1 + \frac{2b}{a}$ 이었다. 따라서 理論值 C_p 와 K_t 및 實驗值 K_e 의 結果인 Table 1과 Table 2 및 Table 4에서 $\theta=90^\circ$ 일 때의 이 값들을 圖表와 Graph로 圖示하여 比較해 보면 Table 5 및 Fig.8

과 같다.

本 論文에서 施行한 理論計算結果인 $|C_p|$ 값과 K_t 값을 實驗值 K_e 와 長短軸比 $\frac{b}{a}$ 에 따라 代表的인 것들을 比較해 보면 Fig. 9의 (a)~(d)에 表示된 바와 같이 $\frac{b}{a}=1.0$ 인 圓柱(圓孔)에서는 定性的 및 定量的으로 모두 一致하였으나 기타 다른 橢圓要素에서는 定性的으로는 一致하나 定量的으로는 一致하지 않았다. 即, $\frac{b}{a}=0.2\sim 0.8$ 에선 K_t, K_e 값이 $|C_p|$ 값보다 약간 커지며, $\frac{b}{a}=1.2\sim 2.0$ 에서는 反對로 $|C_p|$ 값이 K_t, K_e 값보다 점점 커져 相當한 差異가 생긴다.

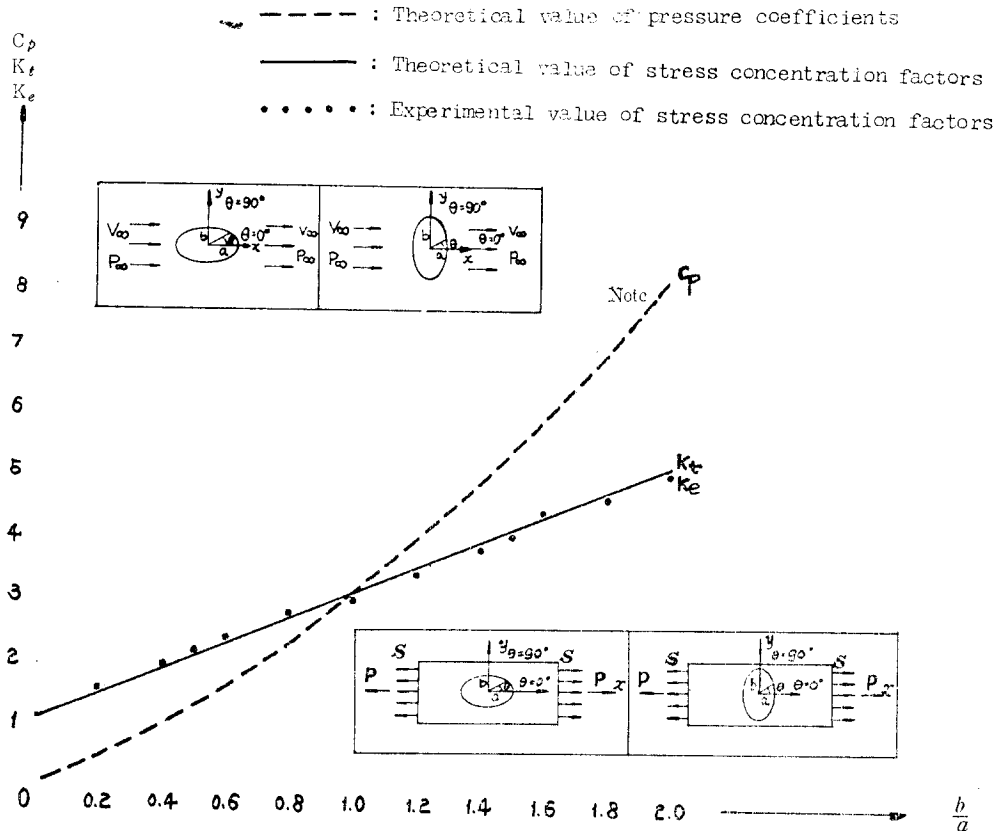


Fig. 8 Stress concentration factors and pressure coefficients diagram($\theta=90^\circ$) (Note: C_p is absolute value).

Table 5 Stress concentration factors and pressure coefficients($\theta=90^\circ$).

Ratio of axes($\frac{b}{a}$)	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0
Coefficient or factor												
C_p	-0.44	-0.96	-1.25	-1.56	-2.24	-3	-3.84	-4.76	-5.25	-5.76	-6.84	-8
K_t	1.4	1.8	2.0	2.2	2.6	3	3.4	3.8	4	4.2	4.6	5
K_s	1.41	1.86	2.03	2.20	2.60	2.97	3.39	3.79	3.96	4.21	4.58	4.96

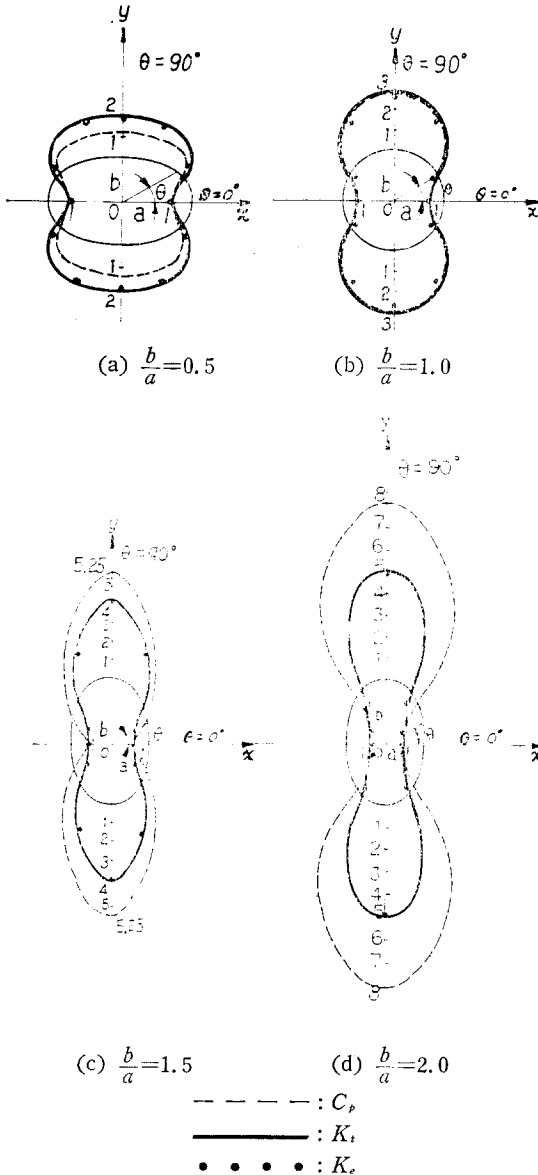


Fig. 9 Stress (pressure) distribution around ratio of axes $\frac{b}{a}=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ elliptic hole(cylinder).

5. 結 論

本論文에서 荷重을 받는 彈性體인 無限平板의 應力集中係數와 Potential Flow 인 流體의 壓力係數 사이의 類似性 有無를 究明하여 比較研究하기 위하여 流體力學의 으로는 單獨橢圓柱를 Potential Flow 에 Bluff Body 로 設置했을 때 橢圓柱 주변의 흐름에서 位置(角變位)에 따라 나타나는 壓力分布(係數, C_p)를 理論的으로 考察하여 計算하고 材料力學의 으로는 平板에 橢圓구멍을 내어 引張했을 때 橢圓구멍 주위의 位置(角變位)에 따라 나타나는 應力分布狀態(係數)를 理論的(K_t) 및 實驗的(K_s)으로 求하여 比較檢計한 本 研究의 結果를 要約하면 다음과 같다.

(1) 橢圓 Cylinder 주위의 Potential Flow 에 對해서 壓力係數를 求하기 위하여 橢圓座標를 利用하였으며 그 結果 一般式은

$$C_p = 1 - \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \frac{\sin^2 \eta}{\sin^2 \eta + b^2/a^2 - b^2}$$

$$= 1 - \left\{ \frac{\frac{a+b}{a} \sin \eta}{\left(1 - \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \eta \right)^{1/2}} \right\}^2$$

를 얻었고

(2) 橢圓구멍 주위의 應力分布狀態에 對해서 應力集中係數를 求하기 위하여 橢圓座標를 利用하였으며 그 結果 一般式은

$$K_t = \frac{a+b}{a-b} \left[\frac{2ab}{c^2} \left(\frac{a-b}{a+b} - 1 \right) + 1 \right] \text{ 을 얻었고}$$

(3) 따라서 理論計算式에서 C_p 의 絕對값과 K_t 값이 最大가 되는 位置($\theta=90^\circ, 270^\circ$)에서

$$(C_p)_{\min} = - \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{2b}{a} \right) \text{ 이고 } K_t = 1 + \frac{2b}{a} \text{ 로 된다.}$$

- (4) $\frac{b}{a}$ 의 값에 關係없이 K_t 값과 K_s 값은 잘 一致한다.
- (5) $\frac{b}{a}=1.0$ 인 圓柱(圓孔)에서는 $|C_p|$ 값과 K_t 값이 一致하나 기타 다른 橢圓要素인 $\frac{b}{a}=0.2 \sim 0.8$ 에선 K_t

값이 $|C_p|$ 값보다 약간 크며, $\frac{b}{a}=1.2\sim 2.0$ 에서는 反對로 $|C_p|$ 값이 K_c 값보다 점점 커져 상당한 差異가 생겼다.

即, $|C_p|$ 값과 K_c 값은 圓柱(圓孔)以外 다른 橢圓要素에서는 定性的으로는 類似性이 있으나 定量的으로는 $\frac{b}{a}$ 값이 1.0로부터 멀어질수록 類似性이 적어진다.

(6) $|C_p|$ 값과 K_c 값이 잘 一致되는 圓形에 있어서도 流體를 Potential Flow로 假定하였을 때에 局限되며 實際 流體에서는 큰 差異가 있으리라고 推定된다.

(7) 따라서 彈性體인 橢圓孔을 가진 無限平板의 應力集中係數와 橢圓柱를 가진 Potential Flow의 壓力係數사이의 類似性에 對해서는 定性的으로는 意味가 있으나 定量的으로는 極히 간단한 形狀(圓形)以外는 比較的 類似性이 적어 考察의 比較對象이 되지못함을 알 수 있다.

參 考 文 獻

1. J.P. Den Hartog, "On the Hydrodynamic Analogy of Torsion" J. App. Mech. Transaction ASME, Vol.57, pp.A-46, 1935.
2. A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik. Bd. V, S. 183. A. Wyszomirski, Stromlinien und Spannungslinien. Ein Versuch, Probleme der Elastizitätslehre mit Hilfe hydraulischer Analogien experimentell zu lösen. Dissertation Dresden. Borna-Leipzig 1914.
3. J.N. Goodier, "An Analogy between plane stress and the slow motion of a viscous fluid in two dimensions", Phil. Mag., ser. 7, vol. 17, pp.554, pp.800, 1934.
4. Evans, "Laminar Boundary Layer theory," Addison Wesley Co., pp.191-193, pp.208-213, 1895.
5. Streeter "Fluid Dynamics" A-2061, McGraw-Hill Co., Publications in Aeronautical science, pp.119-133, 1972.
6. J.K. Vennard, R.L. street, "Elementary Fluid Mechanics" Fifth Edition, chap.4, 1975.
7. Theodore Allen Jr., Richard L. Ditsworth, "Fluid Mechanics" McGraw-Hill Co., pp.228-230, 1972
8. Toshio Kobayashi, "Fluid Forces Acting on Bluff bodies," J. SEISAN-KENKYU Vol. 24 No.1, pp.2~9, 1972. 1
9. Toshio Kobayashi, Tetsuo Saga, Akira Kobayashi, "Experimental Study on Flow forces acting on circular cylinder 1st Report, 2nd Report," J. SEISAN-KENKYU Vol. 23 No.9, pp.387~394, 1971. 9
10. Anatol Roshko, "Experiments on the Flow past a circular cylinder at very high Reynolds number," J. Fluid Mechanics vol. 10, part3, pp.345-356, 1961. 5.
11. S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, "Theory of Elasticity," Third Edition, McGraw-Hill Co., Kogakusha, pp.90-97, pp.168-194, 1970.
12. 西田正孝, "應力集中", 森北出版, Chapter 2, pp.217-365, 1967.
13. 西田正孝, "應力測定法", 常盤書房, pp.180~182, 1943.
14. Tsuiji, Kawada, Nisida, "Photoelastic Experimental Method," Nikkan Kogyo Simbun Co., pp.86~90, 1965.
15. R.C.J. Howland, Trans. Roy. Soc(London), Ser.A, vol.229, pp.49, 1930