

<論 文>

近似理論에 의한 Cantilever 圓筒셴의 解析

金 天 旭* · 李 永 臣**

(1981年 1月 22日 接受)

Analysis of a Cantilever Cylindrical Shell by an Approximate Theory

Chon W. Kim and Young Shine Lee

Abstract

The present study gives an approximate equation of circular cylindrical shell on the basis of Flügge's exact theory. The longitudinal bending moment M_x and circumferential strain ϵ_θ are assumed to be small and have been neglected.

The governing equation of the cylindrical shell, which is generally presented as 8th order partial differential equation, is reduced into a 4th order partial differential equation for axial coordinate.

To verify the validity and accuracy of this approximate theory, the cantilever cylindrical shell subjected to a concentrated load is analyzed. The maximum errors of longitudinal stress and deflection are about 10 percent compared with the analysis by Flügge's theory and are about 15 percent with experimental results.

1. 緒 論

圓筒셴은 셴構造中에서도 가장 널리 사용되고 용도도 다양하다.⁽¹⁾ 그러나 圓筒셴의 幾何學的 單純性에도 불구하고 平衡方程式의 解는 간단하지 않다. 이 解는 작용하는 荷重과 支持條件에 따라 形式이 달라지므로 주어진 범위에서 비교적 정밀한 解를 주는 近似理論이 많이 연구되었다.^(2,3,4) 그러나 지나친 單純化는 理論의 적용범위를 너무 한정하기 때문에 비교적 넓은 응용범위를 가지면서 解도 비교적 간단한 近似理論의 研究가 필요하다.

本 研究에서는 圓筒셴 要素의 平衡을 고려함에 있어 중요한 힘들은 무시하지 않고 軸方向모우멘트 M_x 와 圓周方向變形率 ϵ_θ 만을 작다고 가정하여 무시하였다. 平

衡方程式은 위의 假定을 Flügge의 嚴密理論에 넣어 近似方程式으로 유도하였다. 本 近似理論은 圓筒셴의 嚴密理論들이 軸方向座標에 대하여 8階인데 비하여 4階로 축소된 微分方程式을 나타내며, 따라서 緣기에 편리한 장점을 가지게 되었다.

本 近似理論의 有用성과 精密度를 검토하기 위하여 自由端에서 集中荷重을 받는 Cantilever 圓筒셴을 해석하였다.

2. 近似理論

2.1. 解析모델(shell geometry)

Fig. 1에서 보여주는 等方性材質의 均一두께인 圓筒셴을 생각한다. 圓筒셴의 半徑은 a , 두께 h , 그리고 길이는 L 이다. 셴의 中央面위의 임의의 점의 위치는 座標系 (x^*, θ) 로 표시하고 半徑方向의 座標은 z^* 이다.

* 正會員, 延世大學校 機械工學科

** 正會員, 忠南大學校 機械設計科

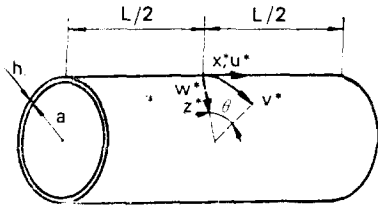


Fig. 1 Geometry and coordinates of the cylindrical shell.

또한 中央面위의 임의의 점에서의 軸方向, 圓周方向, 半徑方向의 變位成分을 u^*, v^*, w^* 로 표시한다. 座標系 및 變位成分들을 다음의 無次元量을 도입하여 표시한다.

$$x = x^*/a, \quad z = z^*/a, \quad u = u^*/a, \quad v = v^*/a, \quad w = w^*/a \quad (1)$$

2.2. 基本方程式

Fig. 2에서 보여주는 쉘要素의 stress resultant와 stress couple에 대한 平衡方程式은 잘 알려져 있으며 다음과 같이 주어진다.⁽⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + aP_x &= 0 \\ \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} \right) + aP_\theta &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{\theta x}}{\partial x \partial \theta} + aN_\theta + a^2P_z &= 0 \\ aN_{x\theta} - aN_{\theta x} + M_{\theta x} &= 0 \end{aligned} \right\} (2a, b, c, d)$$

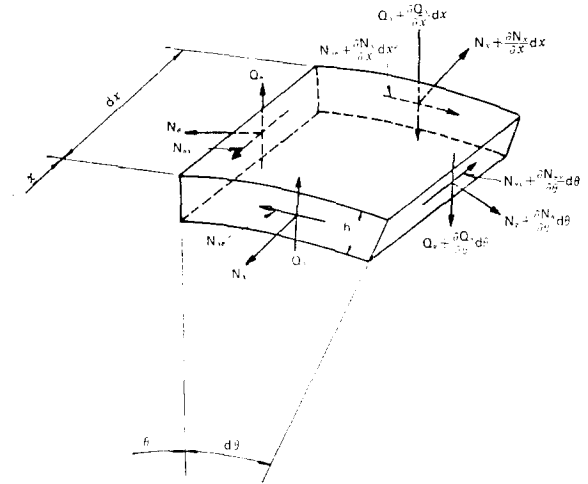
셸中央面의 變形率—變位關係式은

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_\theta &= \frac{\partial v}{\partial \theta} - w \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} (3a, b, c)$$

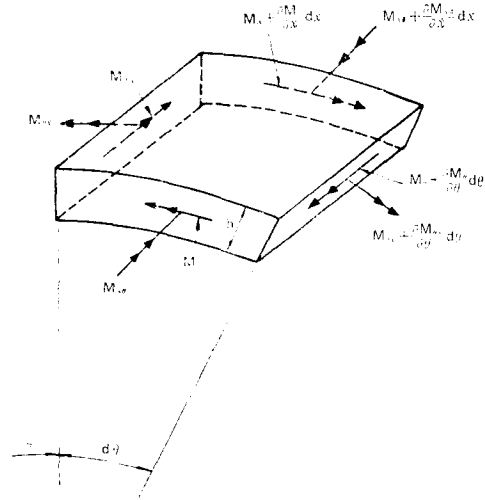
曲率變化는

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ K_\theta &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \\ K_{x\theta} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} (4a, b, c)$$

로 정의된다.



(a) Stress resultants in the shell element.



(b) Stress couples in the shell element.

Fig. 2

2.3. 近似理論

圓筒셸의 變形을 검토할 때 몇가지 假定을 세울 수 있다. 즉 圓筒셸要素에 작용하는 합 모우멘트중에서 軸方向모우멘트 M_x 는 軸方向의 曲率變化가 비교적 크지 않으므로⁽⁶⁾ 무시할 수 있다. 또한 圓周方向變形率 ϵ_θ 는 中央面의 길이 변화는 없다고 가정함으로써 무시할 수 있다. 즉

$$M_x = \epsilon_\theta = 0 \quad (5)$$

라 假定한다.

圓筒殼의 各種理論은 모두 몇개의 假定위에 成立되어 있으며 假定의 內容에 따라 近似化의 程度가 달라진다.

Table 1 에서는 各種理論의 基本假定을 보여준다.

Table 1 Assumptions on the approximation.

Theory	Assumptions
Love ⁽⁷⁾	$\epsilon_x = \epsilon_\theta = \gamma_{x\theta} = 0$ (中央面)
Timoshenko ⁽⁷⁾	$\epsilon_x = \epsilon_\theta = \gamma_{x\theta} = 0$ (中央面)
Vlasov ⁽⁸⁾	$\epsilon_\theta = \gamma_{x\theta} = M_x = Q_x = 0$
Finsterwalder ⁽⁹⁾	$M_x = M_{x\theta} = Q_x = 0$
Schorer ⁽¹⁰⁾	$\epsilon_x = \gamma_{x\theta} = M_x = Q_x = M_{x\theta} = 0$
Billington ⁽¹¹⁾	$\epsilon_\theta = 0$
Present	$M_x = \epsilon_\theta = 0$

다음에 stress resultant N_θ 와 stress couple M_θ 에 관해서는 Flügge⁽¹²⁾ 가 사용한 嚴密한 表現을 채용하고, 그밖의 관계식은 Donnell 方程式의 誘導過程에서 사용한 것과 같은 표현⁽⁵⁾을 쓰면, stress resultant 및 stress couple, shear stress resultant 등과 變位와의 關係式은 다음과 같이 주어진다.

stress resultant 와 變位와의 關係式은

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right\} \\ N_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \theta} - w + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(v + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} \\ N_{x\theta} = N_{\theta x} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6a, b, c)$$

stress couple 과 變位와의 關係式은

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{D}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \\ M_\theta &= -\frac{D}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w \right) \\ M_{x\theta} = M_{\theta x} &= \frac{D}{a} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (7a, b, c)$$

shear stress resultant 와 變位와의 關係式은

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} \right) \\ Q_\theta &= -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8a, b)$$

이다.

여기서

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ E &= \text{Young's modulus} \\ \nu &= \text{Poisson ratio} \end{aligned} \right\} \quad (8c)$$

이다.

一般的으로 圓筒殼에서 半徑方向變位の 導函數는 軸方向에 대한 것보다 圓周方向에 대한 것이 훨씬 더 중요한 意味를 가진다.^(6,13) 따라서 본 研究에서 N_θ , M_θ 는 半徑方向變位の 圓周方向導函數를 포함하는 Flügge 의 表現을 채용하였다. 유사한 근사화를 直交異方性材料에 적용한 연구도 보고되고 있다.⁽¹⁴⁾

Table 2. 에서는 各種 圓筒殼理論에서 사용한 stress resultant 및 stress couple 의 變位와의 關係式을 보여 주고 있다.

式 (7), (8)을 平衡方程式(2)에 대입하고 假定 (5)을 적용하여 變位成分 u, v, w 로 표시되는 平衡方程式을 구하면 다음과 같다.

Table 2 Stress resultants and stress couples in various cylindrical shell theories.

Variables	Flügge ⁽¹²⁾	Donnell ⁽⁵⁾	Vlasov ⁽⁸⁾	Schorer ⁽¹⁰⁾	Present
N_θ	$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \right]$	$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right]$	$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right]$	0	$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) \right]$
N_x	$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ \left. + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]$	$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ \left. + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right]$	$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ \left. + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right]$	$\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ \left. + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right]$

$N_{\theta x}$	$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right]$	$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$	$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$	0	$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$
$N_{x\theta}$	$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$	$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$	$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$	0	$\frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$
M_{θ}	$-\frac{D}{a} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$	$-\frac{D}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$	$-\frac{D}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$	$-\frac{D}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$	$-\frac{D}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$
M_x	$-\frac{D}{a} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \right]$	$-\frac{D}{a} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$	0	0	0
$M_{\theta x}$	$-\frac{1}{2} \frac{D}{a} (1-\nu) \left[-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right]$	$\frac{D}{a} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$	0	0	$\frac{D}{a} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$
$M_{x\theta}$	$\frac{D}{a} (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]$	$\frac{D}{a} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$	0	0	$\frac{D}{a} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \\ & - \nu \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{Eh} a P_x = 0 \\ & \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \\ & - \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{1-\nu^2}{Eh} a P_{\theta} = 0 \\ & - \nu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial \theta} + w + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w + (4-3\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right\} \\ & - \frac{1-\nu^2}{Eh} a P_z = 0 \end{aligned} \right\} (6a, b, c)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^8 w}{\partial \theta^8} + (4-3\nu) \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \\ & + 4K^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{a^3}{D} \left[\nabla^4 P_z + \frac{1}{a} \left\{ \frac{\partial^3 P_{\theta}}{\partial \theta^3} \right. \right. \\ & \left. \left. + \nu \frac{\partial^3 P_x}{\partial x^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 P_{\theta}}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 P_x}{\partial x \partial \theta^2} \right\} \right. \\ & \left. \nabla^4 u = - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1-\nu^2}{Eh} a \left[\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 P_x}{\partial \theta^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 P_{\theta}}{\partial x \partial \theta} \right] \right\} (10a, b, c) \\ & \left. \nabla^4 v = (2+\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right. \\ & \left. - \frac{1-\nu^2}{Eh} a \left[\frac{\partial^2 P_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 P_{\theta}}{\partial x^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 P_x}{\partial x \partial \theta} \right] \right\} \end{aligned} \right\} (10d)$$

式 (9)을 u, v, w 가 독립적으로 표시되는 方程式으로 변환시키면 다음의 方程式을 얻는다.

여기서 $4K^4 = 12(1-\nu^2) \left(\frac{a}{h} \right)^2$ (10d)

이다.

3. 近似理論의 一般解

本 近似理論의 齊次微分方程式의 一般解를 Hoff⁽¹⁵⁾의 解析方法에 따라 유도한다. 圓筒靚이 軸方向으로 曲率變化가 完만할 때 變位成分을 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_j \sum_n A_{nj} e^{P_{nj}x} \cos n\theta \\ u &= \sum_j \sum_n B_{nj} e^{P_{nj}x} \cos n\theta \\ v &= \sum_j \sum_n C_{nj} e^{P_{nj}x} \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (11a, b, c)$$

j 에 대한 summation 項은 4개이며, n 에 대한 summation 項은 支持條件에 따라 달라진다. nj 번째 項을 式 (10)에 代入하면 各係數사이에는 다음의 關係式이 성립된다

$$\left. \begin{aligned} B_{nj} &= \frac{P_{nj}(\nu P_{nj}^2 + n^2)}{(P_{nj}^2 - n^2)^2} A_{nj} \\ C_{nj} &= \frac{n[n^2 - (2 + \nu)P_{nj}^2]}{(P_{nj}^2 - n^2)^2} A_{nj} \end{aligned} \right\} \quad (12a, b)$$

式 (11a)을 式 (10a)에 代入하면 다음의 特性方程式을 얻는다.

$$P_{nj}^4 - \frac{(4-3\nu)n^6}{4K^4} P_{nj}^2 + \frac{(n^8 - 2n^6 + n^4)}{4K^4} = 0 \quad (13)$$

式 (13)의 特性根 P_{nj} 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_{nj} = \pm \alpha_n \pm i\beta_n, \quad j=1, 2, 3, 4 \quad (14)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= R_n^{1/2} \cos \frac{\phi_n}{2} \\ \beta_n &= R_n^{1/2} \sin \frac{\phi_n}{2} \\ R_n &= \sqrt{C_{n1}^2 + C_{n2}^2} \\ C_{n1} &= \frac{(4-3\nu)n^6}{8K^4} \\ C_{n2} &= \frac{[4(4-3\nu)K^4(n^8 - 2n^6 + n^4) - \{(4-3\nu)n^6\}^2]^{1/2}}{8K^4} \\ \phi_n &= \cos^{-1} \frac{C_{n1}}{R_n} = \sin^{-1} \frac{C_{n2}}{R_n} \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

式 (14)를 式 (11)에 代入하면 다음의 變位關係式을 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_n [e^{-\alpha_n x} (A_{n1} \cos \beta_n x - A_{n2} \sin \beta_n x) \\ &\quad + e^{\alpha_n x} (A_{n3} \cos \beta_n x - A_{n4} \sin \beta_n x)] \cos n\theta \\ u &= \sum_n [-A_{n1} (\Omega_{n1}' \cos \beta_n x + \Omega_{n1} \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n2} (\Omega_{n1} \cos \beta_n x - \Omega_{n1}' \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n3} (\Omega_{n1}' \cos \beta_n x - \Omega_{n1} \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x} \\ &\quad - A_{n4} (\Omega_{n1} \cos \beta_n x \\ &\quad + \Omega_{n1}' \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x}] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (15b)$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \sum_n [A_{n1} (\Omega_{n2}' \cos \beta_n x + \Omega_{n2} \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad - A_{n2} (\Omega_{n2} \cos \beta_n x - \Omega_{n2}' \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n3} (\Omega_{n2}' \cos \beta_n x - \Omega_{n2} \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n4} (\Omega_{n2} \cos \beta_n x \\ &\quad + \Omega_{n2}' \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x}] \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (15c)$$

式 (15)의 變位關係式을 應力-變位關係式 (6), (7), (8)에 代入하여 合應力 및 合 모우멘트 등을 구하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \sum_n [-\alpha_n A_{n1} + \beta_n A_{n2} + \alpha_n A_{n3} \\ &\quad - \beta_n A_{n4}] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \sum_n [-A_{n1} (\Gamma_{n1} \cos \beta_n x \\ &\quad + \Gamma_{n1}' \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n2} (P_{n1}' \cos \beta_n x + \Gamma_{n1} \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n3} (-\Gamma_{n1} \cos \beta_n x + \Gamma_{n1}' \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n4} (\Gamma_{n1}' \cos \beta_n x \\ &\quad + \Gamma_{n1} \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x}] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (16b)$$

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \sum_n [A_{n1} (\Delta_{n1} \cos \beta_n x \\ &\quad + \Delta_{n1}' \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n2} (-\Delta_{n1}' \cos \beta_n x + \Delta_{n1} \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n3} (-\Delta_{n1} \cos \beta_n x + \Delta_{n1}' \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n4} (\Delta_{n1}' \cos \beta_n x \\ &\quad + \Delta_{n1} \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x}] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (16c)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{x\theta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \sum_n [-A_{n1} (S_{n1} \cos \beta_n x \\ &\quad - S_{n1}' \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad - A_{n2} (S_{n1}' \cos \beta_n x + S_{n1} \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n3} (S_{n1} \cos \beta_n x + S_{n1}' \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n4} (S_{n1}' \cos \beta_n x \\ &\quad - S_{n1} \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x}] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (16d)$$

$$\left. \begin{aligned} M_\theta &= -\frac{D}{a} \sum_n [A_{n1} (\Pi_{n1} \cos \beta_n x \\ &\quad - \Pi_{n1}' \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n2} (\Pi_{n1}' \cos \beta_n x + \Pi_{n2} \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n3} (-\Pi_{n1} \cos \beta_n x - \Pi_{n1}' \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n4} (-\Pi_{n1}' \cos \beta_n x \\ &\quad + \Pi_{n1} \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x}] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (16e)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{\theta x} &= -\frac{D}{a} (1-\nu) \sum_n n [A_{n1} (\alpha_n \cos \beta_n x \\ &\quad - \beta_n \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad - A_{n2} (\beta_n \cos \beta_n x - \alpha_n \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} \\ &\quad - A_{n3} (\alpha_n \cos \beta_n x - \beta_n \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x} \\ &\quad + A_{n4} (\beta_n \cos \beta_n x \\ &\quad + \alpha_n \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x}] \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (16f)$$

$$Q_x = -\frac{D}{a^2} \sum_n [A_{n1}(-A_{n1} \cos \beta_n x + A_{n1}' \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} - A_{n2}(A_{n1}' \cos \beta_n x + A_{n1} \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} - A_{n3}(A_{n1} \cos \beta_n x + A_{n1}' \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x} + A_{n4}(A_{n1}' \cos \beta_n x - A_{n1} \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x}] \cos n\theta \quad (16g)$$

$$Q_\theta = -\frac{D}{a^2} \sum_n [A_{n1}(\chi_{n1} \cos \beta_n x + \chi_{n1}' \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} - A_{n2}(\chi_{n1} \cos \beta_n x + \chi_{n1} \sin \beta_n x) e^{-\alpha_n x} + A_{n3}(\chi_{n1} \cos \beta_n x + \chi_{n1}' \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x} + A_{n4}(\chi_{n1}' \cos \beta_n x - \chi_{n1} \sin \beta_n x) e^{\alpha_n x}] \sin n\theta \quad (16h)$$

여기서 $A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, A_{n4}$ 는 境界條件으로부터 결정되는 적분상수이다.

위의 식 (15), (16)에서 사용된 기호는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \Omega_{n1} &= \frac{1}{(\mu_{n1}^2 + \mu_{n2}^2)^2} [-\alpha_n \nu \{(\alpha_n^2 - \beta_n^2)(\mu_{n1}^2 - \mu_{n2}^2) + 4\mu_{n1} \mu_{n2} \alpha_n \beta_n\} - 2\beta_n \nu \{(\alpha_n^2 - \beta_n^2)\mu_{n1} \mu_{n2} - (\mu_{n1}^2 - \mu_{n2}^2)\alpha_n \beta_n\} + n^2 \{ \alpha_n (\mu_{n1}^2 - \mu_{n2}^2) + 2\beta_n \mu_{n1} \mu_{n2} \}] \\ \Omega_{n1}' &= \frac{1}{(\mu_{n1}^2 + \mu_{n2}^2)^2} [\beta_n \nu \{(\alpha_n^2 - \beta_n^2)(\mu_{n1}^2 - \mu_{n2}^2) + 4\mu_{n1} \mu_{n2} \alpha_n \beta_n\} + 2\alpha_n \nu \{(\alpha_n^2 - \beta_n^2)\mu_{n1} \mu_{n2} - (\mu_{n1}^2 - \mu_{n2}^2)\alpha_n \beta_n\} - n^2 \{ \beta_n (\mu_{n1}^2 - \mu_{n2}^2) - 2\alpha_n \mu_{n1} \mu_{n2} \}] \\ \Omega_{n2} &= \frac{1}{(\mu_{n1}^2 + \mu_{n2}^2)^2} [n^3 \mu_{n1} \mu_{n2} - n(2 + \nu) \{(\alpha_n^2 - \beta_n^2)\mu_{n1} \mu_{n2} - (\mu_{n1}^2 - \mu_{n2}^2)\alpha_n \beta_n\}] \\ \Omega_{n2}' &= \frac{1}{(\mu_{n1}^2 + \mu_{n2}^2)^2} [n^3 (\mu_{n1}^2 - \mu_{n2}^2) - n(2 + \nu) \{(\alpha_n^2 - \beta_n^2)(\mu_{n1}^2 - \mu_{n2}^2) + 4\mu_{n1} \mu_{n2} \alpha_n \beta_n\}] \\ \mu_{n1} &= \alpha_n^2 - \beta_n^2 - n^2, \quad \mu_{n2} = 2\alpha_n \beta_n \\ \Gamma_{n1} &= \beta_n \Omega_{n1} - \alpha_n \Omega_{n1}' + \nu \Omega_{n2} - \nu \\ \Gamma_{n1}' &= -\alpha_n \Omega_{n1} - \beta_n \Omega_{n1}' - \nu \Omega_{n2} \\ \Delta_{n1} &= n \Omega_{n2}' + \nu (\alpha_n \Omega_{n1}' - \beta_n \Omega_{n1}) - \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a}\right)^2 (1 - n^2) - 1 \\ \Delta_{n1}' &= n \Omega_{n2} + \nu (\alpha_n \Omega_{n1} + \beta_n \Omega_{n1}') \\ S_{n1} &= -n \Omega_{n1}' + \alpha_n \Omega_{n2}' - \beta_n \Omega_{n2} \\ S_{n1}' &= n \Omega_{n1} - \alpha_n \Omega_{n2} - \beta_n \Omega_{n2} \\ \Pi_{n1} &= (\alpha_n^2 - \beta_n^2) \nu - n^2 + 1, \quad \Pi_{n1}' = -2\alpha_n \beta_n \nu \\ A_{n1} &= \alpha_n^3 - 3\alpha_n \beta_n^2 + \alpha_n n^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{n1}' &= \beta_n^3 - 3\alpha_n^2 \beta_n + \beta_n n^2 \\ \chi_{n1} &= n^2 - n(\alpha_n^2 - \beta_n^2), \quad \chi_{n1}' = 2\alpha_n \beta_n \end{aligned} \right\}$$

4. 自由端에서 集中荷重을 받는 Cantilever 圓筒殼

4.1. 理論解

Fig. 3 과 같이 自由端에서 集中荷重 P 을 받는 Cantilever 圓筒殼을 解析한다.

境界條件은

固定端 ($x=0$)에서

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

自由端 ($x=L/a$)에서

$$\left. \begin{aligned} N_x &= 0 \\ T_x &= -q_0 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

여기서

$$T_x = Q_x - \frac{1}{a} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \text{ 이다. } (7)$$

荷重 q_0 을 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 에 대하여 Fourier 級數로 전개하면 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \frac{P}{2\pi a} \\ &= \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4q_0}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{n\theta}{2}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \end{aligned} \right\} (19)$$

이 級數의 收斂을 조사한 결과 9項까지 채용하면 충분함을 알 수 있었다.

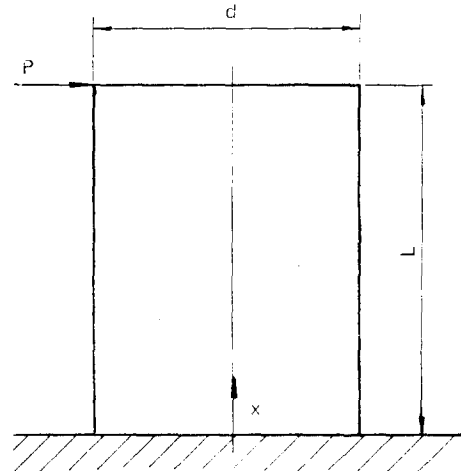


Fig. 3 Cantilever cylindrical shell subjected to a concentrated load at its free edge.

境界條件 (18)을 式 (15a), (15c), (16b), (16f), (16g) 이것을 行列로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ Q_{n2}' & -Q_{n2} & Q_{n2}' & Q_{n2} \\ -e^{-\mu}(\Gamma_{n1}\cos\gamma & -e^{-\mu}(\Gamma_{n1}'\cos\gamma & e^{\mu}(-\Gamma_{n1}\cos\gamma & e^{\mu}(\Gamma_{n1}'\cos\gamma \\ -\Gamma_{n1}\sin\gamma) & -\Gamma_{n1}\sin\gamma) & +\Gamma_{n1}'\sin\gamma) & +\Gamma_{n1}'\sin\gamma) \\ e^{-\mu}(\xi_{n1}+\xi_{n1}') & e^{-\mu}(\xi_{n2}+\xi_{n2}') & e^{\mu}(\xi_{n1}+\xi_{n1}') & e^{\mu}(\xi_{n2}+\xi_{n2}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n1} \\ A_{n2} \\ A_{n3} \\ A_{n4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a^2}{D}q_0\cos\theta \end{pmatrix} \quad (20)$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \beta_n(L/a), \quad \mu = \alpha_n(L/a) \\ \xi_n &= \cos \gamma \{A_{n1} - (1-\nu)n^2\alpha_n\}, \\ \xi_{n1}' &= \sin \gamma \{A_{n1}' + (1-\nu)n^2\beta_n\}, \\ \xi_{n2} &= \cos \gamma \{A_{n1}' - (1-\nu)n^2\beta_n\}, \\ \xi_{n2}' &= \sin \gamma \{A_{n1} + (1-\nu)n^2\alpha_n \} \end{aligned} \right\} \quad (20a)$$

式 (20)에서 각 n 에 대하여 係數 A_{ni} 을 구하고 이를 式 (15), (16)에 대입하여 變位 및 應力成分을 구한다.

自由端에 集中荷重을 받는 Cantilever 圓筒殼을 외팔보로 생각하고 해석한 beam solution은 다음과 같이 주어진다.

$$N_{xB} = \sigma_x \cdot h = \frac{M_x \cdot a}{I} \cdot h = \frac{PL}{\pi a^2} \quad (21a)$$

$$w_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{PL^3}{3\pi a^3 Eh} \quad (21b)$$

이 beam solution (21)는 지나친 單純化에 의한 近似值이지만 圓筒殼理論의 精密度를 표시할 때 應力值 등을 無次元量으로 표시하기 위하여 사용한다.

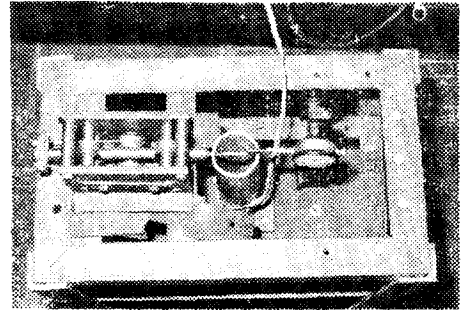
4.2. 實 驗

自由端에서 集中荷重을 받는 Cantilever 圓筒殼의 軸方向應力과 自由端의 變位를 測定하였다. 實驗裝置의 사진과 配置圖를 Fig. 4에서 보여준다.

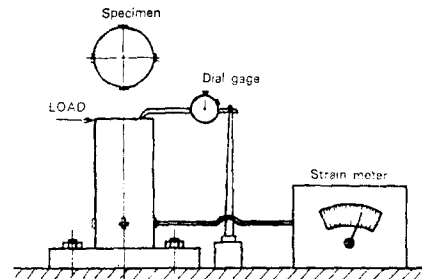
試片은 이음매없는 鋼管을 가공하여 제작하였다. 軸方向應力은 固定端가까이에 45° 스트레인로켓을 부착하여 平面變形率을 측정하고 이 값을 사용하여 軸方向應力 N_x 을 算出 하였다.

自由端의 荷重作用點의 變位를 다이얼게이지를 사용하여 측정하였다. 鋼管의 처짐이 작기 때문에 彈性係

數가 작은 재료로서 P.V.C管을 사용하여 試片을 제작하였다. 引張試驗을 통하여 鋼管 및 P.V.C管의 彈性係數를 측정하였으며, 鋼管의 彈性係數 $E_s = 1.94 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$, Poisson's ratio $\nu = 0.3$, P.V.C管의 彈性係數 $E_p = 99.6 \text{ kgf/mm}^2$ 이었다. 試片의 치수, 材質 및 測定值를 Table 3에 보여준다.



(a) Photograph of the experimental setup.



(b) Schematic diagram of the experimental setup.

Fig. 4

Table 3 Geometry and measured values of specimens.

Specimen No	Length(L) mm	Inner diameter (a) mm	L/a	Thickness (h) mm	a/h	Material	Deflection ($\frac{1}{100}$ mm)	Strain $\times 10^{-6} / \text{kgf}$		
								ϵ_a^*	ϵ_b^*	ϵ_c^*
1	51.2	25.4	2	1.8	14.1	Steel	0.0097	1.23	0.63	0.02
2	51.2	25.4	2	0.9	28.2	"	0.021	2.40	1.32	0.06
3	51.2	25.4	2	0.7	36.3	"	0.026	3.03	1.49	0.07
4	102.0	25.4	4	1.8	14.1	"	0.034	2.23	1.05	0.03

5	102.0	25.4	4	0.9	28.2	Steel	0.068	4.16	2.07	0.09
6	102.0	25.4	4	0.7	36.3	"	0.090	5.35	2.65	0.12
7	152.0	25.4	6	1.8	14.1	"	0.085	3.28	1.72	0.14
8	152.0	25.4	6	0.9	28.2	"	0.184	6.24	3.14	0.17
9	152.0	25.4	6	0.7	36.3	"	0.253	7.83	3.86	0.19
10	203.4	25.4	8	1.8	14.1	"	0.187	3.84	1.86	0.32
11	203.4	25.4	8	0.9	28.2	"	0.390	7.93	3.89	0.46
12	203.4	25.4	8	0.7	36.3	"	0.520	9.98	4.85	0.59
13	51.2	25.4	2	1.8	14.1	P.V.C	1.89			
14	102.0	25.4	4	1.8	14.1	"	6.62			
15	152.0	25.4	6	1.8	14.1	"	16.6			
16	203.4	25.4	8	1.8	14.1	"	36.36			

* Note: Strain components for axial 45° inclined and circumferential directions are denoted by ϵ_a, ϵ_b and ϵ_c respectively.

5. 檢 討

本 近似理論에 의한 計算値와 實驗値를 비교 검토하도록 Fig. 5 와 Fig. 6 에 그래프로 표시 하였다. Flugge 理論에 의한 Ujihashi⁽¹⁶⁾의 研究結果도 표시하여 近似理論의 精밀도를 검토 하였다.

Ujihashi 는 自由端에서 충격하중을 받는 Cantilever 圓筒殼을 解析하면서, 靜荷重을 받는 경우의 수치결과도 제시하고 있다. 그는 Flugge 理論値를 기준으로

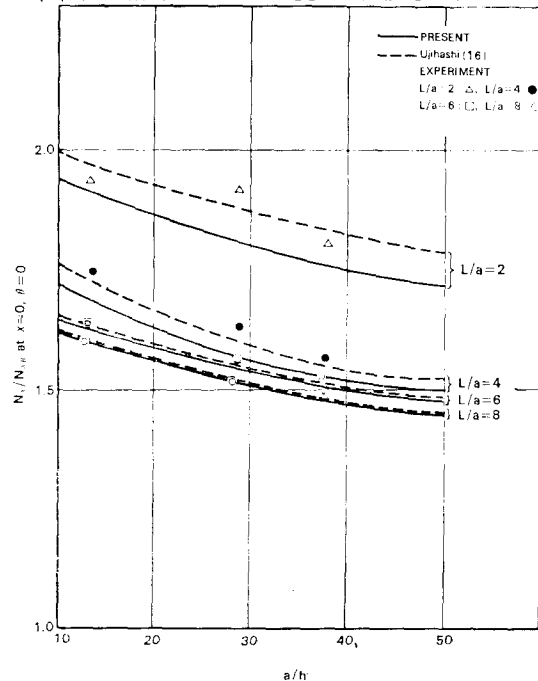


Fig. 5 Longitudinal stress N_x for various length-radius ratios.

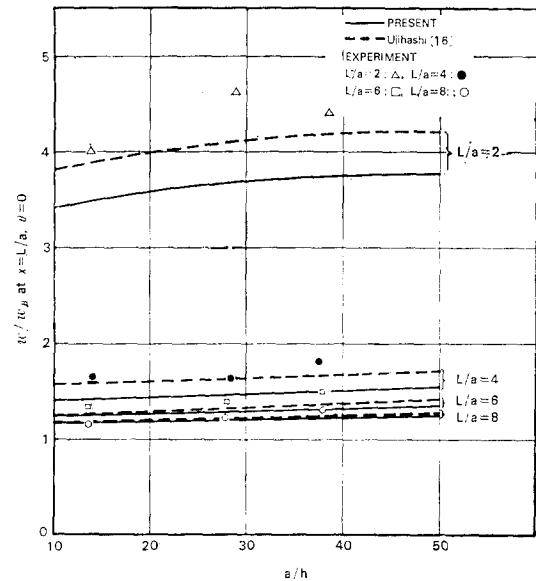


Fig. 6 Maximum deflection w for various length-radius ratios.

beam solution 및 Donnell theory 를 표시하였으므로 본 연구에서는 그의 圖表를 역수로 취하였다.

Fig. 5 에서는 固定端부근에서의 軸方向應力 N_x 의 最大値를 beam solution 과의 比($N_x/N_{x,0}$)로 표시하였고, 殼의(길이/반경) 및 (반경/두께)에 대하여 그래프로 표시하였다. 本 近似理論에 의한 計算値는 Ujihashi⁽¹⁶⁾의 研究結果와 비교할 때 조금씩 작으며 實驗値는 Ujihashi 의 研究結果에 더욱 가까이 있음을 알 수 있다. 그러나 本 近似理論과 Flugge 理論과의 誤差는 $L/a=2$ 인 경우 10% 이내이며, $L/a \geq 4$ 에서는 4% 이내로 되어 工學的으로 충분히 精밀함을 알 수 있다.

Fig. 6 에서는 荷重作用點에서의 變位를 同一한 factor

에 대하여 표시하였다.

이 경우에도 近似理論의 誤差는 軸方向應力의 경우와 마찬가지로 $L/a \geq 4$ 에 대해서는 5% 이하임을 알 수 있으며 實驗値는 Ujihashi의 研究結果보다 조금씩 크게 표시되고 있다.

Table 3에서의 실험결과로부터 圓周方向變形率 ϵ_θ 는 실제로 무시할 수 있을 정도로 작았으며, 이것은 본 近似理論의 基本假定에서 사용한 $\epsilon_\theta = 0$ 와 일치한다.

$L/a = 2$ 인 짧은 圓筒셴에서는 Flügge理論을 사용한 Ujihashi의 研究結果와 조금 큰 차이를 보여주고 있는데, 이것은 본 近似理論이 Warping의 영향을 완전히 고려하기에는 지나치게 單純化되었음을 나타낸다고 볼 수 있다.

6. 結 論

임의의 荷重을 받는 圓筒셴의 近似理論을 Flügge의 嚴密理論으로부터 軸方向모우멘트 M_x 와 圓周方向變形率 ϵ_θ 을 무시할 수 있다고 假定하여 유도하였다. 圓周方向變化와 셴두께의 영향에 관해서는 Flügge의 關係式을 그대로 사용하였으며, 나머지 關係式은 Donnell方程式의 誘導過程에서 사용한 것과 같은 식을 사용하였다. 본 近似理論의 一般解를 임의의 荷重에 대하여 유도하였으며, 精密度는 自由端에서 集中荷重을 받는 Cantilever 圓筒셴의 理論解析과 實驗을 통하여 檢討하였다.

本 研究의 結果를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 本 近似理論에 의한 解析은 프로그램이 가능한 卓上電子計算器로 가능하도록 單純化시켰다.
- (2) 本 近似理論에 의한 一般解를 유도하여 圓筒셴의 굽힘問題에 이용할 수 있게 하였다.
- (3) 本 理論의 精밀도는 Warping의 영향이 크지 않는 비교적 중간이상의 圓筒셴($L/a \geq 4$)에서는 工學的으로 충분함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Simmonds, J.G., "A Set of Simple, Accurate Equations for Circular Cylindrical Shells," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 2, 1966, pp. 525~541.
2. ACI Committee 334, *Concrete Shell Design and Construction*, American Concrete Institute, 1971.
3. Krajinovic, D., "Semimembrane Analysis of Cylindrical Shells Subjected to Wind Loadings," *Journal of Applied Mechanics*, vol.37, pp. 995~1001, 1970.
4. 金天旭, 李永臣, "圓筒셴의 近似理論에 관한 研究," 大韓機械學會論文集, 제 3 권 제 4 호, pp. 26~31, 1979.
5. Kraus, H., '*Thin Elastic Shells*', John Wiley & Sons, Inc., 1967, pp. 200~300.
6. Abé, H., "The Lowest Order Second Approximation. Theory of Circular Cylindrical Shells and Simplified Equation," *Trans of JSME.*, Vol.45, No. 379, 1979, pp. 1346~1363.
7. Timoshenko, S., and Woinowsky-Krieger, S., '*Theory of Plates and Shells*,' 2nd ed., McGrawhill Book Co., Inc., New York, N.Y., 1959.
8. Vlasov, V.E., "General Theory of Shells and Its Applications in Engineering." (part IV) *NA SA N64-19883*, Washington, D.C., 1964.
9. Finsterwalder, V., "Die Querversteiften Zylindrischen Schalen Wölbe mit Kreissegment förmigen Querschnitt," Vol. 4, *Ing-Arch*, 1933.
10. Schorer, H., "Line Load Action on Thin Cylindrical Shells," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 61, pp. 767~810, 1935.
11. Billington, D.P., and Wang, L-P.C.Y., "A Simplified Theory of Thin Cylindrical Shells," *Journal of the Engineering Mechanics Divison, Proc. ASCE*, Vol. 100, No. EM4, August, 1974, pp. 719~735.
12. Flügge, W., '*Stresses in Shells*,' Springer-Verlag, Berlin, 1962.
13. Morley, L.S.D., "An Improvement of Donnell's Approximation for Thin Walled Circular Cylinders," *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 12, pp. 89~99, 1959.
14. Marzouk, O.A., and Abdel-Sayed, G., "Linear Theory of Orthotropic Cylindrical Shells," *Proc. of ASCE, Journal of the Structural Division*, Vol. 99, No. ST11, pp. 2287~2306, 1973.
15. Hoff, N.J., "Boundary-Value Problems of the Thin-Walled Circular Cylinders," *Journal of*

- Applied Mechanics*, Vol. 21, 1954, pp. 343~350.
16. Ujihashi, S., et al., "Dynamic Deformations and Stresses in a Cantilever Cylindrical Shell Under Impulsive Loads," *Trans. of JSME.*, Vol. 43, No. 376, Dec. 1977, pp. 4389~4396.
17. 金天旭, 李永臣, "風荷重을 받는 圓筒殼의 解析," 延世大學校 産業技術研究所論文集 제 7 집, 1977, pp. 57~65.
18. Ghobrial, M.M. and Abdel-Sayed, G., "Analysis of Orthotropic Cylindrical Cantilever Shells," *Proc. of ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 104, No. EM2, 1978, pp. 287~300.

討 論

과 병 만***

1. 近似理論에서 $M_x = \epsilon_0 = 0$ 이라는 가정(式 5)에 대한 근거가 의문시 된다. 더욱이 예제로 해석한 문제를 볼 때 그러하다. 式 (7)을 볼 때 M_x 가 M_0 에 비해 작을 이유가 없는것 같다.
2. Table 3 에서 ϵ_0 가 무시할 수 있을 정도로 작다는 것은 측정위치가 고정단 근처이므로 당연하고 자유단근처에서 했더라면 상당한 값이 나오리라 추측된다.
3. 경계조건중 $u=0, \frac{\partial w}{\partial x}=0$ 을 만족시킬 수 없는 데 이에 대한 언급이 없다. $\frac{\partial w}{\partial x}=0$ 이면 모우멘트가 필요하게 되므로 $M_x=0$ 이라는 가정과 일관성이 없다.

저자의 의견

1. 圓筒殼의 各種理論은 모두 몇개의 가정위에 성립 되어 있다. Table 1 에서는 各種理論의 기본가정을 보여준다. $M_x=0$ 로 한 것은 軸方向의 曲率變化가 크지 않는 현상에 기초하여 무시한 것이다. (Vlasov, Finsterwalder, Schorer 등에서 채용된 가정)

실제의 문제에서 $w = \sum \sum \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{a}$ 로 했을 때 m 은 1(symmetric) 또는 2(asymmetric)로 되는 것이 일반적이며, n 은 대개 4에서 동적좌굴(dynamic buckling)에서는 40 이상까지 되고 있다. 따라서 이것은 定性的 고려에서 무시한 것이다.

$\epsilon_0=0$ 로 한것은 中央面의 길이변화가 없다고 가정한 것인데 arch 또는 ring에서 線形理論을 유도할 때 많이 쓰이고 있다. (Vlasov, Billington 등에서 채용된 가정)

2. 圓筒殼의 경계조건은 다음과 같다. (Ref.7, p.518)

$$\text{固定端} : u=0, v=0, w=0, \frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$\text{單純支持端} : v=0, w=0, M_x=0, N_x=0$$

본 연구에서는 고정단의 지지조건으로 $v=0, w=0$ 을 취하였다. 고정단에서는 $M_x=0$ 이라는 가정이 오차를 가져온다는 것은 사실이다. Cantilever 殼의 경우는 극히 특별한 경우(실험때문에 선택하였음)이므로 本理論의 正當性에 치명적인 영향을 주는 것으로는 생각하지 않는다.

3. $\epsilon_0=0$ 은 이론의 유도과정에서 도입한 기본가정의 하나이다. 실험치가 自由端 부근에서 없는 것은 유감이나, 어느 정도의 오차는 本理論의 한계로서 부득이하다.

*** 정희원, 한국과학기술원