Journal of the
Military Operations Research
Society of Korea, Vol. 7, No. 2
December, 1981

# 벡타利得게임 (Vector-Payoff Game)

朴 淳 達*

## 1. 序 論

여기에서는 벡타이득을 가진 2人 零合게임 (two-person zero-sum game with vector-payoff)을 주로 다루기로 한다. 이러한 게임을 벡타이득게임이라 부르기로 한다.

게임은 보편적으로는 實數이득(real-valued payoff)을 가지는 경우를 주로 다룬다. 게임이 물론 돈으로 이득을 표시하는등 그 이득이 實數로 나타나는 때도 있지만 많은 경우 각 參加者의 戰略선택에 따른 결과를 實數效用(real-valued utility)으로 바꾸어 實數利得을 가지게 하는 것이다.

예를 들어 브롯토大領(Col. Blotto)게임을 보자. 브롯토大領은 4개연대를 가지고 있고 敵은 3개연대를 보유하고 있다. 그런데 高地가 A, B 두개가 있어 브롯토大領과 敵은 어떻게 병력배치를 해야 좋겠는가하는 문제이다. 이 게임은 1949년 포춘(Fortune)誌에 실린 맥도널(McDonald)와 터기(Tukey)가 발표한 게임의 예이다.

이 예에서 이 두 사람은 브롯토大領이 A와 B 高地를 탈환하기 위한 병력배치의 戰略은 A高地에 4개연대 B高地는 0 즉 (4, 0)라는 戰略과 반대로 B高地에 4개연대를 배치하는 (0, 4)라는 戰略, 이 외 (3, 1), (1, 3), (2, 2)의 戰略이 가능하다고 생각했다.

그리고 敵에 대해서는 (3, 0), (0, 3), (2,1), (1, 2)의 兵力配置의 戰略이 가능하다고 생각했다.

그런데 브롯토大領과 적이 각기 전략을 취했을 때 나타나는 結果는 브롯토大領을 기준으로하여 한 연대를 이기면 1점, 고지 하나 따면 1점을 주기로 했다. 그래서 예를 들어 브롯토大領이 (3, 1)이란 전략을 취하고 적이 (2, 1)이란 전략을 취하면 이득은 3點이 된다. 왜냐하면 A고지에서 브롯토大領의 3개연대와 적의 2개 연대가 맞붙어 싸우게 되는데 양쪽의 兵力의 戰力은 같다고 가정하기 때문에 결국 적 2개 연대가 패배하고 만다. 이래서 브롯토大領은 2點을 따며 또한 브롯토大領이 A고지를 탈취하므로 1點을 추가하여 3點이 된다. B고지에서는 서로 1개 연대가 맞붙기 때문에 서로 비겨 각자 득점이 없다.

맥도널과 터키는 이러한 방법으로 브롯토大領의 게임을 만들었는데 그 결과 이득行列(Payoff matrix)는 그림 1과 같이 된다.

이 게임에서 이 이득행열이 과연 옳은 것인가? 과연 가장 현실성 있는 것인가? 가장 정확한 표현인가? 하는 의문이 남아 있다. 그러나 이러한 질문은 결국 意思決定權者만이 답

* 서울大學校 工科大學

할 수 있는 것이다. 즉 개인에 따라 그 결과에 대한 가치가 달라지므로 이러한 이득행열이 반드시 어떻게 되어야한다고 말하기는 힘들다. 이 그림 1은 맥도널과 터기의 상황판단이라고 보아야 하겠다.

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{敵} \\
 & \begin{array}{cccc} (3,0) & (0,3) & (2,1) & (1,2) \end{array} \\
\text{브롯토大領} \begin{array}{c} (4,0) \\ (0,4) \\ (3,1) \\ (1,3) \\ (2,2) \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

**〈그림 1〉 브롯토大領게임**

그러나 여기서 하나 던저 볼 수 있는 의문은 1개연대와 1개 고지가 과연 같은 價値를 가진다고 할 수 있겠는가? 서로 比較可能한 성질인가? 이러한 의문은 각 意思決定權者의 價値基準과 상관없이 利得計算過程의 缺點으로 던져 볼 수 있는 질문인 것이다. 이 브롯토大領게임에서 맥도널과 터기는 우선 利得을 편리하게 계산하기 위하여 비교하기 어려운 1개연대와 1개 고지의 가치를 같게하였다고 생각해 볼 수 있다.

그렇다면 비교하기 어려운 두 가지의 이득을 합치질 않고 그대로 표현하면 어떻게 될 것인가?

이들 利得을 벡타 (a, b)로 표현하기로 하고 a는 兵力에 대한 점수, b는 고지에 대한 점수라고 하자. 그러면 예를 들어 브롯토大領의 (3,1) 戰略과 敵의 (2,1) 戰略이 사용되면 결과는 브롯토大領이 兵力에서 2點을,고지에서 1點을 따서 (2,1)이란 點數를 따게 된다. 이것을 벡타이득게임으로 표시하면 그림 2와 같이 표시된다.

또 다른 例로 두 나라의 군축협상의 경우를 보자. 한 나라의 군축 또는 戰力확창은 파급효과가 다양하다. 軍事, 經濟, 外交, 文化등

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{敵} \\
 & \begin{array}{cccc} (3,0) & (0,3) & (2,1) & (1,2) \end{array} \\
\text{브롯트大領} \begin{array}{c} (4,0) \\ (0,4) \\ (3,1) \\ (1,3) \\ (2,2) \end{array} & \begin{bmatrix} (3,1) & (0,0) & (2,0) & 1,0) \\ (0,0) & (1,3) & (1,0) & 2,0) \\ (0,1) & (-1,0) & (2,1) & (0,0) \\ (-1,0) & (0,1) & (0,0) & (2,1) \\ (-2,0) & (-2,0) & (1,1) & (1,1) \end{bmatrix}
\end{array}
$$

**〈그림 2〉 벡타이득 브롯토大領게임**

다양하게 나타난다. 이러한 다양한 파급효과를 단 하나의 實數로 나타낸다는 것은 대단히 어려운 일이고 위험한 일이다. 그래서 이 경우의 파급효과를 서로 비교 불가능한 요소들로 이루어진 벡타로 표시해 봄직하다.

우선 軍事, 經濟的인 파급효과만 보기로 하자. A, B 두 나라는 서로 견원지간으로 A는 경제로는 우월한 입장에 있으나 軍事力은 B에 뒤지고 있다. 軍備擴張이 두 나라에 미치는經濟的 陰性효과가 크기 때문에 두 나라는 軍縮協商을 시작하기로 하였다.

일차협상에서는 兵力水準을 1할 줄이는 協商이 시작되었다. 그런데 A는 이러한 協商에 임하기 전에 A, B 두 나라가 이와같이 軍縮했을 때와 반대로 軍備를 擴張했을 때 어떠한 결과가 초래할 것인가 분석해 보기로 했다.

우선 A와 B가 다 같이 軍縮했을 경우를 보자. 그러면 A와 B가 軍縮만큼의 예산을 經濟건설에 투입할 수 있다. 우선 軍事的인 面의 A의 이득은 결국 A와 B가 모두 다 같이 兵力을 1할 줄이는 것이지만 A는B에 비해 火力이 떨어지기 때문에 兵力을 줄이면 B보다 약한 戰力이 더욱 약해지게 된다. 그래서 軍事的으로는 −1 만큼 불리한 이득을 A가 받게 된다.

한편 經濟的으로는 B는 지금 한창 經濟的으로 발전도상에 있어 다 같이 兵力1할을 줄여 그것을 經濟發展에 투입하면 A가 발전하는 것보다는 B가 휠씬 더 많이 발전할 수 있다. 그래서 A도 軍縮하게 되면 經濟的으로 유리

하나 B에 비하면 그 惠擇이 적어 결국 상대적으로 －5의 손해를 보게된다. 결국 A와 B가 다 같이 軍縮을 하게되면 A는 (－1,－5)의 이득을 얻게된다. 즉 A는 B에 비하여 군사적으로, 경제적으로 모두 불리한 이득을 얻게된다.

A가 군축을 하고 B가 軍縮擴張을 할 경우 A는 軍事的으로 불리한 상황이 더욱 불리해져 －3의 불리한 입장에 있는 B는 더욱더 경제사정이 나빠져 A는 50이라는 유리한 이득을 얻게된다.

그리고 A는 擴張하고 B가 軍縮을 단행할 경우에는 A가 軍事的으로 3이라는 유리한 이득을 얻게되고 그러나 B가 군축으로 생긴 여유자금을 경제발전에 더욱 박차를 가하여 B는 A에 비하여 상대적으로 20을 얻게된다.

A가 擴張을 서둘르고 B가 역시 擴張하기로 결정하면 A는 여전히 군사적으로 열세이긴 하지만 전에 비하여 B에 비교적으로 1만큼 더 강해지게 되고 또한 經濟的으로도 B에 비해서는 30만큼 덜 타격을 받게되어 (1,30)의 이득을 얻게된다.

이것을 行列로 표시하면 그림 3과 같이 되고 이 벡타이득行列로써 군축협상의 전략을 분석할 수 있게된다.

$$\begin{array}{cc} & \text{B} \\ & \begin{array}{cc} \text{軍縮} & \text{擴張} \end{array} \\ \text{A} \begin{array}{c} \text{軍縮} \\ \\ \text{擴張} \end{array} & \begin{bmatrix} (-1,-5) & (-3,50) \\ \\ (3,-20) & (1,30) \end{bmatrix} \end{array}$$

〈그림 3〉 **軍縮協商**

다시 브룻토大領게임으로 돌아가 보면 브룻토大領의 각 戰略의 利得保障水準은 戰略(4,0)의 경우는 0, (0,4)도 0,(3,1)은 －1, (1,3)은 －1,(2,2)는 －2로써 브룻토大領의 안전수준은 0이 된다. 즉 (4,0)와 (0,4)의 戰略을 선택하는 것이 maximin 戰略이 된다.

한편 敵은 安全水準이 3으로써 (2,1)과 (1,2)의 戰略이 安全水準을 가장 높이는minimax 戰略이 된다.

그래서 브룻토大領의 경우는 兵力集中의 원칙이 좋고 敵의 경우 兵力分散의 원칙이 좋다는 결론이 나온다.

한편 벡타이득의 브룻토大領게임을 보면 브룻토大領은 兵力面에서나 高地確保面에서 모두 그 이득을 最大化할려고 하고 敵도 같은 입장에 있다. 그래서 이 벡타이득의 경우도 實數利得의 브룻토大領과 같이 각각의 安全水準을 最大化하는 戰略을 선택할려고 한다는 입장에서 보면 다행스럽게 같은 결론에 도달하게 된다.

즉 브룻토大領의 安全水準을 最大化하는 戰略은 (4,0)와 (0,4)가 되고 한편 敵의 安全水準을 最大化하는 戰略은 (2,1)과 (1,2)가 되어 각각 그들의 두 戰略을 잘 混用해 使用함으로써 각각의 이득을 가장 높일 수 있다.

그러나 軍縮協商의 경우를 보면 A는 B가 擴張에 동의하여 다 같이 軍縮擴張의 戰略을 선택하기를 바란다. 그러나 B는 이와 반대로 다 같이 軍縮의 戰略을 선택했으면 할 것이다. 그래서 서로 상대를 위협하면서 협상을 진행시킬 수 있다.

이 경우에 브룻토게임 즉 實數利得을 가진 경우와 같이 예를 들어 A의 軍縮戰略에 대한 최소한 보장된 이득은 {(－1,－5), (－3,50)}이 된다. 實數利得의 게임에서는 이 값이 하나로 나타나지만 벡타이득의 경우는 이와 같이 하나 이상 나타날 수가 있다. 그래서 A의 安全水準도 하나 이상의 벡타는 표시되어야 할 경우가 있게 된다.

B의 경우도 安全水準이 하나이상의 벡타로 표시되어야 할 경우가 있게 되고 따라서 게임의 값도 하나이상의 값으로 나타내어야 할 경우가 생기게 된다.

이와같이 벡타이득을 가진 게임의 경우에는 實數利得을 가진 게임의 경우와는 달리 각 參加者의 최적전략도 唯一치 않을수 있으며 또

한 게임의 값도 唯一치 않을 수 있는 것이다.

## 2. 準平衡點

벡타이득을 가진 게임은

$A=(a_{ij})_{(i,j)\in M\times N}$, 단 $|M|=m$, $|N|=n$ (1)

로 표현하기로 한다. 여기서 參加者 1은 m개의 戰略을 가지고 있고 이 戰略集合을 M라고 두며, 參加者 2는 n 개의 戰略을 가지고 있으며 이 戰略集合은 N라고 둔다. 그리고 參加者 1, 2의 戰略 i, j 가 택해졌을 때의 利得을 $a_{ij}$ 라고 두며 이 $a_{ij}$ 는 K次 유크리트空間 $R^K$ 의 元素이다. 여기서 K=1 이면 이 벡타이득 게임은 行列게임이 된다.

각 利得 $a_{ij}$ 는

$a_{ij}=(a_{ij}^1, \cdots, a_{ij}^k, \cdots, a_{ij}^K)$ $\forall_{i,j}$ (2)

로 표현되고

$A^k=(a_{ij}^k)_{(i,j)\in M\times N}$, $k=1,2,\cdots,K$ (3)

는 $k$ 構成要素게임 ($k^{th}$ component game) 이라고 부른다.

모든 $k$ 에 대해 $A^k$ 는 行列게임이며 따라서 이 게임에 대해서는 最小最大定理에 의해 實數 $V^k$ 와 參加者 1, 2의 最適戰略 $X^k$, $Y^k$ 가 존재하여

$$\max_X \min_Y XA^kY=\min_Y \max_X XA^kY = X^kA^kY^k=v^k,\ k=1,\cdots,K \quad (4)$$

가 성립한다. 그러나 $X^kA^lY^k=v^l$ 가 되는보장은 없다.

벡타간의 順序는 다음과 같이 정의한다. 두 벡타

$a=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$
$b=(b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)$

가 있을 때

모든 i 에 대해 $a_i=b_i$ 면 $a=b$,
어떤 i 에 대해 $a_i>b_i$, 그리고
다른 모든 j에 대해 $a_j\geq b_j$ 면 $a\geq b$,
그리고 모든 i 에 대해 $a_i\geqq b_i$ 면 $a\geqq b$
라고 정의한다.

이 정의에 의하면 벡타이득集合 $\{a_{ij}\}$은 半順序 (partial order)로써 極大點과 極小點은 여러개가 생길 수 있다. K=1 이면 $\{a_{ij}\}$ 는 全順序가 되고 極大點과 極小點은 물론 唯一하다.

K=1 일 경우 즉 行列게임에서는 게임의 基本定理가 의하여 항상 平衡點이 존재한다. 그러면 K>1 일 경우에도 이 基本定理에 성립하겠는가?

예 2 軍縮協商의 경우 參加者 A의 安全水準을 구하기 위하여 A의 軍縮戰略의 最小量 즉 벡타(−1, −5)와 (−3, 50)의 最小量은 둘 모두 크고 작은 要素를 가지고 있기 때문에 順序를 정할 수 없다. 즉 두 벡타 모두 極小點이요 동시에 極大點이다. 그래서 軍縮戰略의 最小點은 集合 {(−1, −5), (−3, 50)}가 된다.

그리고 擴張戰略의 最小點도 또한 集合 {(3, −20), (1, 30)}가 된다. 그리고 이 두 集合의 最大點은 또한 벡타集合 {(−3, 50), (3, −20), (1, 30)} 이 된다.

그리고 參加者 B의 軍縮戰略의 最小點은 {(−1, −5), (3, −20)}, 그리고 擴張戰略의 最大點은 {(−3, 50), (1, 30)}가 되어 B 의 安全水準은 벡타集合 {(−1, −5) (3, −20), (−3, 50)} 이 된다.

이러한 방법 즉 行列게임에서와 같은 方法으로 각 참가자의 安全水準을 구하면 이들 安全水準을 서로 비교할 수 없다는 것을 알게 된다. 즉 行列게임에서와 같은 平衡點을 찾을 수 없다는 것을 알 수 있다.

그렇다면 과연 平衡點이 存在하지 않을 것인가? 전술한 바와 같이 이득集合 $\{a_{ij}\}$에서 極大點과 極小點이 唯一한 것이 아니기 때문에 참가자 1 이 자기의 이득을 최대화할려고 하고 참가자 2 가 자기의 이득을 또한 최대화할려고 할 때 나타나는 값은 벡타의 集合이 될 것이라는 사실을 알 수 있다. 그리고 이 集合의 要素들은 서로 비교 가능치 않기 때문에 이 集合의 要素들은 모두 行列게임의 平衡點과 같은 역할을 한다고 생각해 볼 수 있다. 이러한 集合이 存在하면 이들의 要素들은 準平衡點이라고 한다.

**定義** 다음 條件을 만족시키는 벡타 $(X^*, Y^*, V)$를 準平衡點(quasi-equilibrium point)라 부른다.

(i) $X^* AY^* = V$

(ii) 어떠한 X, Y에 대해서도

$$\underset{X}{\mathrm{Max}}\ \underset{Y}{\mathrm{Min}}\ XAY \geq V \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

가 성립치 않는다.

(iii) 어떠한 X, Y에 대해서도

$$\underset{Y}{\mathrm{Min}}\ \underset{X}{\mathrm{Max}}\ XAY \leq V \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

가 성립치 않는다.

이 때 $X^*$, $Y^*$를 참가자 1 과 2 의 準最適戰略이라고 한다. 그러면 다음 定理가 성립한다.

**定理 1.** 벡타이득을 가진 모든 2人非協助게임(two-person, non-cooperative game with vector-payoff)은 적어도 하나의 準平衡點을 가진다.

이 定理는 行列게임에 있어서의 基本定理에 相應되는 定理로써 벡타이득게임의 解를 관찰할 수 있는 실마리를 부여해 주는 定理라 하겠다.

이 定理에 의하여 準平衡點은 항시 存在하며 準平衡點의 값에 相應하는 각 참가자의 準最適戰略이 存在하게 된다. 그러나 벡타이득 게임은 전술한 바와 같이 그 값이 唯一치 않을 수 있으며 그 값이 여러 개 $\{V_i\}_{i\in I}$일 경우에는 각 $V_i$에 해당하는 準平衡戰略들$\{X_i\}$, $\{Y_i\}$들이 存在하여 각 準平衡點雙 즉 $(X_i, Y_i)$에 대해 $V_i$가 대응하여 그림 4 에서와 같이

$$X_i AY_i = V_i$$

가 성립된다.

## 3. 多目的線型計劃法化

行列게임이 線型計劃法問題로 전환된다는 사실은 잘 알고 있다. 마찬가지로 벡타이득게임도 어떤 형태의 數理計劃法으로 전환될 수 있지않겠는가 하는 의문은 자연스럽다.

우선 참가자 1 의 경우를 보자, 참가자 1 은 참가자 2 가 자기의 손해를 최소화할려고 노력하는 가운데 이득을 최대화할려고 하기 때문에 Maximin 戰略을 선택하게 된다. 즉 $\underset{x}{\mathrm{Max}}\ \underset{y}{\mathrm{Min}}\ XAY$를 추구하게 되는데 이것을 數理計劃法으로 고치면

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Max}\ V\\
&\mathrm{s.t.}\\
&X(A^k) \geq e_n v^k,\ k=1, 2, \cdots, K \quad \cdots\cdots(7)\\
&\quad e_m X = 1\\
&\quad\ X \geq 0,\\
&\text{단 } V = (v^1, \cdots\cdots, v^k), e_n = (1, 1, \cdots, 1)
\end{aligned}$$

로 된다. 이 형태는 行列게임이 線型計劃法으로 전환시킬 때와 마찬가지의 절차와 方法에 의해 도출된 것이다.

비슷하게 참가자 2 의 問題 즉 $\underset{y}{\mathrm{Min}}\ \underset{x}{\mathrm{Max}}\ XAY$는

$$\mathrm{Min}\ U$$

s.t.

$$A^k \cdot Y \le e_m u^k;\ k = 1, 2, \cdots, K \cdots\cdots\cdots (8)$$
$$e_n Y = 1$$
$$Y \ge 0,$$
$$단,\ U = (u^1, u^2, \cdots, u^k)$$

로 전환될 수 있다.

이 식(7)과 (8)을 풀므로써 참가자1의 최적전략 $X^*$와 이득 V, 그리고 참가자2의 최적전략 $Y^*$와 이득 U가 구해진다. 그런데 K=1 즉 行列게임에서는 (7)과 (8)은 行列게임 A에 대응되는 線型計劃法이 되며 따라서 이 두 식을 풀므로써 참가자1과 2의 최적전략을 얻을 수 있게 된다. 나아가 이 두식은 서로 雙對문제가 되어 V와 U의 값이 같아지게 되어 이 값이 게임의 값이 된다.

그러나 K > 1일 경우에도 꼭 같은 결과를 얻을 수 있겠는가? 우선 이(7)과(8)두 식의 雙對性(duality)를 검토해 보자.

우선 다음 몇 가지의 記號를 정의해 두자.

$O_m$은 m次의 0 만으로 만들어진 行(column)을 나타내며 0는 0 行, 0 列, 또는 0 行列을 나타내기로 한다. 특히 行과 列을 구별할 必要가 있을 경우에는 T를 사용하여 行을 列로 바꾸며 이 T는 轉置(transposition)을 뜻하기로 한다. 그리고 벡타는 원칙적으로 行벡타를 나타내기로 한다. $I_n$는 n次의 單位行列을 뜻하며 일반적으로 $e_n$는 n次의 1로 이루어진 行벡타(column vector)를 뜻한다.

그러면 식(7)에서 조건식은

$$-(A^1)^T X + e_n V^1 + S^1 = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$
$$-(A^k)^T X + e_n V^k + S^k = 0$$
$$단,\ S^k = (s_1^k, \cdots, s_n^k),\ s_i^k \ge 0\ \forall_{i,k}$$

가 이루어진다.

이 식(9)를 이용하여 식(7)을 行列형태로 표현하면 식(10)이 된다.

$$\text{Max} \begin{bmatrix} O_m^T & & \\ \vdots & I_K & O \\ O_m^T & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V \\ S \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} -(A^1)^T & e_n & O & I_n & O \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ -(A^k)^T & O & e_n & O & I_n \\ e_n^T & O & \cdots & \cdots & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ V \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_n \\ \vdots \\ O_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X \ge 0,\ V \ge 0,\ S \ge 0$$
$$단\ S = (S^1, \cdots, S^k),\ S^k = (S_1^k, S_2^k, \cdots, S_n^k),\ k = 1, \cdots, K.$$

이와 비슷하게 식(8)을 行列형태로 표시하면 식(11)과 같이 된다.

$$\text{Min} \begin{bmatrix} Y^T & O & u^1 \\ & \ddots & \vdots \\ O & Y^T & u^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_n \\ \vdots \\ O_n \\ 1 \end{bmatrix} \cdots\cdots (11)$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} Y^T & & u^1 \\ & \ddots & \vdots \\ & Y^T & u^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(A^1)^T & e_n & O & I_n & O \\ \vdots & & \ddots & & \ddots \\ -(A^k)^T & O & e_n & & I_n \\ e_m^T & O & \cdots & & O \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} O_m^T & & \\ \vdots & I_K & O \\ O_m^T & & \end{bmatrix}$$

편리를 위하여 식 (10) 과 (11)을

$$\text{Max } CZ \quad \cdots\cdots \quad (12)$$

s.t.

$$\bar{A}Z = b$$

$$Z \geqq O,$$

그리고

$$\text{Min } Wb \quad \cdots\cdots \quad (13)$$

s.t.

$$W\bar{A} \geqq C$$

으로 표시하기로 한다. 그러면 이 두식은 多目的 計劃法형태이며 동시에 서로 雙對형태임을 알게 된다. 따라서 식(7)과 (8)도 서로 雙對가 된다.

이것으로써 行列게임이 線型計劃法으로 전환되는 한편 벡타이득게임은 多目的線型計劃法형태로 전환될 수 있음을 알게 된다.

多目的線型計劃法에서는 線型計劃法과 달리 最適解의 값이 唯一個가 아닐 수 있으며 여러개의 解가 나타날 수 있다. 그래서 多目的線型計劃法에서는 이런 解들을 efficient solution 이라고 한다. 벡타이득게임의 解가 唯一個 아닐 수 있듯이 이 게임으로부터 도출된 多目的線型計劃法도 解가 唯一個 아닐 수 있음은 당연하다 하겠다.

그런데 이 식(12)과 (13) 사이는 서로 雙對관계로써 線型計劃法의 雙對관계와 비슷한 성질을 가진다.

**補助定理 2.** 式(7)과 (8)은 $\bar{V}=\bar{U}$를 만족시키는 적어도 하나의 efficient 解 $(\bar{X},\bar{V})$와 $(\bar{Y},\bar{U})$를 가진다. 여기서 $a_{ij}^k>0$, $\forall\, i,j,k$ 라 가정한다.

증명 (12)에서

$$x = (1, 0, \cdots, 0),$$

$$v = (v^1, \cdots, v^k),\ v^k = \underset{j}{\text{Min}}\{a_{ij}^k\} > 0,$$

그리고

$$s_j^k = a_{1j}^k - v^k,\ j = 1, \cdots, n$$

$$k = 1, \cdots, K$$

라고 두면 (x, v, s)는 (12)의 解가 된다. 그래서 식(12)는 우선 可解(feasible)가 된다.

그리고

$$Y = (1, 0, \cdots, 0)$$

$$u^k = \underset{j}{\text{Max}}\{a_{i1}^k\},\ k = 1, 2, \cdots, K$$

라고 두면 이것이 식(13)의 解가 되어 식(13) 역시 可解(feasible)가 된다.

그러면 Iserman (11)에 의해 식 (12)와 (13)은 각각 解 $\bar{Z}, \bar{W}$가 있어

$$C\bar{Z} = \bar{W}b$$

가 성립한다. 즉

$$\begin{pmatrix} O_m^T & & \\ \vdots & I_K & O \\ O_m^T & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{V} \\ \bar{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Y} & O & \bar{u}^1 \\ & \ddots & \vdots \\ O & \bar{Y} & \bar{u}^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O_n \\ \vdots \\ O_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

가 된다.

따라서

$$\bar{V} = \bar{U}$$

단, $\bar{U} = (\bar{u}^1, \cdots, \bar{u}^k)$

가 되며 따라서 $(\bar{X}, \bar{V})$와 $(\bar{Y}, \bar{U})$가 식(7)과 (8)의 efficient 解가 된다. Q.E.D.

**定理 1의 證明**

벡타이득게임 A에서 우선 $a_{ij}^k > 0$, $\forall\, i,j,k$ 라고 가정한다. 그러면 이 A는 서로 雙對인 多目的線型計劃法 식(7)과 (8)로 전환될 수 있으며 補助定理 2에 $\bar{V}=\bar{U}$가 되는 efficient 解인 $(\bar{X}, \bar{V})$와 $(\bar{Y}, \bar{U})$가 존재한다.

그런데 $(\bar{X}, \bar{V})$가 식(7)의 efficient 解이기 때문에 어떠한 x, y 에 대해서도

$$\max_{x} \min_{y} XAY \geq \overline{V}$$

가 성립치 않는다. 그리고 비슷한 方法으로 어떠한 X, Y에 대해서도

$$\min_{Y} \max_{X} XAY \leq \overline{U}$$

는 성립치 않는다. 그리고

$$\overline{X}A\overline{Y} = \overline{V} = \overline{U}$$

가 성립되기 때문에 $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{V})$는 A의 準平衡點이 된다.

다음 $a^k_{ij} < 0$이 되는 경우가 있을 경우를 생각해 보자. 그러면

$$B = (b_{ij})_{(i,j)\in M\times N} \quad , b_{ij}\in R^k \qquad (14)$$

단, $b_{ij}^k = a_{ij}^k + p$,

$$p = \left| \min_{i,j,k} \{a_{ij}^k\} \right| + 1$$

라고 두자.

그러면 $b_{ij}^k > 0$, $\forall_{i,j,k}$가 되기 때문에 이 벡타이득게임 B에 대해서는 準平衡點 $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{V})$를 가진다. 즉

$$\hat{V} = \hat{X}B\hat{Y} = \hat{X}(A+P)\hat{Y} = \hat{X}A\hat{Y} + \hat{X}P\hat{Y}$$
$$= \hat{X}A\hat{Y} + (p, p, \cdots, p), \quad \cdots \qquad (15)$$

단, $P = (p_{ij})_{(i,j)\in M\times N}$,

$$p_{ij} = (\underbrace{p, \cdots, p}_{k})$$

지금

$$\overline{V} = (\overline{v}^1, \cdots, \overline{v}^k), \ \overline{v}^k = \hat{v}^k - p$$

라고 두면 식 (15)로 부터

$$\hat{X}A\hat{Y} = \hat{V},$$

$\max_{X} \min_{Y} XAY \geq \overline{V}$가 어떠한 X, Y 에 대해서도 성립치 않고,

$\min_{Y} \max_{X} XAY \leq \overline{V}$가 어떠한 X, Y 에 대해서도 성립치 않는다.

를 얻을 수 있다.

따라서 $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{V})$가 A의 準平衡點이 된다. Q.E.D.

이 定理 1에 의하면 벡타이득게임은 각 참가자가 각자의 安全水準을 높이게 되면 서로 수렴되는 값 $\overline{V}$를 가지고 이 값에 상응하는 準最適戰略 $X^*$, $Y^*$를 가진다. 즉

$$X^*AY^* = \overline{V}.$$

그리고 이러한 값 $\overline{V}$는 唯一치 않을 수 있으며 그 集合을

$$V = \{V_1, V_2, \cdots, V_k\}$$

라고 두자. 그러면 참가자 1의 準最適戰略集合

$$X = \{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m\}$$

을 가지고 참가자 2는 準最適戰略集合

$$Y = \{Y_1, Y_2, \cdots\cdots, Y_n\}$$

을 가져

$$X_i AY_j = V_k$$

가 된다. 그 對應은 그림 4과 같이 된다.

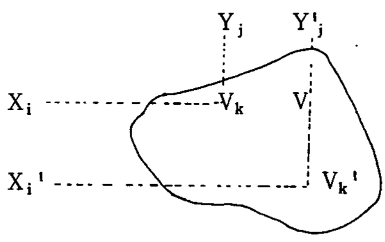


그림 4 準平衡點

그러나 行列게임에 성립되는 可換性은 성립치 않는다. 즉 行列게임에서는

$$X_1AY_1 = X_2AY_2 = V$$

가 되는 참가자 1의 최적전략 $X_1, X_2$ 가 있고 참가자 2가 또한 최적전략 $Y_1, Y_2$ 가 있으면

$$X_1AY_2 = V$$

가 또한 성립된다. 그러나 이러한 성질이 벡타이득게임에서는 성립치 않는다.

## References


1. Aubin, J.P., "Multi-Games and Decentralization in Management", in Multiple Criteria Decision Making. J.L. Cochrane and M. Zeleny, eds. University of South Carolina Press, 1973.
2. Balinski, M.L., An Algorithm for Finding All Vertices of Convex Polyhedral Sets, J. Soc. Indust. Appl. Math., 9, 72-88, 1961.
3. Belenson, S.M. and K.C. Kapur, An Algorithm for Solving Multicriterion Linear Programming Problems with Examples. Opnl. Res. Quart. 24, 65-77, 1973.
4. Blackwell, D., An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoff. Pacific J. Math. 6, 1-8, 1956.
5. Chernoff, H., Rational Selection of Decision Functions, Econometrica, 22, 422-443, 1954.
6. Contini, B.,"A Decision Model under Uncertainty with Multiple Payoffs", In Theory of Games, Techniques and Applications, A. Mensch, ed. Elsevier, N.Y., 1966.
7. Cook, W.D., "Zero-Sum Games with Multiple Goals", Naval Research Logistics Quarterly, 23, 615-621, 1976.
8. Dantzig, G.B., Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, Princeton, 1963.
9. Evans, J.P. and R.E. Steuer, A Revised Simplex Method for Linear Multiple Objective Programms. Math. Prog. 5, 54-72, 1973.
10. Ignizio, J.P., The Determination of a Subset of Efficient Solutions Via Goal

Programming, Compt. Oper. Res. 8, 9-16, 1981.

11. Isermann, H., On Some Relations between a Dual Pair of Multiple Objective Linear Programms. Zeitschrift Opns. Res. 22, 33-41, 1978.

12. Kolnbluth, J.S.H., Duality, Indifferences and Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming. Opnl. Res. Quart. 25, 599-614, 1974.

13. ________________, The Fuzzy Dual: Information for the Multiple Objective Decision-maker. Compt. Oper. Res. 4, 65-77, 1977.

14. Kramer, V., Entscheidungsproblems, Entscheidungskriterien bei Voelliger Ungewissheit und Chernoff-sches Axiomensystem, Metrica, 11, 15-38, 1966.

15. Lee, S.M., Goal Programming for Decision Analysis of Multiple Objectives, Solan Mgt. Rev., 14, 11-24, 1973.

16. Milnor, J., Game Against Nature, in R.M. Thrall, C.H. Coombs, R.L. Davis, eds., Decision Processes, New York, 1957.

17. Park, Soondal, On the Properties of Preorders on the Set of Options Induced by the Guiding Rules, Ph. D. Thesis, University of Cincinnati, 1971.

18. ______________, Quaisi-equilibrium solution in two-person zero-sum game with vector payoff,

19. Philip, J., Algorithms for the Vector Maximization Problem. Math. Prog. 2, 207-229, 1972.

20. Shapley, L.S., "Equilibrium Points in Games with Vector Payoffs", Naval Research Logistics Quarterly, 6, 57-61, 1959.

21. Yu, P.L. and M. Zeleny, The Set of All Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method. J. Math. Anal. Appl. 49, 430-468, 1975.

22. Zeleny, M., A Concept of Compromise Solutions and the Method of the Displace Ideal. Compt. Oper. Res. 1,

479-496, 1974.

23. ___________, Games with Multiple Payoffs. Int. J. Game Theory 4, 179-191, 1975.

24. 박순달, 벡타이득함수를 가진 게임과 다목적선형계획법 한국 OR학회지 제 6권 제 1호, 1981.