

구형석출물을 갖는 무한 고체에 정수압이 가해지는 경우에 대한 탄소성해

최 병 익* · 엄 윤 용*

(1981년 2월 25일 접수)

An Elasto-Plastic Solution for Infinite Solid Containing a Spherical Precipitate under Hydrostatic Pressure

Byoung Ik Choi and Youn Young Earmme

Abstract

Equation of equilibrium is derived and solved for an infinite isotropic solid under applied hydrostatic stress which is uniform at large distance, and disturbed by a spherical precipitate which has isotropic elastic constants different from those of the matrix. A linear strain hardening behavior of the matrix is assumed, and an elasto-plastic solution is obtained.

The difference of the total strain energy stored in the infinite solid with and without a precipitate is computed, and compared with that for purely elastic case. Finally the effect of the ratio of the bulk modulus of the precipitate to that of the matrix and the effect of linear strain hardening rate on the plastic zone size and the energy difference are discussed.

1. 서 론

고체안의 어떤 부분이 다른 부분과 탄성계수가 다르거나 부분적인 변형이 있어서 고체의 균일성을 방해할 때에는 고체 물리학적 많은 문제가 발생한다. 즉, 국부적인 열팽창이나 martensite transform, 새로운 상(phase)의 석출물의 생성 등이 일어나면 이 부분에는 크기나 모양등의 변화가 있게 되고, 이 변화는 주변에 의해 구속을 받으므로 이 부분에 내부 응력이 존재하게 되며, 나머지 부분에도 구속력 만큼의 반작용력에 의한 응력 및 변형도가 분포하게 된다. 이와 동등하게 생각할수 있는 구속 상태가 석출물(precipitate) 혹은 2차상입자(second phase particle)를 포함하는 기체에 외부에서 응력을 가했을 때에도 발생한다. 이 경우

의 응력 상태는 밖에서 준 균일한 응력과, 탄성 계수 등이 서로 다르므로 인한 구속 효과로 생긴 구속 응력으로 나누어 생각할 수 있다. 이 구속 상태를 아는 것은 우선 응용 역학적으로 매우 흥미 있는 문제이다. 또한 재료학적으로도 중요하여 구속 응력에 의한 변형 에너지는 여러 현상에 영향을 끼친다. 예를 들면, homogeneous nucleation 중에 핵의 모양이 변화되고¹⁾ 핵의 생성이 저지되는²⁾ 등, 변형 에너지의 영향이 보고된 바있다. 이 외에도 void lattice formation, stress induced phase transformation 등도 영향을 받는 것으로 알려져 있다.

1950년대말 Eshelby 가 타원체 함유물(ellipsoidal inclusion)에 대한 탄성장(elastic field)을 구한^{3),4)},^{5),6)} 이래 지난 20여년간 이 문제에는 커다란 진전이 있었다. Anisotropic Green's function⁷⁾을 이용하여 Eshelby의 방법을 비등방성 기체(anisotropic matrix)

* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

의 경우에 까지 적용한 연구⁸⁾를 비롯하여, 정방형 합유물에 대한 근사해법에 관한 연구^{9), 10), 11)} 등 많은 결과들이 보고 되어있다.

구속 응력의 소성이완(plastic relaxation)은 오랜동안 예기되어왔고 실제로 Kinsman¹²⁾ 또한 Gulden과 Nix¹³⁾ 등에 의하여 석출물 주변에 생긴 전위(dislocation)들이 관찰되기도 하였으나, 탄성론에 입각한 연구에 비하여 소성을 고려한 경우에는 그다지 큰진전을 보이지 못하고 있다. 가장 최근의 보고를 들면 J. K. Lee¹⁴⁾과 W.C. Johnson¹⁵⁾의 연구등이다. 이들은 misfitting spherical precipitate를 갖는 등방성 기체의 응력, 변형도와 변형에너지의 분포를 재질이 탄성-완전소성 임을 가정하여 구했다.

이 논문에서는 구형 석출물(spherical precipitate) 하나가 있는 무한히 큰 등방성 기체에 외부에서 정수압(hydrostatic pressure)이 가해진다. 기체가 탄성-선형 경화성(linear hardening) 임을 가정하여 평형방정식을 풀어 응력, 변형도 등의 분포를 안후에 석출물이 있는 경우와 없는 경우의 저장된 변형에너지의 차이를 구했다. 또한 석출물과 기체의 체적탄성 계수(bulk modulus)의 비(ratio)에 따른 소성영역 및 변형에너지의 변화등을 고찰 하였다.

2. 탄 성 해

반경 a 인 구형 석출물 하나를 포함하는 무한히 큰 고체를 생각하여, Fig.1에서 보인바 처럼 석출물의 중심에 원점이 있는 구면 좌표계(spherical coordinate system)를 도입한다. 기체(matrix) 외부에서 정수압 $\sigma_{ij} = \sigma_{\infty} \delta_{ij} = 3\kappa \varepsilon_{\infty} \delta_{ij}$ 를 가하여 석출물의 반경이 $(1-\delta)a$ 로

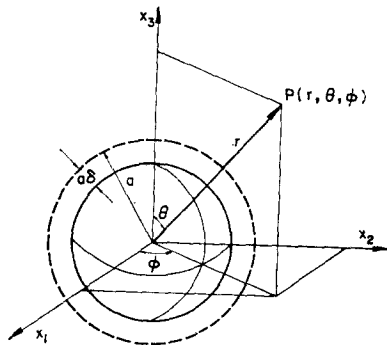


Fig. 1 A spherical precipitate with a spherical coordinate system.

되었다 하자. 여기서 κ 는 기체의 체적 탄성 계수(Bulk Modulus)이고, δ_{ij} 는 Kronecker Delta이다. 문제의 대칭성에 의해서 응력 및 변형도의 영(zero)이 아닌 성분들은 다음과 같이 쓸수 있다¹⁶⁾

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &\equiv \sigma_r(r), \\ \sigma_{\theta\theta} &\equiv \sigma_\theta(r) = \sigma_{\phi\phi}, \\ \varepsilon_{rr} &\equiv \varepsilon_r(r) = \frac{d}{dr}u(r), \\ \varepsilon_{\theta\theta} &\equiv \varepsilon_\theta(r) = \varepsilon_{\phi\phi} = -\frac{1}{r}u(r).\end{aligned}\quad (1)$$

여기서 σ_{rr} , ε_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\sigma_{\phi\phi}$, $\varepsilon_{\phi\phi}$ 등은 각각 r, θ, ϕ 방향으로의 수직 응력 및 변형도 성분을 표시한다. u 는 r 방향으로의 변위이다. 따라서 평형 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (2)$$

(1)식과 Hooke의 법칙을 이용하면 (2)식은 다음과 같이 변위 u 에 대한 상미분 방정식으로 바꾸어 지며

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} = 0, \quad (3)$$

그 해(solution)는 다음과 같이 주어진다.

$$u(r) = Ar + Br^{-2}. \quad (4)$$

여기서 A, B 는 경계 조건에 의해서 결정되는 상수이다.

석출물에서의 변위, 변형도, 응력등을 각각 u^I , ε_r^I , ε_θ^I , σ_r^I , σ_θ^I 등으로 나타내기로 하면, 석출물에서의 변위에 대한 경계 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}u^I(0) &= 0, \\ u^I(a) &= -a\delta,\end{aligned}\quad (5)$$

따라서 u^I , σ_r^I , ε_r^I 등은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}u^I(r) &= -r\delta, \\ \varepsilon_r^I &= \varepsilon_\theta^I = -\delta,\end{aligned}\quad (6)$$

$$\sigma_r^I = \sigma_\theta^I = -3\kappa^I\delta.$$

여기서 κ^I 는 석출물의 체적 탄성계수(Bulk Modulus)를 의미한다. 기체에 대해서는 다음과 같은 경계 조건이 성립한다.

$$\begin{aligned}u^M(a) &= -a\delta, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_r^M &= \varepsilon_{\infty}.\end{aligned}\quad (7)$$

여기서 u^M , ε_r^M 등은 각각 기체에서의 변위, 변형도 등을 표시한다. 이 조건을(4)식 및 Hooke의 법칙에 적용하면 다음을 알 수 있다.

$$u^M(r) = r \left\{ \varepsilon_{\infty} - (\delta + \varepsilon_{\infty}) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right\},$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_r^M(r) &= \varepsilon_\infty + 2(\delta + \varepsilon_\infty) \left(\frac{a}{r}\right)^3, \\ \varepsilon_\theta^M(r) &= \varepsilon_\infty - (\delta + \varepsilon_\infty) \left(\frac{a}{r}\right)^3, \\ \sigma_r^M(r) &= 3\kappa\varepsilon_\infty + 4\mu(\delta + \varepsilon_\infty) \left(\frac{a}{r}\right)^3, \\ \sigma_\theta^M(r) &= 3\kappa\varepsilon_\infty - 2\mu(\delta + \varepsilon_\infty) \left(\frac{a}{r}\right)^3.\end{aligned}\quad (8)$$

κ 는 기재의 체적 탄성 계수이고, μ 는 전단탄성 계수 (shear modulus)이다. δ 는 석출물과 기재의 경계면 상에서 traction 이연속일 조건 즉,

$$\sigma_r^M(a) = \sigma_r^I(a), \quad (9)$$

로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\delta = -\varepsilon_\infty \frac{3\kappa + 4\mu}{3\kappa I + 4\mu} \quad (10)$$

(6)식 및 (8)식에 (10)식을 대입하여 얻어진 탄성해는 다음과 같다.

i) 석출물에서 ($r < a$)

$$\begin{aligned}u^I(r) &= \varepsilon_\infty \frac{3\kappa + 4\mu}{3\kappa I + 4\mu} r, \\ \varepsilon_r^I(r) &= \varepsilon_\theta^I(r) = \varepsilon_\infty \frac{3\kappa + 4\mu}{3\kappa I + 4\mu}, \\ \sigma_r^I(r) &= \sigma_\theta^I(r) = 3\kappa I \varepsilon_\infty \frac{3\kappa + 4\mu}{3\kappa I + 4\mu}.\end{aligned}\quad (11)$$

ii) 기재에서 ($r > a$)

$$\begin{aligned}u^M(r) &= \varepsilon_\infty \left\{ 1 - \frac{3(\kappa I - \kappa)}{3\kappa I + 4\mu} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right\} r, \\ \varepsilon_r^M(r) &= \varepsilon_\infty \left\{ 1 + \frac{6(\kappa I - \kappa)}{3\kappa I + 4\mu} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right\}, \\ \varepsilon_\theta^M(r) &= \varepsilon_\infty \left\{ 1 - \frac{3(\kappa I - \kappa)}{3\kappa I + 4\mu} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right\} \\ \sigma_r^M(r) &= \varepsilon_\infty \left\{ 3\kappa + 12\mu \frac{\kappa I - \kappa}{3\kappa I + 4\mu} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right\}, \\ \sigma_\theta^M(r) &= \varepsilon_\infty \left\{ 3\kappa - 6\mu \frac{\kappa I - \kappa}{3\kappa I + 4\mu} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \right\}.\end{aligned}\quad (12)$$

3. 탄소성해

균일한 정수압이 작용하는 무한 고체를 구형 석출물이 교란 함으로써 생긴 구속 효과를 앞서 구한 탄성해를 가지고 살펴보면 석출물 안에서는 항상 정수압적 상태가 유지되고 있음을 알 수 있다. (식(11)참조) 따라서 석출물에 소성변형이 생기지 않는다.¹⁴⁾

(12)식으로 등가응력 (equivalent stress)을 계산하여 보면, 기재와 석출물의 경계면 상에서 기재안의 등가응력은 항상 최대이고, 밖으로 갈수록 작아져 구속 효과는 적어져 간다. 따라서 소성 영역이 생긴다면 이

경계면 상에서 시작되어 밖으로 진행해 갈 것이다. 문제의 대칭성 (radial symmetry)은 항상 유지되고 있으므로, 소성영역의 모양은 Fig. 2에서처럼 속이 빈구 (hollow sphere)로 생각할 수 있다. 여기서 소성 영역의 내경은 a 이고 외경은 r_p 이다.

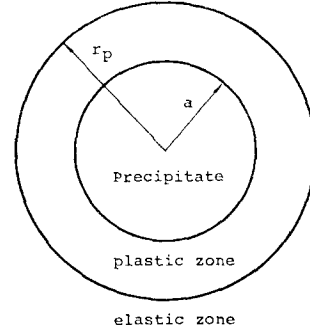


Fig. 2 Plastic zone of the matrix.

이후부터 $u, \varepsilon_r, \sigma_r$ 등으로 소성영역에서의 변위, 변형도, 응력등을 각각 나타내기 위하여, Von-Mises 항복 조건에 대해 등가응력 σ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma = |\sigma_\theta - \sigma_r|. \quad (13)$$

Prandtl-Reuss 관계식 및 소성 변형의 비압축성 (incompressibility)은 대칭성을 고려하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d\varepsilon_r^p = \frac{d\varepsilon^p}{\sigma} (\sigma_r - \sigma_\theta), \quad (14)$$

$$d\varepsilon_r^p + 2d\varepsilon_\theta^p = 0.$$

여기서 $d\varepsilon_r^p, d\varepsilon_\theta^p$ 는 각각 r, θ 방향으로의 소성 변형도 증분 (plastic strain increment)이다. $d\varepsilon^p$ 는 등가 소성 변형도 증분 (equivalent plastic strain increment)이며, (14)식의 둘째식과 대칭성을 이용하여

$$d\varepsilon^p = \frac{2}{3} |d\varepsilon_r^p - d\varepsilon_\theta^p| = |d\varepsilon_r^p| \quad (15)$$

으로 된다.

여기서 해석의 편의상 외부에서 가해지는 정수압을 압축성 ($\sigma_\infty < 0$, 따라서 $\varepsilon_\infty < 0$)으로 생각하고, 석출물이 기재보다 더 단단한 물질로 구성되어 있어 $\kappa I > \kappa$ 라 하자. 이 경우 (12)식의 탄성해를 보면 $\sigma_\theta - \sigma_r \geq 0$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$\sigma = \sigma_\theta - \sigma_r, \quad (16)$$

으로 된다. $\sigma_\infty > 0$ 이거나 $\kappa I < \kappa$ 인 경우는 다음에 설명하기로 한다. 또한, 하중이 비례하중 (proportional

loading) 일경우에는 Deformation Theory 나 Incremental Theory는 동일하므로 (14)식은 바로 적분하면 다음과 같이 된다.

$$\bar{\epsilon}^p = -\epsilon_r^p = 2\epsilon_\theta^p. \quad (17)$$

소성영역에서의 σ_r, σ_θ 는 응력-변형도 관계식(Fig. 3 참조)에 윗식을 고려하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_r = \frac{2\mu}{1-2\nu} \{ (1-\nu)\epsilon_r + 2\nu\epsilon_\theta \} - 2\mu\epsilon_r^p, \quad (18)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2\mu}{1-2\nu} \{ \nu\epsilon_r + \epsilon_\theta \} + \mu\epsilon_\theta^p.$$

여기서 μ 는 전단 탄성 계수, ν 는 Poisson 비이다. 식 (18)을 평형 방정식 (2)에 대입하고 (1)식을 이용하면

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{d\epsilon_r^p}{dr} + \frac{3\epsilon_\theta^p}{r} \right\} \quad (19)$$

임을 보일 수 있다.

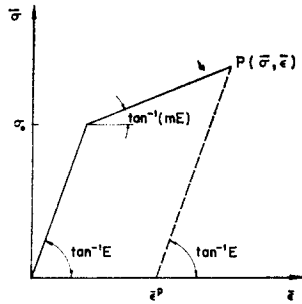


Fig. 3 Equivalent stress-strain curve. Here, σ , equivalent stress; $\bar{\epsilon}$, equivalent strain; σ_0 , yield stress; E , Young's modulus; $\bar{\epsilon}^p$, equivalent plastic strain, respectively.

한편, Fig. 3에서 보이는 바 처럼 기재의 변형 경화성을 선형으로 가정하면

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = mE, \quad m \text{은 상수} \quad (20)$$

이므로, 이식과 Fig.3에서의 기하학적인 관계로부터 소성 영역에서의 σ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma = \frac{m}{1-m} E \epsilon^p + \sigma_0. \quad (21)$$

여기서 E 는 Young's modulus 이고 σ_0 는 항복응력이다.

(17)식과 (16)식을 (21)식에 대입한 후, (18)식과 (1)식을 이용하면 ϵ_r^p 를 다음과 같이 얻을 수 있

으며,

$$\epsilon_r^p = \frac{2(1-m)}{3-(1-2\nu)m} \left\{ \frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + \frac{\sigma_0}{2\mu} \right\}, \quad (22)$$

이식을 (19)식에 대입하여 u 에 관한 다음의 상미분 방정식을 얻는다.

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} = \frac{3D}{r}. \quad (23)$$

그해는 다음과 같다.¹⁷⁾

$$u(r) = D r \ln r + M r + N r^{-2}. \quad (24)$$

여기서 M, N 은 경계조건에 의해 결정 되어야 할 상수들 이며, $D = \frac{2(1-m)}{3\kappa + mE} \sigma_0$ 이다.

따라서 소성 영역 ($a < r < r_p$)에서의 응력 및 변형도는 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= D \ln r + D + M - 2N r^{-3}, \\ \epsilon_\theta &= D \ln r + M + N r^{-3}, \\ \epsilon_r^p &= \frac{1-\nu}{1-2\nu} D - \frac{6}{h} (1-m) N r^{-3}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\sigma_r = 3\kappa D \ln r + 3\kappa M - \frac{4}{h} m E N r^{-3},$$

$$\sigma_r = 3\kappa D \ln r + \frac{3}{2} \kappa D + 3\kappa M + \frac{2}{h} m E N r^{-3}.$$

여기서 $h = 3 - (1-2\nu)m$ 이다. 석출물에 대해서는 탄성해를 그대로 적용할 수 있으므로 식 (6)의 결과와 변함이 없다. 기재의 탄성 영역 ($r > r_p$)에서의 변형도는 앞서의 탄성해에서와 비슷한 방법으로 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} u^E(r) &= \epsilon_\infty r + B r^{-2}, \\ \epsilon_r^E(r) &= \epsilon_\infty - 2B r^{-3}, \\ \epsilon_\theta^E(r) &= \epsilon_\infty + B r^{-3}, \\ \sigma_r^E(r) &= 3\kappa \epsilon_\infty - 4\mu B r^{-3}, \\ \sigma_\theta^E(r) &= 3\kappa \epsilon_\infty + 2\mu B r^{-3}. \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 상첨자(Superscript) E 는 기재의 탄성 영역에 대한 양을 나타내기 위한 것이며, B 는 경계 조건에 의해 결정 되는 상수이다.

경계조건을 생각하면, 탄성 영역과 소성 영역의 경계면에서 변위와 Surface Traction 이 연속이어야 하고, 소성 변형이 없어야 하므로

$$\begin{aligned} u^E(r_p) &= (r_p), \\ \sigma_r^E(r_p) &= \sigma_r(r_p), \\ \epsilon_r^E(r_p) &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

등이 성립한다. 따라서 B, M, N 은 r_p 의 함수로서 다음과 같이 결정된다¹⁷⁾

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{6\mu} \sigma_0 r_p^3, \\ N &= \frac{1}{6} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{h}{1-m} D r_p^3, \\ M &= \epsilon_\infty - D \left(\ln r_p + \frac{1}{3} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

석출물과 기재의 경계면에서도 변위 및 Surface Traction이 연속 이어야하므로,

$$\begin{aligned} u(a) &= u^I(a), \\ \sigma_r(a) &= \sigma_r^I(a) \end{aligned} \quad (29)$$

을 만족해야 한다. 따라서 δ 는

$$\delta = \frac{1}{3} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_0}{\kappa^I - \kappa} \left(\frac{r_p}{a} \right)^3 \quad (30)$$

임을 알 수 있고¹⁷⁾, r_p 는 다음 식에서 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{3h\kappa^I + 4mE}{9(1-m)(\kappa - \kappa^I)} \left(\frac{r_p}{a} \right)^3 + 2 \ln \left(\frac{r_p}{a} \right) \\ + \frac{2}{3} - \epsilon_\infty \frac{3h\kappa + 4mE}{3\sigma_0(1-m)} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

소성 변형이 생기려면 외부에서 가해진 정수압이 어떠한 값 σ_{cr} 보다 커야한다. (31)식에서 $r_p = a$ 임을 생각하면

$$\sigma_{cr} = \frac{\kappa}{6\mu} \frac{3\kappa^I + 4\mu}{\kappa - \kappa^I} \sigma_0 \quad (32)$$

임을 알 수 있다.

(6), (25), (26) 식으로 얻어진 탄소성해는 앞에서 말한바 처럼 $\sigma_\infty < 0$ 이고 $\kappa^I - \kappa > 0$ 일 경우의 해이다. $\sigma_\infty > 0$ 이거나 $\kappa^I - \kappa < 0$ 이면, 앞서 말한 바 처럼 (16) 식등의 부호가 달라진다. 즉, $\sigma_r - \sigma_\theta > 0$ 이 될 수도 있으며 이 경우에는 본 논문에서의 순서를 따라 같은 방법으로 계산할 수 있다.

4. 변형 에너지

서론에서 언급한 바 처럼 변형에너지를 정확히 아는 것은 고체 상태의 상변태(phase transformation) 등 재료학적 현상에 중요한 의미를 지닌다. 단위 부피의 고체에 포함되는 변형 에너지 밀도 ω 는

$$\omega = \int_0^{\epsilon} \epsilon_{ij} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (33)$$

로 표현된다. 따라서 탄성 영역에서의 변형 에너지 밀도 ω_{el} 은

$$\omega_{el} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (34)$$

이고, 소성영역에서의 변형 에너지 밀도 ω_{pl} 은 회복 가능한(Recoverable) 탄성 에너지 ω^e 와 회복 불가능한(Irrecoverable) 소성 에너지 ω^p 의 합으로서 다음과 같이 나타내 진다.

$$\omega_{pl} = \omega^e + \omega^p = \int_0^{\epsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^e + \int_0^{\epsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p, \quad (35)$$

여기서 ϵ_{ij}^e 는 전체변형도 중에서 탄성 성분을 의미하고 ϵ_{ij}^p 는 소성변형도이다. 즉, $\epsilon_{ij}^e = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p$ 이고 σ_{ij} 는 ϵ_{ij}^e 에 비례하므로

$$\omega_{pl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p) + \int_0^{\epsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (36)$$

가 된다. 여기서 Γ 를

$$\Gamma \equiv \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^p - \int_0^{\epsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (37)$$

로써 정의한다면 ω_{pl} 은

$$\omega_{pl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \Gamma \quad (38)$$

와 같이 간단하게 표현된다.

만일 기재에 석출물이 없어서 균일 하다면, 외부에서 가한 응력 σ_{ij}^A 에 의한 에너지 ω^A 는 균일하게 분포할 것이다. ω^A 를 σ_{ij}^A 에 의한 자체에너지라 하고, 변형 에너지차 ΔE 를 석출물이 있을 때의 변형 에너지와 σ_{ij}^A 의 자체에너지와의 차를 석출물의 부피로 나눈 값으로 정의 하면 ΔE 는 다음과 같이 쓰여진다.

$$\Delta E = \frac{1}{V_0} \int_{V_I} (\omega - \omega^A) dV. \quad (39)$$

여기서 V_0 는 석출물의 부피이고, V_I 는 석출물과 기재 전체의 부피이다. 소성 변형이 없을 때의 순수한 탄성론에 입각한 변형 에너지 차 ΔE_{el} 은 다음과 같다.

$$\Delta E_{el} = \frac{1}{V_0} \int_{V_I} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^A) dV. \quad (40)$$

여기서 ϵ_{ij}^A 는 σ_{ij}^A 에 대응하는 변형도를 나타낸다. 본 논문에서 처럼 V_I 가 무한히 크면 즉, $V_I \rightarrow \infty$ 이면, 이 정의는 만족스럽지 못한 점이 있다. 이에 관해서는 부록에서 논하기로 한다. Eshelby^{4), 6)} 는 구형석출물에 대한 ΔE_{el} 값을 구한 바 있다. 이결과를 정수압 $\sigma_{ij}^A = \sigma_\infty \delta_{ij}$ 이 가해지는 경우에 대하여 적용하면 다음과 같다.

$$\Delta E_{el} = \frac{9}{2} \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\kappa(\kappa^I - \kappa)}{3\kappa^I + 4\mu} \epsilon_\infty^2. \quad (41)$$

소성 변형이 있을 때의 변형 에너지차를 ΔE_{pl} 이라 하면, (39)식에 (38)식을 대입하여

$$\Delta E_{pl.} \equiv \frac{1}{2V_0} \int_{V_t} (\sigma_{ij}\epsilon_{ij} - \sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^A) dV - \frac{1}{V_0} \int_{V_{pl}} \Gamma dV \quad (42)$$

임을 알수 있다. 여기서 $V_{pl.}$ 은 소성 영역의 체적이다. Eshelby³⁾에 의하거나, 혹은 부록에 보인 바 처럼, (42)식의 첫항은 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\int_{V_t} (\sigma_{ij}\epsilon_{ij} - \sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^A) dV = \int_{V_t} (\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij} - \sigma_{ij}\epsilon_{ij}^A) dV. \quad (43)$$

또한, 기재의 탄성 영역에서는 $\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij} = \sigma_{ij}\epsilon_{ij}^A$ 이므로, $\Delta E_{pl.}$ 은 다음과 같이 된다.

$$\Delta E_{pl.} = \frac{1}{2V_0} \int_{V_0+V_{pl}} (\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij} - \sigma_{ij}\epsilon_{ij}^A) dV - \frac{1}{V_0} \int_{V_{pl}} \Gamma dV. \quad (44)$$

체적적분을 Gauss의 Divergence 정리 및 평형 방정식 ($\sigma_{ij,j}^A = 0$ 및 $\sigma_{ij,j} = 0$)을 이용하여 면적 적분으로 바꾸면

$$\Delta E_{pl.} = \frac{1}{2V_0} \int_{S_{pl}} (\sigma_{ij}^A u_i - \sigma_{ij} u_i^A) n_j dS - \frac{1}{V_0} \int_{V_{pl}} \Gamma dV \quad (45)$$

이다. 여기서 u_i^A 는 ϵ_{ij}^A 에 대응하는 변위 벡터 성분이고, $S_{pl.}$ 은 소성 영역의 바깥면을 의미하며, n_j 는 이면에 수직한 바깥방향의 단위 벡터 성분이다. (37)식에서의 Γ 를 (17)식과 (21)식을 이용하여 계산하면 Γ 는 다음과 같다.

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_r^2. \quad (46)$$

또한, $\sigma_{ij}^A = \sigma_\infty \delta_{ij}$, $u^A = \epsilon_\infty r$ 이므로, $\Delta E_{pl.}$ 은

$$\Delta E_{pl.} = \frac{3}{2} \left(\frac{r_p}{a} \right)^3 \epsilon_\infty \left\{ 3\kappa \frac{1}{r_p} u(r_p) - \sigma_r(r_p) \right\} - \frac{\sigma_0}{r^3} \int_a^{r_p} r^2 \epsilon_r^2(r) dr \quad (47)$$

가 된다. (47)식에 (25), (26)식을 대입하고 (28)식을 이용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\Delta E_{pl.} = \frac{1}{2} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \sigma_0 \left[3\epsilon_\infty \left(\frac{r_p}{a} \right)^3 + \frac{2(1-m)}{3\kappa+mE} \sigma_0 \left\{ 1 + \left(\frac{r_p}{a} \right)^3 \left(3\ln \frac{r_p}{a} - 1 \right) \right\} \right] \quad (48)$$

5. 결과 및 논의

몇가지 중요한 결과들을 전형적인 경우에 대한 수치 결과를 써서 그림으로 나타내었다. 사용된 parameter 들을, 기재의 Poisson 비 $\nu = \frac{1}{3}$, 항복응력 $\sigma_0 = 10^{-3} \mu$

로 했으며, 석출물과 기재의 체적 탄성 계수의 비 $\kappa^t/\kappa = 5$, 기재의 선형 변형 경화성을 나타내는 상수 $m = 1/4$ 등으로 하였다.

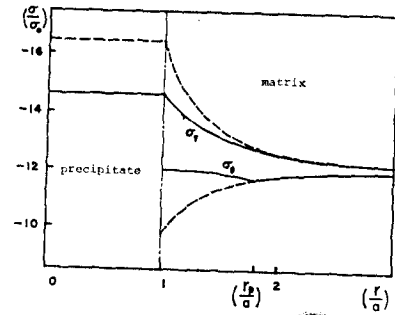


Fig. 4 Stress distribution (—; elasto-plastic solution,; elastic solution). Here, $\kappa^t/\kappa = 5$, $\nu = \frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{4}$, $\sigma_0/\mu = 10^{-3}$ and $\sigma_\infty/\sigma_0 = -12.0$.

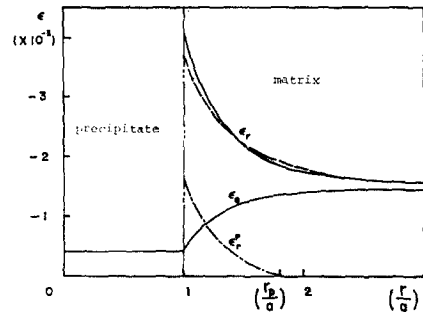


Fig. 5 Strain distribution (—; elasto-plastic solution,; elastic solution). here, $\kappa^t/\kappa = 5$, $\nu = \frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{4}$, $\sigma_0/\mu = 10^{-3}$ and $\sigma_\infty/\sigma_0 = -12.0$.

Fig. 4와 Fig. 5는 각각 응력 및 변형도의 분포이다. 외부에서 가한 정수압($\sigma_{ij} = \sigma_\infty \delta_{ij}$)은 $\sigma_\infty = -12\sigma_0$ 으로 하였으며, 나머지 parameter들은 위에서와 같다. 이 경우, 소성 영역의 바깥 반경은 $r_p = 1.8a$ 이다. 그림에서 점선은 탄성해((11), (12)식)를 나타내며, 실선은 탄소성해((25), (26)식)를 나타낸다. Fig. 4를 보면, 기재의 탄성 영역에서의 응력은 탄성해와 탄소성해가 별 차이가 없으나, 소성 영역에서는 뚜렷한 차이를 보이고 있어 소성 이완이 되었음을 나타낸다. 응력의 소성이 완이 이처럼 큰 반면에 Fig. 5에서 보듯 변형도는 거의 차이를 보이지 않는다. Fig. 5에서 ϵ_θ 에 대한 탄성해(점선)가 없는 것은 탄소성해(실선)와 거의 같아서 겹쳐져 있기 때문이다.

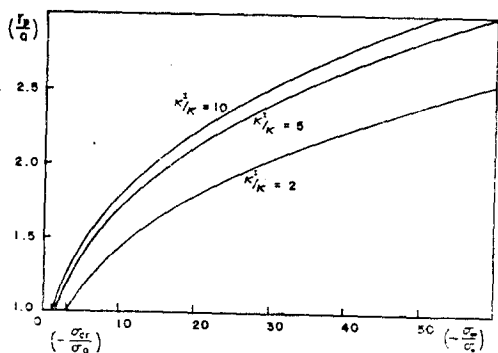


Fig. 6 Plastic zone size as a function of applied stress at infinity for different values of κ^1/κ . Here, $\nu=1/3$, $m=1/4$ and $\sigma_0/\mu=10^{-3}$.

Fig.6은 주어진 정수압의 크기에 따른 소성영역의 크기를 나타낸다. $\kappa^1/\kappa=2$, $\kappa^1/\kappa=5$, $\kappa^1/\kappa=10$ 인 세 경우에 대하여 σ_∞/σ_0 에 대한 r_p/a 를 그렸다. 나머지 parameter들은 앞서와 같다. (32)식에서 보듯 처럼 σ_{cr} 이 κ^1/κ 의 함수 이므로 κ^1/κ 에 따라서 각각 $\sigma_{cr}/\sigma_0 = -10/3$, $\sigma_{cr}/\sigma_0 = -11/6$, $\sigma_{cr}/\sigma_0 = -14/9$ 이다. 따라서 소성영역이 생기기 시작하는 점이 각각 다름을 보인다. Fig.7도 주어진 정수압에 따른 소성 영역의 크기를 나타 내나, m 이 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0 등으로 각각 다를 때

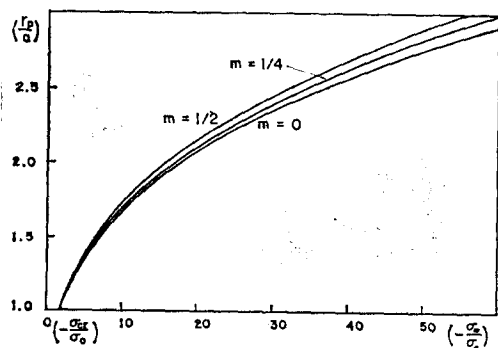


Fig. 7 Plastic zone size as a function of applied stress at infinity for different values of m . Here, $\nu=1/3$, $\kappa^1/\kappa=5$ and $\sigma_0/\mu=10^{-3}$.

다. $\kappa^1/\kappa=5$ 이고, 나머지 수치들은 앞서의 경우와 같다. σ_{cr} 이 m 과는 무관 하므로, 소성 영역이 생기기 시작하는 점은 같고, σ_∞ 가 커짐에 따라 r_p 가 각각다르게 되나, m 이 r_p 에 미치는 영향은 κ^1/κ 가 미치는 영향에

비하여 작음을 알 수 있다.

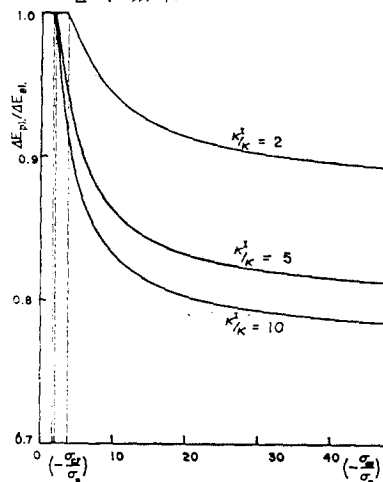


Fig. 8 $\Delta E_{pl}/\Delta E_{el}$. (Ratio of energy difference for the case of elastoplastic solution to that of purely elastic solution) as a function of applied stress at infinity for Different values of κ^1/κ . Here, $\nu=1/3$, $m=1/4$ and $\sigma_0/\mu=10^{-3}$.

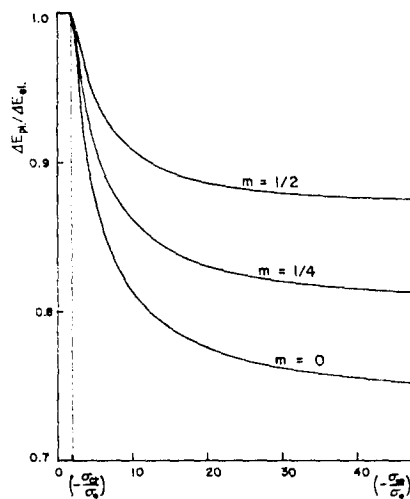


Fig. 9 $\Delta E_{pl}/\Delta E_{el}$ (Ratio of energy difference for the case of elastoplastic solution to that of purely elastic solution) as a function of applied stress at infinity for difference values of m . Here, $\nu=1/3$, $\kappa^1/\kappa=5$ and $\sigma_0/\mu=10^{-3}$.

Fig. 8과 Fig. 9는 탄성해에 의한 변형 에너지차 ΔE_{el} 에 대한 탄소성 해에 의한 변형 에너지 차 ΔE_{pl} 의 비이다. Fig. 8에서는 Fig. 6에서와 같이 κ^1/κ 가 각각 다

른 세 경우에 대해서 그랬다. parameter 들은 Fig. 6에서와 같다. $|\sigma_{\infty}| > |\sigma_{cr}|$ 일때부터 $\Delta E_{pl.}$ 이 존재하기 시작하고, $\sigma_{\infty} = \sigma_{cr}$ 일때 $\Delta E_{el.} = \Delta E_{pl.}$ 이므로, $\sigma_{\infty} = \sigma_{cr}$ 일때 $\Delta E_{pl.}/\Delta E_{el.}$ 은 1 이고, 정수압이 커짐에 따라 소성이완의 효과가 커져가는 것을 볼 수 있다. Fig. 9는 Fig. 8과 같으나, m 이 서로 다른 세 경우에 대한 것이다. 여기서의 σ_{cr} 은 m 에 관계 없이 $\sigma_{cr}/\sigma_0 = -11/6$ 이다.

6. 결 론

구형 석출물 하나가 있는 무한히 큰 고체에 정수압이 작용될 때에 대한 탄소소성해를 기체의 선형 변형 경화성을 가정하여 구했으며 다음 사항을 알 수 있었다.

- (1) 응력은 소성 영역에서 상당히 크게 이완되나, 변형도의 경우는 소성 변형에도 불구하고 큰 차이가 없다.
- (2) 소성영역의 크기는 m 보다도 κ'/κ 에 의해 더 큰 영향을 받는다.
- (3) 변형에너지 차는 예상한대로 순수한 탄성해의 경우보다 탄소소성해의 경우가 크게 적어진다.

부 록

순수한 탄성의 경우, 석출물 단위 부피당의 변형 에너지 차 $\Delta E_{el.}$ 은 본문 (40)식에서 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta E_{el.} = \frac{1}{2V_0} \int_{V_t} (\sigma_{ij}\epsilon_{ij} - \sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^A) dV. \quad (A1)$$

석출물과 기체 전체의 체적 V_t 가 유한할 때에는 아무런 문제가 없다. 그러나, V_t 가 무한히 크면, 즉, $V_t \rightarrow \infty$ 이면 이 정의는 무한히 큰 양에서 무한히 큰 양을 뺀 값을 다루게 되므로 적분치의 존재유무가 문제시된다. 즉, 본문 (11), (12)식을 (A1)식에 대입하면, $V_t \rightarrow \infty$ 일때 적분이 부정(Indefinite)임을 알 수 있다. 즉, (A1)식은 적어도 구형석출물을 갖는 무한 고체에 대해서는 정의로서 부적당하므로, $\Delta E_{el.}$ 을 (A1)식을 사용하여 계산하는 것은 적절하지 못하다. Eshelby³⁾는 다음과 같은 양을 생각 하였다.

$$\Delta E_s = \frac{1}{2V_0} \int_{V_t} (\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij} - \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^A) dV. \quad (A2)$$

기체가 탄성 변형만을 한다고 할때 일반화된 Hooke의 법칙에 의하면 $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$ (석출물이 있는 경우), $\sigma_{ij}^A = C_{ijkl}^A \epsilon_{kl}^A$ (석출물이 없는 경우) 이므로 $C_{ijkl} = C_{klij}$

임을 이용하면 다음을 알 수 있다.

$$\Delta E_s = \frac{1}{2V_0} \int_{V_t} (C_{ijkl}^A - C_{ijkl}) \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}^A dV.$$

기체에 대해서는 $C_{ijkl}^A = C_{ijkl}$ 이므로

$$\Delta E_s = \frac{1}{2V_0} \int_{V_0} (C_{ijkl}^A - C_{ijkl}) \epsilon_{ij}^A \epsilon_{kl}^A dV. \quad (A4)$$

가 되어서 ΔE_s 는 유한한 확정치를 갖는다. (A1)식과 (A2)식의 차를 생각하면,

$$\Delta E_{el.} - \Delta E_s = \frac{1}{2V_0} \int_{V_t} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^A) (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}^A) dV \quad (A5)$$

이며, 체적분을 면적분으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\Delta E_{el.} - \Delta E_s = \frac{1}{2V_0} \int_{S_t} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^A) (u_i + u_i^A) n_j^A dS. \quad (A6)$$

여기서 S_t 는 V_t 를 싸고 있는 표면을 의미하고 n_j^A 는 이면에 수직인 바깥 방향의 단위 벡터 성분이다.

Eshelby³⁾는 유한한 기체를 생각하여 이 기체가 $\sigma_{ij} n_j^A = \sigma_{ij}^A n_j^A$ 를 만족하면서, 즉, Surface Traction을 유지하면서 무한히 커지는 경우를 생각하였다. 따라서 (A6)식에서 $\Delta E_{el.} = \Delta E_s$ 가 된다. 본 논문에서와 같이 기체의 일부 ($a < r < b$)가 소성영역에 있을 때에는 (A2)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta E_s = \frac{1}{2V_0} \left[\int_{V_0 + V_p} (\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij} - \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^A) dV + \int_{V_e} (\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij} - \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^A) dV \right] \quad (A7)$$

여기서 V_e 는 기체의 탄성 영역을 나타낸다. 기체의 탄성 영역에서는 $\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij} \sigma_{ij}^A$ 이므로, (A7)식의 두번째항은 영(zero) 이되며, ΔE_s 는 유한한 확정치를 갖음을 알 수 있다. 또한 본 논문의 경우에서도 V_t 및 S_t 가 소성 영역을 포함하는 그보다 큰 영역 및 그에 해당하는 표면 이라면 (A5)식 및 (A6) 식이 성립한다.

후 기

본 연구의 부록에 결정적 조연을 해주신 김문언 박사에게 감사하는 바입니다.

참 고 문 헌

1. J.K. Lee, D.M. Barnett and H.I. Aaronson, The Elastic Strain Energy of Coherent Ellipsoidal Precipitates in Anisotropic Crystalline Solids, Met.Trans. Vol. 8A, pp.963-970, 1977.

2. K.C. Russell, D.M. Barnett, C.J. Altstetter, H.I. Aaronson and J.K. Lee, Strain Energy Interactions, The T_0 Concept and Sympathetic Nucleation, Scripta Met. Vol. 11, pp. 485-490, 1977.
3. J.D. Eshelby, The Continuum Theory of Lattice Defects, Sol. State Phy. Vol. 3, pp. 79-144, 1956.
4. J.D. Eshelby, The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems, Proc. of Royal Soc. London, Vol. A241, pp. 376-396, 1957.
5. J.D. Eshelby, Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion, Proc. of Royal Soc. London, Vol. A252, pp. 561-569, 1959.
6. J.D. Eshelby, Elastic Inclusions and Inhomogeneities, Prog. in Sol. Mech. Vol.2, Chap. 3, pp. 89-142, 1962.
7. D.M. Barnett, The Precise Evaluation of Derivatives of the Anisotropic Elastic Green's Functions, Phys. Stat. Sol. (b), Vol. 49, pp. 741-748, 1972.
8. J.K. Lee and W.C. Johnson, Calculation of the Elastic Strain Field of a Cuboidal Precipitate in an Anisotropic Matrix, Phys. Stat. Sol. (a), Vol.46, pp. 267-271, 1978.
9. F.C. Chen and K. Young, Inclusions of Arbitrary Shape in an Elastic Medium, J. of Math. Phys. Vol. 18, pp. 1412-1416, 1977.
10. W.C. Johnson, Y.Y. Earmme and J.K. Lee, Approximation of the Strain Field Associated with an Inhomogeneous Precipitate-I. Theory, J. of Appl. Mech. Trans., A.S.M.E., Vol. 47, pp. 775-780, 1980.
11. W.C. Johnson, Y.Y. Earmme and J.K. Lee, Approximation of the Strain Field Associated with an Inhomogeneous Precipitate-II. The Cuboidal Inhomogeneity, J. of Appl. Mech., Trans. A.S.M.E., Vol. 47, pp. 781-788, 1980.
12. K.R. Kinsman, J.W. Sprys and R.J. Asaro, Structure of Martensite in Very Small Iron-rich Precipitates, Acta Met. Vol. 23, pp. 1431-1442, 1975.
13. M.E. Gulden and W.D. Nix, Observation of Dislocation Sources in an Aluminium-Copper-Silicon Alloy, Phil. Mag. Vol. 18, pp. 217-228, 1967.
14. J.K. Lee, Y.Y. Earmme, H. I Aaronson and K.C. Russell, Plastic Relaxation of the Transformation Strain Energy of a Misfitting Spherical Precipitate: Ideal Plastic Behavior, Met. Trans. Vol. 11A, pp. 1837-1847, 1980.
15. W.C. Johnson, The Elasto-Plastic Behavior of Inclusions, Ph.D. Thesis, Michigan Tech. Univ, Houghton, Michigan, U.S.A., 1980.
16. A. Mendelson, Plasticity: Theory and Application, McMillan, 1968.
17. 최병익, 구형석출물을 갖는 무한 고체에 정수압이 가해지는 경우에 대한 탄성-소성해, 석사학위논문, 한국과학기술원, 서울, 1980.