

相變化蓄熱系의 非定常 解析

元 聖 強* · 盧 承 頤**

A Study on Two Dimensional Phase Change Problem

Sung Pil Won and Sung Tack Ro

ABSTRACT

The Enthalpy Model was verified in order to analyze two-dimensional phase change problems.

By using the Enthalpy Model, interface locations, frozen fraction rates, heat flux distribution on cooled surfaces, and surface-integrated heat flux were purely numerically calculated in rectangular thermal storage units, whose initial condition was saturated liquid and phase change material was cooled on its boundaries by convective heat transfer.

The calculations were performed for various Stefan numbers and Biot numbers. The effect on those dimensionless numbers were explained.

記 號

A	: 蓄熱單位의 表面積	T_{sat}	: 飽和溫度
a	: 蓄熱單位의 斷面積	T_w	: 蓄熱單位의 壁面 溫度
Bi	: Biot 數	T_∞	: 外部流體의 溫度
c	: 比 热	t	: 時 間
F	: 相變化率	V	: 檢查體積
Fo	: Fourier 數, $(k_s/\rho c_s L^2)t$	\bar{v}	: 液相의 局所速度
ΔFo	: 無次元化 時間增分	\bar{v}^*	: 相變化端의 局所速度
h	: 热傳達 係數	W	: 蓄熱單位의 y 軸方向의 길이
i	: 單位體積當 엔탈피	x, y	: 空間座標
k	: 热傳導率	$\Delta x, \Delta y$: 空間格子間隔
L	: 蓄熱單位의 x 軸方向 길이	$\Delta X, \Delta Y$: 無次元化 空間格子間隔
\bar{n}	: 表面의 垂直벡터	θ	: 無次元化된 엔탈피
\bar{n}^*	: 相變化端 表面의 垂直벡터	ϕ	: 無次元化된 溫度
q_w	: 热傳達量	ρ	: 密 度
q	: 無次元化 热傳達量	λ	: 潛 热
Q_w	: 總體熱傳達量	m	: 時間格子點
Q	: 無次元化 總體熱傳達量	*	: 飽和狀態
Ste	: Stefan 數, $c_s (T_{sat} - T_\infty) / \lambda$	i, j	: 空間格子點
s	: 周邊길이 (arc length along perimeter)	e	: 液 相
T	: 温 度	s	: 固 相

* 서울大學校 大學院, 現在 울산 工科大學

** 서울大學校, 正會員

1. 緒論

太陽과 같은 間歇的인 에너지源을 利用하는 蓄熱에 관한 研究가 최근에 활발히 進行되고 있다. 특히 相變化에 依한 潛熱을 利用하는 方法이 많이 研究되고 있다.

이와같은 相變化 热傳導 問題에 關한 研究가 많이 遂行되고 있지만 대부분이 一次元 問題에 限定되어 있으며, 二次元 問題에 關한 研究도 行해지고 있으나, 주로 相變化端의 位置를 叙述하는데 그치고 있다. 따라서 相變化時에 보다 重要한 變數인 热傳達量變化나 相變化率等의 考察은 除外되고 있다. 그리고 현재까지도 여려範圍의 實際問題에 適用할 수 있는 一般的의고 強力한 方法이 開發되지 못한 實情이다.

相變化 問題의 純粹한 數值解를 求하는 方法은 대체로 두가지로 생각할 수 있다. 첫번째 方法은 温度만을 變數로 잡는 方法이다 [1, 2, 3]. 固相과 液相에서 각각 方程式을 세우고 相變化端에서 에너지 保存式을 適用하는 方法으로서 현재까지 자주 利用되고 있다.

두번째 方法은 엔탈피와 温度를 變數로 잡는 方法이다 [4, 5, 6]. 이 方法을 使用하면 相變化端에서의 에너지 保存式은 基本方程式에 包含되므로 成立된 方程式은 相變化가 없는 非線形 热傳導 問題의 方程式과 類似하게 된다. Meyer [4] 와 Comini [5]는 相變化가 어떤 範圍의 温度에서 일어나는 問題에 對하여 이 方法을 적용했으며, Shamsundar [6]는 어떤 特定한 温度에서 相變化가 일어나는 問題에 對하여 이 方法을 擴張시켰다.

위에서 言及한 두 方法은 長短點을 가지고 있다. 첫번째 方法은 두번째 方法보다 더 細密한 結果를 얻을 수는 있지만, 프로그래밍이 까다롭고, 약간의 解析的인 過程이 先行되어야 하며, 두번째 方法은 프로그래밍하기는 다소 쉬우나 實驗的 方法이나 數值的 方法으로 엔탈피와 温度와의 關係를 求해야 한다.

本論文에서는 위에서 言及한 두번째 方法을 利用하여 가로 세로의 比가 $\frac{1}{4}$ 인 직사각형 蓄熱單位(Rectangular Thermal Storage Unit)에 對한 相變化端의 위치, 相變化率, 冷却面의 热傳達量 分布總體热傳達量等을 數值的으로 계산해 보았다. 계산에 利用된 相變化 物質은 어떤 特定한 것을 選定한 것이 아니고, 無次元 變數인 Stefan數와 Biot數의 어떤 一定한 값을 택하여 使用하였다.

그리고 蓄熱單位의 形象變化에 따른 効果도 考察하기 위하여 Stefan數가 0.1이고 Biot 數가 10인 경우에 가로 세로의 比가 $\frac{1}{2}$ 인 직사각형 蓄熱單位와 정사각형 蓄熱單位에 對하여도 計算하여 서로 比較하였다.

2. 엔탈피모델

特定한 相變化 温度를 가진 一般的의 相變化 热傳導 問題에 利用되는 엔탈피모델은 다음과 같다.

엔탈피모델의 數學的 解析은 우선 微分式을 생각할 수 있는데 純粹한 物質의 相變化端에서 엔탈피 i 와 $k \cdot \text{grad } T$ 가 不連續的으로 變化하므로 그와 같은 境遇의 適當한 式은 積分式이다 [7].

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho i dv + \int_A \rho i \bar{v} \cdot \bar{n} dA = \int_A k \cdot \text{grad } T \cdot \bar{n} dA \quad (1)$$

(1)式의 두번째 項은 液相의 對流熱傳達을 나타내는데, 이것 때문에 液相의 運動方程式을 더 불어 풀어야 하는 어려움이 따른다. 따라서 速度場에 對한 계산이 必要없는 두가지의 特別한 境遇를 생각할 수 있는데 많은 實際問題에 있어서도 妥當性이 認定된다.

첫번째는 密度變化의 影響이 무시되고, 液相에서의 热傳達은 热傳達뿐이라고 假定하는 境遇이고, 두번째는 液相과 固相의 密度는 서로 다르지만 液相의 初期條件이 鮑和狀態라고 假定하는 境遇이다.

이와 같은 境遇에 있어서 (1)式은 다음과 같이 변형된다.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho idv = \int_A k \cdot \text{grad } T \cdot \bar{n} dA \quad (2)$$

(2)式이 엔탈피모델의 基本方程式이다.

(2)式은 어떤 範圍의 温度에서 相變化가 일어나는 問題와 相變化가 전혀 없는 問題에도 適用할 수 있으며, 이점이 (2)式의 弊점이다.

(2)式을 이 용하면 相變化端의 追跡이 必要치 않으므로, 相變化物質의 性質에 關한 어떤 사항도 假定할 必要가 없어지나, 엔탈피와 温度와의 관계가 (2)式과 더불어 使用되어야 한다.

어떤 範圍의 温度에서 相變化가 일어나는 物質에 對해서 (2)式은 微分式으로 變形될 수 있다. 이것은 i 와 $k \cdot \text{grad } T$ 가 T 에 對해서 連續이기 때문이다.

3. 解析

本論文에서 相變化 物質의 初期條件은 飽和狀態의 液相이고, 시스템의 流體溫度는 一定하게 維持된다. 그리고 相變化物質은 冷却面에서 對流熱傳達에 依해 冷却된다. 對流에 의한 冷却은 實用的인 面에 重要하다.

理論的인 解析은 다음의 假定을 따라 行하였다.

- 가. 相變化物質은 各 相에서 等方性(isotropic)이며 均一(homogeneous)하다.
- 나. 시스템의 Z 方向의 길이는 無限하여 端面效果(end effect)는 無視한다.
- 다. 엔탈피를 除外하고는 相變化物質의 物性值들은 温度에 無關하다.
- 라. 流體의 温度 T_∞ 와 對流熱傳達係數 h 는 時間과 空間에 對해 無關하다.
- 마. 蓄熱單位의 壁面은 무시할 程度로 작은 热抵抗과 热容量을 가지고 있다.

3.1 基本方程式

직사각형 蓄熱單位의 形象은 Fig. 1에 보이고 있으며, 對稱性에 의하여 蓄熱單位의 $\frac{1}{4}$ 인 AB

CD만을 考慮하면 된다.

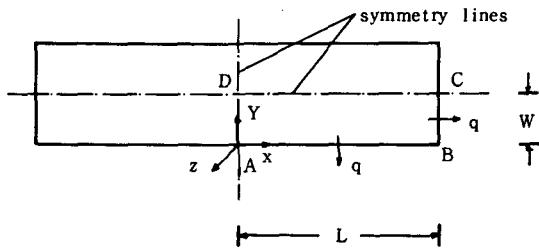


Fig. 1 Configuration of Thermal Storage Unit

엔탈피 모델의 基本方程式 (2)式을 二次元의 本問題에 適用하면 積分領域이 變하게 된다. 따라서 (2)式은

$$\frac{d}{dt} \int_a \rho ida = \int_s k \cdot \text{grad } T \cdot \bar{n} ds \quad (3)$$

로 된다. 여기서 a 는 斷面積이고, s 는 周邊길이(arc length)이다. 그리고 境界 AB 와 BC 에서는 對流熱傳達이 있으므로 境界的 基本方程式은,

$$\frac{d}{dt} \int_a \rho ida = \int_s k \cdot \text{grad } T \cdot \bar{n} ds - \int_s q_w ds \quad (4)$$

로 된다. 여기서 q_w 는

$$q_w = h (T_w - T_\infty) \quad (5)$$

이다.

3.2 無次元化

3.1에서 記述한 方程式을 一般的인 境遇에 適用하기 위해 時間, 엔탈피, 温度, 热傳達量에 關해 각각 無次元量을 使用하여 無次元化 하였다.

$$F_o = \frac{k_s t}{\rho c_s L^2} \quad (6)$$

$$\theta = \frac{1}{\rho a} \int_a \rho \frac{(i - i_{s*})}{\lambda} da \quad (7)$$

$$\phi = \frac{c_s (T - T_{sat})}{\lambda} \quad (8)$$

$$q = \frac{q_w}{h (T_{sat} - T_\infty)} \quad (9)$$

(3)式은

$$G = \frac{2Bi}{\Delta X} \quad (30)$$

$$H = G \cdot Ste \quad (31)$$

위에서 求해진 差分方程式은 Gauss - Seidal iteration 方法을 利用해서 풀어 진다.

그리고 정사각형 蓄熱單位에 關한 差分方程式도 위와 같은 方法으로 類似하게 얻어 진다.

3.4 冷却面의 热傳達量, 總體热傳達量, 相變化率의 考察

時間에 따른 蓄熱單位의 單位길이當 热傳達量 q_w 는 式 (5)에서 주어지고 總體热傳達量 Q_w 는 다음과 같이 表現된다.

$$Q_w = \int_A q_w dA \quad (32)$$

이 식들은 다음과 같이 無次元화할 수 있다.

$$q = \frac{q_w}{h(T_{sat} - T_\infty)} \quad (9)$$

$$Q = \frac{Q_w}{hA(T_{sat} - T_\infty)} \quad (33)$$

여기서 q 無次元화된 冷却面의 热傳達量, Q 는 無次元화된 冷却面의 總體热傳達量을 뜻한다.

그리고 相變化率 F 는

$$F = \frac{\text{固相體積}}{\text{總體積}} \quad (34)$$

로 定義된다.

4. 值值解의 檢證

Gauss - Seidal iteration 方法을 使用한 本計算에서 時間間隔 ΔF_o 는 數值解에 하등 影響을 주지 않았다. 다시 말해 ΔF_o 를 크게 取해도 發散하지 않았으며, ΔF_o 는 단지 細密한 結果를 얻을 必要가 있는 境遇나 그령지 않은 境遇에 따라 적당히 잡으면 되었다. 本 計算에서 ΔF_o 는 相變化物質이 완전히 固相이 될때까지 大略 300번 반복계산하게 하면 細密한 結果를 얻을 수 있었다.

空間間隔 ΔX 나 ΔY 에 對해서는 0.05정도 잡으면 細密한 結果를 얻을 수 있었다.

그리고 Gauss - Seidal iteration 方法에 의한 數值解의 檢證을 위하여 Explicit method를 使

用하여 比較하여 보았다. Explicit method 使用 時의 收斂條件은 가장 活性있는 B格子點에 對하여 Taylor 級數展開하여 Maximum principle 을 利用하면,

$$\Delta F_o \leq \frac{1}{\left[\frac{2}{(\Delta X)^2} + \frac{2}{(\Delta Y)^2} \left(\frac{L}{W} \right)^2 + \frac{2Bi((\frac{L}{W})\Delta X + \Delta Y)}{\Delta X \cdot \Delta Y} \right]} \quad (35)$$

가 얻어 진다. [8] 두 方法의 解를 比較하여 보면, 大略 有効숫자 4자리 정도는 一致하였다. 本計算에서 有効숫자 4자리 정도의 一致는 거의 같은 結果를 나타낸다 볼 수 있다.

5. 結果 및 考察

우선 가로 세로의 比가 1 / 4인 직사각형 蓄熱單位에 對해서 热傳達量의 分布, 總體热傳達量, 相變化率, 相變化端의 位置등을 叙述하고, 形象變化에 따른 効果를 나중에 比較해 보도록 한다.

5.1 無次元화된 冷却面의 热傳達量 分布

이것은 Fig. 3, Fig. 4에 나타나 있다. Fig. 3은 Biot 數가 0.1인 경우에 對해서, Fig. 4는

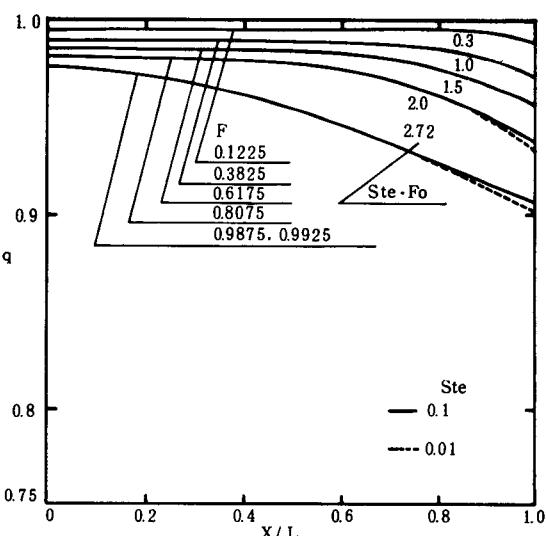


Fig. 3a Distribution of heat flux on cooled surface, $W/L = 0.25$, $Bi = 0.1$

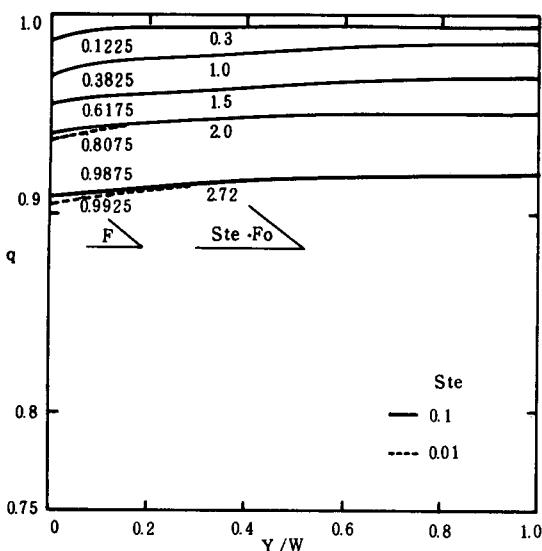


Fig. 3b Distribution of heat flux on cooled surface, $W/L=0.25$, $Bi=0.1$

Biot 數가 10 인 경우에 對해서 나타나 있으며, Stefan 數의 變化에 따른 効果도 아울러 考慮하였다. 그림에서 실선만 있는 부분은 실선과 접선이 일치된 부분임을 나타낸다.

그림에서 보는 바와 같이 時間變數는 Ste Fo로 取했다. 이것은 두가지 값의 Stefan 數에 對한結果를 같이 보기 위한 것이며 Stefan 數 變化에 따른 効果는 相變化가 끝날 무렵에야 뚜렷이 나

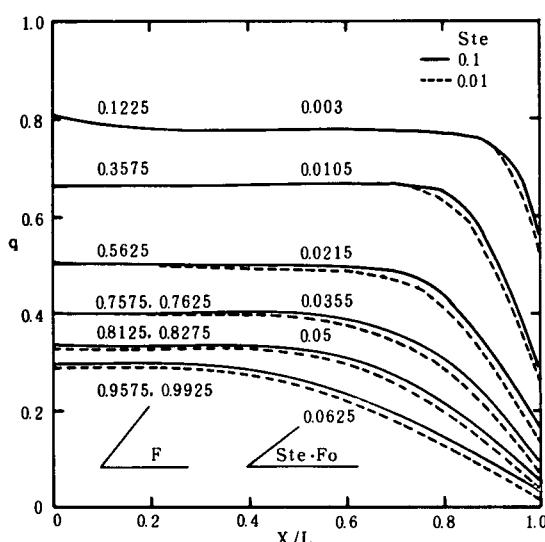


Fig. 4a Distribution of heat flux on cooled surface, $W/L=0.25$, $Bi=10.0$

타나고, 그것도 Biot 數가 클 境遇에야 뚜렷이 나타난다.

相變化가 일어나면서 热傳達量은 모서리로 감에 따라 점점 減少한다.

이것은 隣接한 두 面에 依한 热損失때문에, 더 두꺼운 固相層이 形成되어 더 커지기 때문이다. 相變化初期過程에서 이런 傾向은 모서리에 隣接한 部分에만 나타나고, 나머지 部分은 一定한

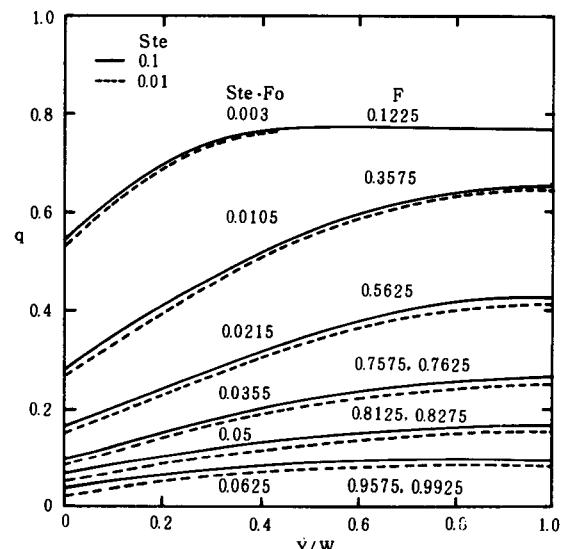


Fig. 4b Distribution of heat flux on cooled surface, $W/L=0.25$, $Bi=10.0$

값을 나타내나, 時間이 지남에 따라 이와 같은 모서리効果(corner effect)는 점점 擴張된다.

X 軸과 Y 軸에 關한 結果를 比較해보면, Y 軸의 热傳達量의 變化는 一定한 率을 이루게 되고 모서리効果는 더 커진다. 이것은 Y 軸方向의 蓄熱單位 길이가 짧기 때문에 일어나는 當然한 結果라 할 수 있다.

Biot 數에 따른 効果를 살펴보면, Biot 數가 커질수록 모서리効果는 뚜렷하게 나타난다.

5.2 無次元화된 總體热傳達量과 相變化率
蓄熱應用의 觀點에서 보면 總體热傳達量이나 相變化率이 冷却面의 热傳達量分布보다 더욱 重要하다.

Fig.5는 相變化率에 대한 總體热傳達量의 變化

를 나타내고 있다. Biot數가 0.1인 경우에는 相變化物質의 内部熱抵抗보다 外部對流熱抵抗이 훨씬 크지만 外部熱抵抗은 時間에 따른 變化가 없기 때문에 總體熱傳達量은 液相이 完全히 固相으로 變할때까지 거의 一定한 分布를 보인다. 完全한 相變化가 이루어 질때까지 大略 0.9 까지 減少하게 된다. 그리고 完全히 相變化를 이룰때 까지 热容量의 效果는 無視된다. Biot數가 1인 경우에는 完全相變化를 이룰때까지 大略 0.6 까지 減少하게 된다. 热容量의 效果는 이 境遇에 있어서 다소 重要視된다. Biot數가 10인 경우에는 相變化初期過程에서 總體熱傳達量은 급격히 減少하고 그 後에는 서서히 減少하게 된다. 이것은 内部熱抵抗이 外部熱抵抗보다 훨씬 크고 内部熱抵抗은 相變化가 일어 남에 따라 變하기 때문이다.

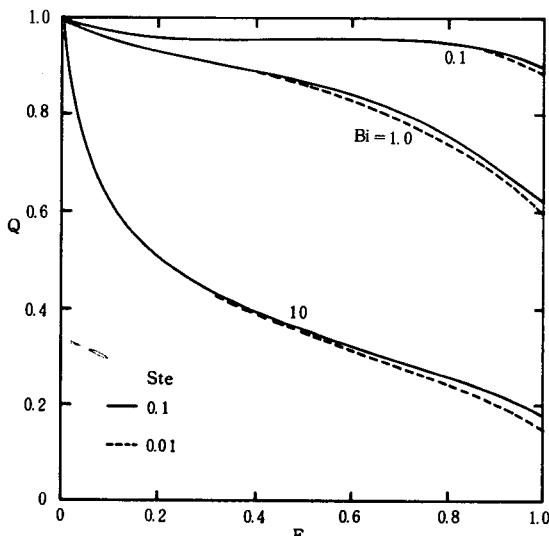


Fig. 5 Surface-integrated heat flux to frozen fraction, $W/L=0.25$

蓄熱應用의 觀點에서 보면, 總體熱傳達量이 相變化가 끝날 때까지 正常狀態의 分布를 보이는 것이 좋으며, 이것은 Biot數가 작은 境遇에 可能하다. 그러나 蓄熱構造의 크기나 作用時間 등과 같은 다른 條件도 考慮해야 한다.

5.3 相變化端의 位置

相變化端의 位置는 Fig. 6~8에 나타나 있다.

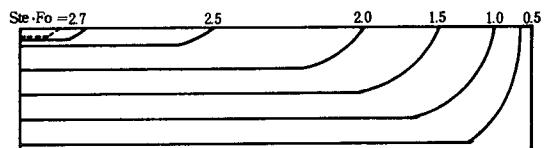


Fig. 6 Location of interface at various times
 $Bi=0.1$, $Ste=0.1$ ———, $W/L=0.25$
0.01-----

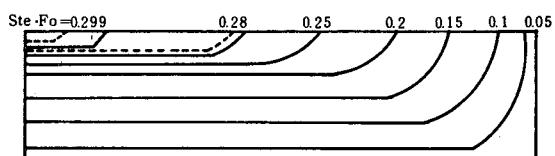


Fig. 7 Location of interface at various times
 $Bi=1.0$, $Ste=0.1$ ———, $W/L=0.25$
0.01-----

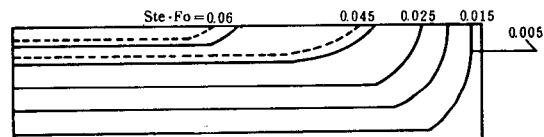


Fig. 8 Location of interface at various times
 $Bi=10.0$, $Ste=0.1$ ———, $W/L=0.25$
0.01-----

Fig. 6은 Biot數가 0.1인 境遇에 對해서 Fig. 7은 Biot數가 1인 境遇에 對해서, Fig. 8은 Biot數가 10인 境遇에 對해서 나타나고 있으며, Stefan數 變化에 따른 效果도 考慮했다.

傾向을 보면, 相變化 끝부분에 가서야, Stefan數가 더 작은 境遇에 相變化端의 位置가 보다 빨리 前進하게 되며, 이점이 Stefan數의 重要한 效果이다.

5.4 形象變化에 따른 比較

形象에 따른 變化를 보기위해,前述한 가로 세로의 比가 1/4인 직사각형 蓄熱單位 외에 가로 세로의 比가 1/2인 직사각형 蓄熱單位와 정사각형의 蓄熱單位를 Biot數가 10이고, Stefan數가 0.1인 境遇에 對하여 서로 比較하여 보았다.

熱傳達量分布는 Fig. 9~10에, 總體熱傳達量과 相變化率은 Fig. 11~12에, 相變化端의 位置는 Fig. 13~14에 나타나 있으며,前述한 바와 같은 特徵을 가진다.

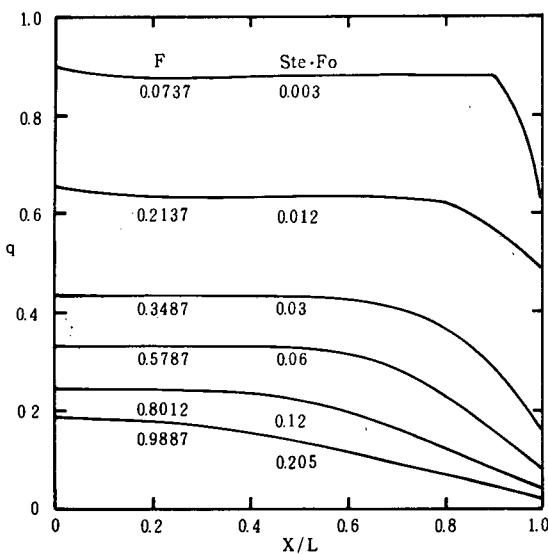


Fig. 9a Distribution of heat flux on cooled surface, $W/L=0.5$, $Bi=10.0$, $Ste=0.1$

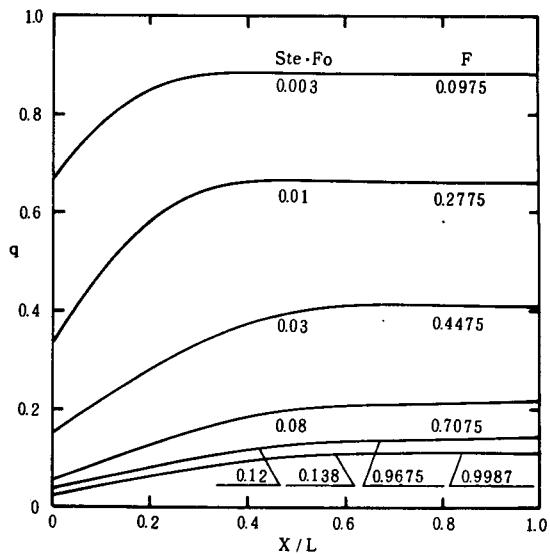


Fig. 10 Distribution of heat flux on cooled surface
 $W/L=1.0$, $Bi=10.0$, $Ste=0.1$

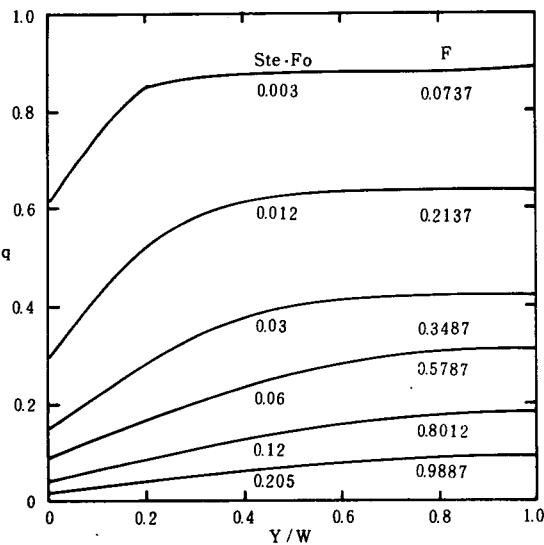


Fig. 9b Distribution of heat flux on cooled surface, $W/L=0.5$, $Bi=10.0$, $Ste=0.1$

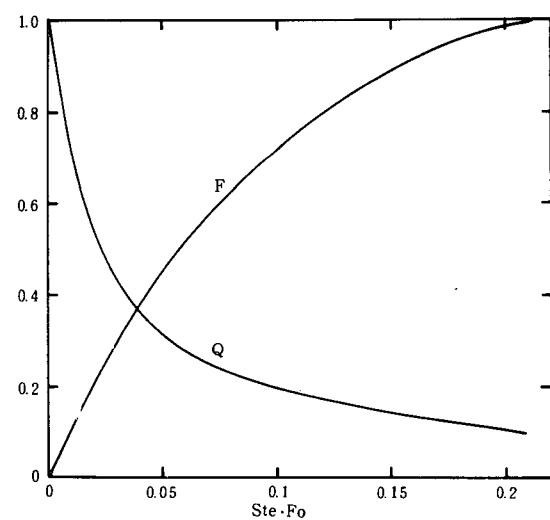


Fig. 11 Time variation of surface-integrated heat flux and frozen fraction,
 $W/L=0.5$, $Bi=10.0$, $Ste=0.1$

相變化率의 比較인 Fig. 15 를 보면, 單位時間當의 蓄熱能力은 3 이 가장 良好하며, 時間이 흐름에 따라 서로의 差異는 점점 커진다.

總體熱傳達量의 比較인 Fig. 16 을 보면, 總體熱傳達量의 變化率이 가장 작은 1 이 良好하지만, 서로에 對한 差異가 작으므로 어느 것이나 비슷하다 할 수 있다. 그리고 2 와 3 이 $Fo \approx 0.35$ 에서 서로 交叉하고 있으며, 이것은 다른 경우보다 3 이 後期過程에서 總體熱傳達量의 變

化率이 작음을 나타낸다 볼 수 있으며, 점점 그 差異가 커지는 相變化率과는 對照的이라 할 수 있다.

6. 結 論

엔탈피 모델의 基本方程式을 利用한 本 論文에서, 蓄熱單位 形象變化와 Stefan數, Biot 數 變化에 따른 相變化端의 位置, 相變化率 그리고 冷却面의 热傳達量의 分布, 總體熱傳達量 等의

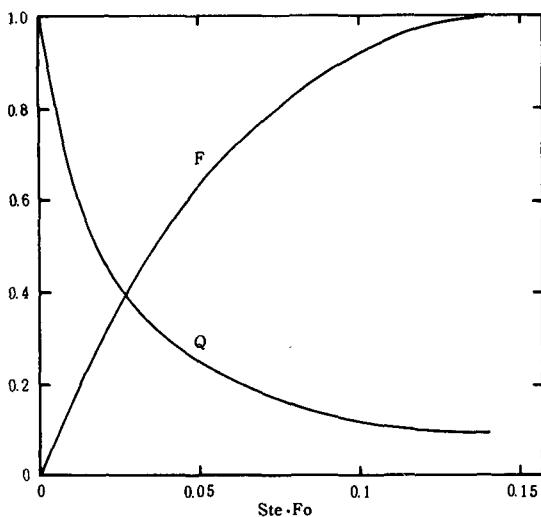


Fig. 12 Time variation of surface-integrated heat flux and frozen fraction,
W/L=1.0, Bi=10.0, Ste=0.1

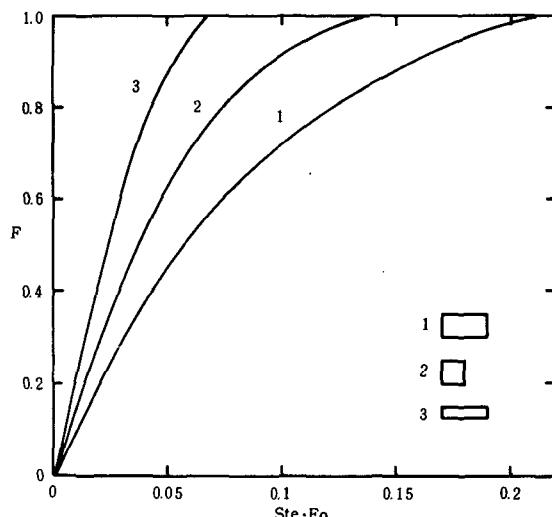


Fig. 15 Comparison with frozen fraction rates of various shapes, Bi=10.0, Ste=0.1

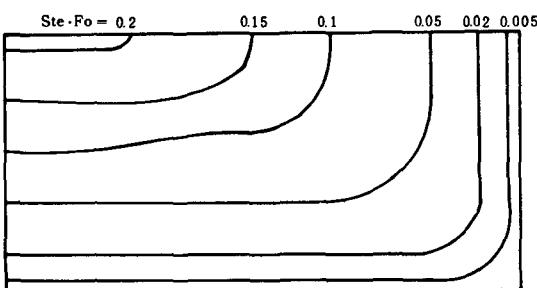


Fig. 13 Location of interface at various times
W/L=0.5, Bi=10.0, Ste=0.1

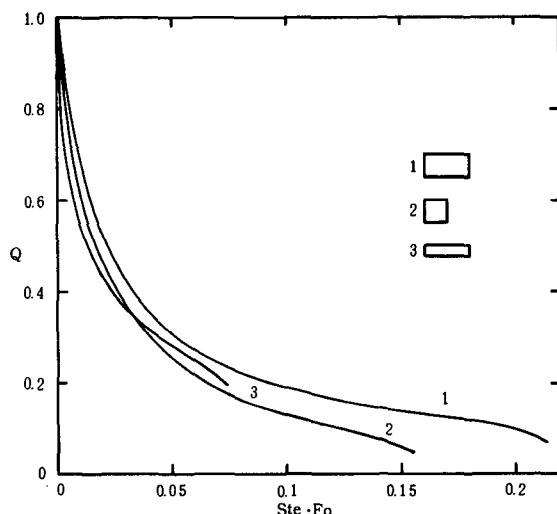


Fig. 16 Comparison with surface-integrated heat flux rates of various shapes, Bi=10.0, Ste=0.1
여러가지 결과를考察해 보았다.

앞에서考察한結果를 가지고 본다면, 가로세로의比가 $\frac{1}{4}$ 인直四角形蓄熱單位가蓄熱시스템의流體流動에關한效果, 經済性, 시스템의크기等의 다른條件도考慮한解析이行해져야하겠다.

엔탈피와溫度의關係를求한다면, 初期條件이飽和狀態가아닌問題나, 여러가지境界條件問題에도엔탈피모델이利用될 수 있으며 앞으로의利用이期待된다.

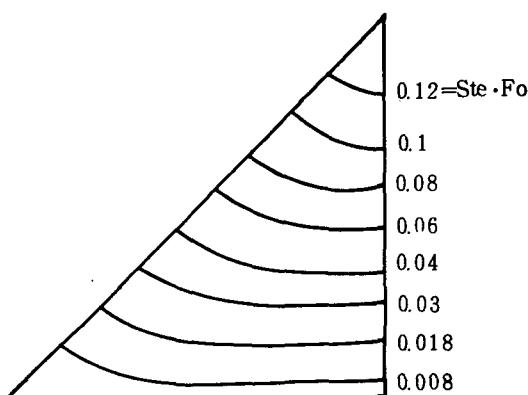


Fig. 14 Location of interface at various times
W/L=1.0, Bi=10.0, Ste=0.1

後記

本研究는 現代 그룹의 研究活動費 지원에 의
하여 이루어졌으며 이에 대하여 감사한다.

参考文献

1. G. Poots, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 5, pp. 339—348 (1962).
2. A. Lazaridis, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 13, pp. 1459—1477 (1970).
3. T. Saitoh, J. Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 100, pp. 294—299 (1978).
4. G. H. Meyer, Int. J. for Num. Meth. Engng., Vol. 11, pp. 741—752 (1977).
5. G. Comini, et al., Int. J. for Num. Meth. Engng., Vol. 8, pp. 613—624 (1974).
6. N. Shamsundar, and E. M. Sparrow, J. Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 97, pp. 333—340 (1975).
7. D. G. Wilson, A. D. Solomon, and P. T. Boggs, ed. Moving Boundary Problems, Academic Press, 1978.
8. B. Carnahan, H. A. Luther, and J. O. Wilkes, Applied Numerical Methods, Chapter 7, Wiley, 1969.