Penalty 有限要素法에 對하여

宋 永 俊
<陸軍士官學校・工博>

1. 序 論

本稿의 目的은 제한조건이 있는 최소화(constrained minimization) 問題를 解析하는데 있어서 効果的인 方法으로 받아 들여 지고있는 Penalty method에 對한 간단한 概念과 이러한 類의 問題를 解析하는데 이미 使用되어 온 Lagrange multiplier method와의 連關性, 그리고 이의 有限要素法에의 適用時 考慮事項 等에 對하여 간략하게 紹介하는 데 있다.

종종 自然現象이나 社會科學分野의 諸現象까지도. 그 現象으로 부터 추출되는 要因을 變數로 하는 計量化된 어떤 汎函數(functional)가 最小값을 갖게 하는 최소화(minimization) 問題로 特性지워 질 수 있다는 것은 우리들에게 이미 익숙한 理論이다. 즉 求하는 解 u는 어떤 汎函數, F의 값을 最小로 하는 函數가 되고 있다.

$$u \in V;\ F(u) \leq F(v)\ \forall\ v \in V \tag{1}$$

또는

$$F(u) = \inf_{v \in V} F(v) \tag{2}$$

로 表現 할 수가 있다.

說明의 便宜를 爲해 彈性問題를 例로 든다면 汎函數 $F(\cdot)$는 total potential energy이며 이는 strain energy를 나타내는 bilinear form $\frac{1}{2}a(\cdot,\cdot)$와 potential energy로 linear form인 $f(\cdot)$로 構成되어 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v) \tag{3}$$

勿論 (1)을 만족시키는 解 u의 存在性(existence)과 唯一性(uniqueness)等을 爲해서 汎函數 F가 갖추어야 할 條件 [1),2)] 들이 檢討되어야 하겠지만 本稿의 討論범위를 벗어 나므로 省略하고 여기서는 이 모든 條件들이 갖추어 졌다고 假定하면 minimizer u는 다음과 같은 變分不等式(variational inequalities)으로 特性지워 진다.

$$u \in V;\ a(u, v-u) \geq f(v-u)\ \forall\ v \in V \tag{4}$$

이 경우 式(1)은 最小에너지 定理(minimum energy principle)이며 式 (4)는 假想일의 原理가 되고 있다. 여기서 공간 V는 有限한 크기의 假想일의 값을 갖게 하는 函數空間(function space)이다. 공간 V에 拘束條件이 없을 경우 式 (4)를 全 공간에 결쳐 適用할 수 있으므로 $v = u \pm w$, $w \in V$, 를 式 (4)에 代入하면 特性方程式은 다음과 같은 變分等式(variational equality)으로 나타난다.

$$u \in V;\ a(u,v) = f(v)\ \forall\ v \in V \tag{5}$$

그러나 解 u가 어떤 주어진 拘束條件을 만족시켜야 하는 경우 式(4)의 不等式은 條件을 만족시 는 要素의 集合인 부분집합 $K \subset V$에 걸쳐 要求되며 minimizer u의 特性方程式은 여전히 變分不等式의 形式으로 남게 된다.

$$u \in K;\ F(u) \leq F(v)\ \forall\ v \in K \subset V \tag{6}$$

$$u \in K;\ a(u,v-u) \geq f(v-u)\ \forall\ v \in K \subset V \quad (7)$$

問題 (6)은 제한조건이 있는 最小化 問題라 부르며 部分集合 K는 추상적으로 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$K=\{v \in V;\ b(q,v)=(\varphi,q),\ \ q \in M\} \quad (8)$$

여기서 symbol $(\cdot,\cdot)$는 L^2-inner product 이며 φ는 constraint function, $b(\cdot,\cdot)$는 拘束內容을 나타내는 oprator B, $Bv=\varphi$, 에 依하여 정의되는 bilinear form이다. 즉,

$$(u,v)=\int uvd\Omega \quad (9)$$

$$b(q,v)=(Bv,q) \quad (10)$$

$$L^2(\Omega)=\{v:(v,v)<\infty\}. \quad (11)$$

Ω는 문제가 정의된 영역(domain)이며 問題를 간단하게 하기 위하여 $M=L^2(\Omega)$로 취한다.

式 (7)에 나타나고 있는 不等式은 實際로 問題를 解析하는데 있어서 결코 바람직 하지 못한 形態이며 有限要素法의 適用을 爲한 discretization을 行할 경우 admissible set K_h를 구축한다는 것도 事實上 不可能한 課題가 되고 있다.

2. Saddle Point 問題

Constrained minimization 問題를 解析하는데 있어서 前述한 바와 같은 어려움을 타개하기 爲한 手段으로 지금까지 자주 쓰여온 方法이 Lagrange multiplier를 使用한 saddle point 問題이며 이의 特性方程式이 바로 mixed formulation 이다.

說明의 便宜를 爲해 $\varphi=0$의 경우를 택하였을 때 Lagrangian functional $L(v,q)$은 (12)와 같이 構成할 수 있다.

$$L(v,q)=F(v)+b(q,v) \quad (12)$$

要素 $(u,p) \in V_xM$은 다음과 같은 條件을 만족시킬때 saddle point라 불리운다.

$$\forall (v,q) \in V_xM,$$

$$L(u,q) \leq L(u,p) \leq L(v,p) \quad (13)$$

우선 saddle point (u,p)가 存在한다고 假定했을 경우 이의 特性方程式은 다음과 같다.

$$\begin{cases} a(u,v)+b(p,v)=f(v) & \forall\ v \in V \quad (14\text{-a}) \\ \qquad b(q,u)=0 & \forall\ q \in M \quad (14\text{-}b) \end{cases}$$

問題 (12) 또는 (13)의 解인 saddle point (u,p) $\in VxM$의 存在性과 唯一性은 Lagrange multiplier p의 登場으로 말미암아 問題 (1)에서 要求되는 條件 以外에도 다음과 같은 條件을 만족시키는 陽의 常數 α의 存在性이 要求되고 있다[3),4),5)].

$$\alpha ||q||_M \leq \sup_{v \in V} \frac{b(q,v)}{||v||_V}\ \ \forall\ \ q \in M \quad (15)$$

또한 條件(15)가 만족 될 경우, (u,p)가 問題 (14)의 解라면 u는 問題 (7)의 解가 된다는 것도 證明할 수 있게 된다.[6)] 條件(15)는 Russia의 女流數學者 Ladyszhenskaya와 이태리의 Brezzi 그리고 미국의 Babuska의 이름을 따서 LBB condition이라 부르며 常數 α는 stability parameter 또는 Lagrange multiplier qualification coef. 라고도 불리운다. 여기서 $||\cdot||_M$과 $||\cdot||_V$는 각각 공간 M과 V에서의 Norm이다.

여기서 注意깊게 보아야 할 點은 問題(7)은 부분집합 $K \subset V$에서 정의되어 있는데 反해 問題 (14)는 全 공간 V에 걸쳐 정의되고 있다는 點이다. 또한 問題(7)은 不等式의 形態로 나타나 있는데 反해서 (14)는 等式으로 주어진 利點들이 있다. 問題(14)를 mixed variational problem이라 부르며 이는 곧 mixed finite elemen method를 適用하는 基本的인 서술형식이 되고 있다. 이로부터 얻어지는 매트릭스 方程式의 形態는

$$\begin{cases} K_a\underset{\sim}{u}+K_b\underset{\sim}{p}=\underset{\sim}{f} \\ \qquad K_b{}^T\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{0} \end{cases} \quad (16)$$

또는

$$\begin{bmatrix} K_a & K_b \\ K_b{}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{u} \\ \underset{\sim}{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{f} \\ \underset{\sim}{0} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

이 된다. 剛性매트릭스 K_a는 對稱性을 갖고 있으나 K_b는 非對稱 매트릭스이다. 이 방법에서 결점이라고 한다면 Lagrange multiplier, p가 새로운 未知數로 나타나 있으나 이들은 대개 물리적 의미를 갖고 있으므로 未知數의 增加라는 面이 短點만으로 간주될 수는 없겠다. 또 한편으로 全體剛性 매트릭스(式(17)에서)는 對稱性을 갖고 있기는 하나 대각선에 零이 나타나고 있으므로 해서 zero diagonal term을 許容하는 solution process를 使用하지 않는 한 解를 求하는데 어려움을 가지고 있다. 近似解의 收斂條件으로(15)의 discretized version인 (18)이 만족되어야 한다. 즉 모든 h에 대해서 다음과 같은 常數 α_0, $\alpha_0>0$, 가 存在해야 한다.

$$\alpha_0 \|q^h\|_{M_h} \leq \sup_{v^h \epsilon V_h} \frac{b(q^h, v^h)}{\|v^h\|_{V_h}} \quad V_{q^h} \epsilon M_h \qquad (18)$$

여기서 u^h와 p^h는 각각 1次變數와 2次變數의 finite element approximation이며 h는 mesh parameter이다. 條件(18)은 대개의 경우 p^h의 自由度가 u^h의 것보다 작게 擇하였을때 만족시킬수 있다.[7] 例를 들어 u^h를 위해서 quadratic element를 擇했을때 p^h를 위해서는 linear element를 擇하여야 한다.

3. Penalty Formulation

Lagrange multiplier를 導入하므로써 問題를 부분집합 K를 벗어나 全 공간 V에서 정의하고 不等式을 等式의 形態로 바꿀수 있는 利點은 있으나 이의 代價로 未知數의 增加와 zero diagonal term의 登場 等 바람직 하지 못한 面도 나타나게 되었다. Penalty method는 近似解法이지만 위와 같은 問題點을 解決해 주고 있다.

Constrained minimization 問題 (6) 대신 다음과 같은 Unconstrained minimization 問題를 利用한 近似解法을 생각해 보자.

$$u_\varepsilon \epsilon V;\ F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(v) \quad V\ v \epsilon V \qquad (19)$$

또는

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v \in V} F_\varepsilon(v) \qquad (20)$$

여기서

$$F_\varepsilon(v) = F(v) + \frac{1}{2\varepsilon} P(v) \qquad (21)$$

이며 ε은 작은 陽數로 penalty parameter라 부른다. 새로운 汎函數 $P(v)$는 penalty functional 로

$$P(v) > 0 \qquad (22)$$

이며, $v \epsilon K$ 일 때에만

$$P(v) = 0 \qquad (23)$$

이다.

問題 (19)에 解가 存在한다면

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = F(u) \qquad (24)$$

임을 보일 수가 있다. 이 過程을 간략하게 살펴보면, $K \subset V$이므로

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v \epsilon V} F_\varepsilon(v) \leq \inf_{v \epsilon K} F_\varepsilon(v) = \inf_{v \epsilon K} F(u) = F(u),$$

따라서

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F(u) = C_1 \qquad (25)$$

로 常數 C_1으로 上限지워 진다. 한편 (19)의 解가 存在하기 위한 條件의 하나인 ellipticity ($c_2\|v\|_2^V \leq F_\varepsilon(v)$, $c_2>0$)에 依하여 모든 $\varepsilon>0$에 對하여

$$\|u_\varepsilon\|_2^V \leq c_3 \qquad (26)$$

이며 이는 u_ε이 $\varepsilon \to 0$에 따라 어떤 極限値 $\bar{u}$에 收斂(in weak sense)함을 보장한다. 따라서

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = F_\varepsilon(\bar{u}) \leq F(u) \qquad (27)$$

그러므로

$$F(\bar{u}) \leq F(u) \qquad (28)$$

또한 式(27)을 다시 쓰면

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} P(u_\varepsilon) + F(\bar{u}) \leq F(u) \qquad (29)$$

$$P(\bar{u}) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon(F(u) - F(\bar{u})) = 0 \qquad (30)$$

이다. 그러므로 條件(23)에 依하여 $\bar{u} \in K$이다. 이 事實은 곧 (6)에 의하여

$$F(u) \leq F(\bar{u}) \qquad (31)$$

임을 뜻하므로 (28)과 (31)로 부터

$$F(u) = F(\bar{u}) \qquad (32)$$

이다. 그러므로 解의 唯一性이 보장되면 $u = \bar{u}$이다.

대개의 경우 penalty functional $P(v)$는 quadratic form 으로 構成한다.

즉

$$P(v) = \int (Bv)^2 d\Omega \qquad (33)$$

이면 條件 (22)와 (23)을 만족시키게 된다.

全 공간에 걸쳐 정의된 問題 (19)의 解인 u_ε의 特性方程式은

$$u_\varepsilon \epsilon V;\ a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon}(Bu_\varepsilon, Bv) = f(v) \qquad (34)$$

위 等式으로 나타나게 된다. 여기서 얻은 解 u_ε을 使用하여 Lagrange multiplier의 近似値

$\lambda_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}Bu_\varepsilon$ 을 求할수 있으며

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_\varepsilon=\lambda \tag{35}$$

의 關係도 證明되고 있다.[7),8),9)]

式(34)의 有限要素法에의 適用은 다음과 같은 方程式體系를 갖는다.

$$K_a\underset{\sim}{u}+\frac{1}{\varepsilon}K_p\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{f} \tag{36}$$

式 (16)에서의 剛性매트릭스 K_b는 非對稱性을 띠고 있는데 反해 K_b는 penalty functional $P(v)$이 quadratic form이므로 對稱매트릭스이다. 그러나 한편 ε을 작게 함에 따라

$$K_p\underset{\sim}{u}\doteqdot\varepsilon\underset{\sim}{f}\doteqdot 0 \tag{37}$$

라는 結果를 갖게 된다.

$$\underset{\sim}{v}^T K_p\underset{\sim}{u}=(Bu^h,\ Bv^h) \tag{38}$$

일 경우 K_p는 positive definite가 되어 trivial solution($u^h=0$) 만이 可能하게 되어 소위 'Locking' 현상을 보게 된다. 工學者들의 物理的 直視는 곧 바로 K_p에 singularity를 부여하는 길 만이 이러한 딜렘머를 벗어나는 方法으로 認知하였다.[10),11),12)] 例를 들어 polynomial interpolation function을 使用할 경우 K_p를 계산하는 過程에서 numerical integration scheme $I(\cdot,\cdot)$를 擇할때 integration point 數를 $(Bu^h,\ Bv^h)$ 항을 正確하게 계산하는 데 必要한 數보다 작게 擇하므로써 K_p가 singularity를 갖게 하고 또한 integration point에서 Lagrange multiplier의 값을 (40)과 같이 求했을 때 만족할 만한 結果를 얻게 되었다. 즉,

$$\underset{\sim}{v}^T K_p\underset{\sim}{u}=I(Bu^h,\ Bv^h) \tag{39}$$

$$p^h(x_i)=\frac{1}{\varepsilon}Bu^h(x_i) \tag{40}$$

x_i : integration points

이러한 方法을 Zienkiewicz는 'reduced integrl ation technique'라 부르고 있다.[13)] Mathematical analysis의 側面에서 보면 數値積分法 $I(\cdot,\cdot)$의 選擇 基準으로는 reduced integration 이긴 하지만 Lagrange multiplier의 nodal point 에서의 값이 式 (38)로 同一視되는 interpolation function을 使用한 mixed finite element method (14)에서 $b(q^h,\ Bv^h)=(q^h,\ Bv^h)$ 항을 正確하게 積分할 수 있어야 하며 이러한 경우에만 LBB-condition을 만족시킬수 있음을 볼 수 있다.[7),8),9)] 이를 다시한번 整理하면 數値積分法 $I(\cdot,\cdot)$는 반드시 $I(Bu^h,\ Bv^h)=(Bu^h,\ Bv^h)$일 必要는 없으나 p^h를 (40)을 통하여 構成하였을 경우 다음 條件을 만족시켜야 한다.

$$I(q^h,\ Bv^h)=(q^h,\ Bv^h)=b(q^h,\ v^h) \tag{41}$$

$$\alpha\|q^h\|_{M_h}\leq\sup_{v^h\in V_h}\frac{I(q^h,Bv^h)}{\|v^h\|_{V_h}}\ \forall q^h\in M_h \tag{42}$$

Penalty finite element method를 成功的으로 活用하기 爲해서는 constraint 內容과 penalty functional $P(v)$를 잘 檢討해서 條件 (40), (41), (42)를 만족시킬수 있는 數値積分法 $I(\cdot,\cdot)$를 擇하는 것이 要點이 되고 있다.

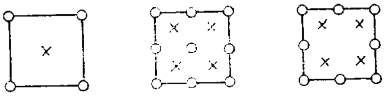
4. Penalty Method의 適用例

Penalty method가 처음 쓰여진 것은 오래전의 일이 된다. 1943년 Courant[14)]에 依하여 有限要素法 原始的인 數學的 基礎理論과 함께 rigid boundary condition으로 큰 값의 스프링 常數를 갖는 스프링帶로 假定해서 취급한 것이 penalty method의 嚆矢이다. 이러한 方法은 旣存 有限要素法의 適用에 이미 使用되어 왔으며 固定境界條件을 처리하는 過程이 바로 그 例가 되겠다.

非壓縮性物質의 擧動解析에 있어서 體積變形率, div v,이 零이라는 拘束條件을 안고 있어 penalty functional로

$$P(v)=\int(\text{div } v)^2 d\Omega$$

을 사용할 수 있다. 이의 數値積分法으로는 4-node 또는 9-node Lagrangian element 나 8-node Serendipity element를 使用했을 경우 그림 1과



o : Nodal points
× : Integration points

그림 1.

같이 1-point와 4-point Gaussian quadrature rule을 쓰고 있다. Lagrange multiplier는 hydrostatic pressure이다.

接觸問題에서는 變位制限이 拘束條件이 되며 그림 2와 같이 變位限界를 나타내는 函數$(v-s)^+$를 使用하여 $P(v)$를 構成한다.

$$P(v)=\int[(v-s)^+]^2 d\Gamma$$

여기서 쓰이는 數値積分法으로는 接觸境界에서 linear element가 쓰였을 경우 trapezoid rule을 使用하며 quadratic element를 썼을 경우 Simpson's rule을 適用하여 좋은 결과를 얻고 있다. Lagrange multiplier는 接解反力이다.

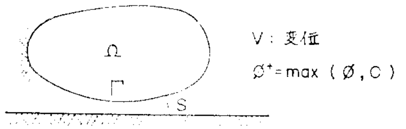


그림 2.

이 外에도 보 나 평판 問題에서 polynomial interpolation function의 order를 낮추는 方法으로도 penalty method가 쓰여지고 있다.[10,15] Beam 問題를 例로 들면 C^0 連續性(displacement continuity)와 C^1 連續性(slope continuity)를 爲해 Hermitian interpolation function을 使用하여야 하나 變位 w와 경사 θ를 獨立變數로 하여 모두 다 linear interpolation function으로 使用하는 대신 $\frac{dw}{dx}=\theta$라는 條件을 要水하여 penalty function을 다음과 같이 構成한다.

$$P(v)=\int\left(\frac{dw}{dx}-\theta\right)^2 dx$$

그림 3과 같이 nodal point가 아닌 integration point X에서 경사 연속성을 要求하므로서 만족한 結果를 얻을 수 있다. Lagrange multiplier는 transverse shear stress가 된다.

이와 같이 penalty finite element method는 拘束條件을 活用함에 따라 여러가지 形의 問題에 適用할 수 있으며 이의 成功與否는 constraint matrix K_p를 求하는 데에만 使用되는 積分法 $I(\cdot,\cdot)$를 擇하는 일이다. 이러한 問題를 解決한다는 前提가 있다면 penalty finite element method는 지금까지 難題로 여겨져 왔던 여러 問題를 經濟的으로 解析할 수 있는 强力한 手段으로 期待된다.

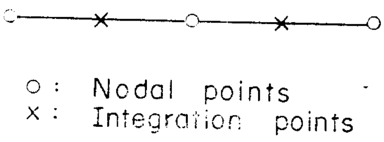


그림 3.

參考文獻

(1) Lions, J.L., *Quelques Méthods de Resolution des Problémes aux Limites Nonlineares*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

(2) Browder, F.E., "Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Space," American Mathematical Society, Providence R.I., 1976

(3) Babuska, I. and A.K. Aziz, "Survey Lecture on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method," *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, Academic Press, New York and London, 1972

(4) Babuska, I., J.T. Oden and J.K. Lee, "Mixed Hybrid Finite Element Approximations of Second-Order Elliptic Boundary-Value Problems," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 11, 1977.

(5) Brezzi, F., "On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers," R.A.I.R.O., Vol. 8, Aout 1974

(6) Brezzi, F., W.W. Hager and P.A. Raviart, "Error Estimates for the Finite Element Solution of Variational Inequalities, Part Ⅱ:Mixed Methods," Numerische Mathematique(to appear)

(7) Song, Y.J., "Reduced Integration and Exterior Penalty methods for Finite Element Approximations of Contact Problems in Incompressible Linear Elasticity," Ph.D. Dissertation. The

(참고문헌 (8)~(15)는 271페이지에 계속)

會　告

◇ 大韓機械學會賞 受賞 候補者 推薦 ◇

本 大韓機械學會賞은 "機械工學에 關한 學問과 技術의 進步發展에 顯著하게 寄與한 者를 表彰함을 目的"으로 1969年부터 施行되었읍니다. 同學會賞(學術賞, 技術賞) 受賞 候補者를 다음과 같이 公募하오니 많이 推薦하여 주시기 바랍니다.

1. **受賞資格**: 우리나라 國籍을 가진者 또는 이들의 共同體로서 다음의 各項에 該當되어 그 業績이 專門的審査에 의하여 該當部門에 卓越하여 우리나라 機械에 關한 學術 및 技術의 發展에 크게 寄與하였다고 認定되어야 한다.
   가. **學術賞**: 機械工學에 關聯된 分野에서 創意性을 發揮하여 研究를 繼續한 者로서 劃期的으로 卓越한 業績을 이룩한 者.
   나. **技術賞**: 機械工學에 關聯된 產業分野에서 獨創的인 意義를 가지는 製品을 製作한 者.
2. **具備書類**(接受된 書類는 一切返還하지 않음)
   가. 推薦理由書(所定樣式) 2通
   나. 被推薦者의 履歷書 2通
   다. 被推薦者의 寫眞(名啣版) 2枚
   라. 被推薦者의 審査에 必要하다고 認定되는 證憑資料
3. **推薦資格**: 가. 本學會 正會員 5名 以上이 共同으로 推薦할 때
   나. 大學의 學長, 大學院長 및 總長
   다. 學術團體·研究所 및 事業體·現業官公署의 長
   라. 技術係 學校의 長
4. **推薦磨勘**: 1981年 9月 30日(8月 31日을 1個月 延長)
5. **施賞**: 本 學會 1981年度 定期總會 (1981. 11. 21 開催 豫定)에서 行한다.
8. **參考事項**: 가. 대기학 제 81-176 호 (1981. 7. 11)로 이미 알려드린 바 있아오니 參照(所定樣式 添附)하시기 바랍니다.
   나. 問議事項이 있거나 所定樣式이 必要할 때에는 本 學會 事務局(電話: 879-0186, 0187)으로 連絡주시기 바랍니다.

◇ 大韓機械學會 白峯技術賞 受賞 候補者 推薦 ◇

本 學會는 우리나라 機械工業의 發展에 몸소 盡力하고 계시는 產業現場 機械技術者의 技術向上과 意慾을 鼓吹하기 爲하여 白峯技術賞을 制定한 바 있읍니다. 同 白峯技術賞은 "우리나라 產業分野에서 機械技術의 進步發展에 顯著하게 寄與한 者를 表彰함을 目的"으로 1979年부터 施行되었읍니다.

同 白峯技術賞(金, 銀, 銅賞) 受賞 候補者를 다음과 같이 公募하오니 많이 推薦하여 주시기 바랍니다.

1. **受賞資格**: 우리나라 國籍을 가진者 또는 이들의 共同體로서 專門的審査結果 우리나라 機械技術에 關聯된 產業分野에서 그 業績이 卓越하여 機械技術發展에 크게 寄與하였다고 認定되어야 한다.
2. **具備書類**(接受된 書類는 一切返還하지 않음)
   가. 推薦理由書(所定樣式) 2通
   나. 補推薦者의 履歷書 2通
   다. 被推薦者의 寫眞(名啣版) 2枚
   라. 被推薦者의 審査에 必要하다고 認定되는 證憑資料
3. **推薦資格**: 가. 學術團體 및 研究所의 長
   나. 事業體 및 現業官公署의 長
   다. 本學會 正會員 5人以上이 共同으로 推薦할 때
4. **施賞內容**: 金賞(1人) 賞牌 및 副賞(一金五拾萬원)
   銀賞(1人) 賞牌 및 副賞(一金參拾萬원)
   銅賞(1人) 賞牌 및 副賞(一金貳拾萬원)
5. **推薦磨勘**: 1981年 9月 30日(8月 31日을 1個月 延長)
6. **施賞**: 本 學會 1981年度 定期總會(1981. 11. 21 開催 豫定)에서 行한다.
7. **參考事項**: 가. 대기학 제 81-177 호 (1981. 7. 11)로 이미 알려드린 바 있아오니 參照(所定樣式 添附)하시기 바랍니다.
   나. 問議事項이 있거나 所定樣式이 必要할 때에는 本 學會 事務局(電話: 879-0186, 0187)으로 連絡주시기 바랍니다.

258페이지에 계속