<研究論文>

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 6, *No.* 2, *December* 1980

確率制約條件計劃法을 利用한 資本豫算模型

(A New Chance-Constrained Programming Approach to Capital Budgeting)

李 周 浩*

Abstract

This paper deals with the capital budgeting problem of a firm where investments are risky and interrelated.

The established models might be classified into two categories; One is the chance-constrained programming model and the other is the expected utility maximization model. The former has a rather limited objective function and does not consider the risk in direct manner. The latter, on the other hand, might lead to a wrong decision because it uses an approximate value of expected utility.

This paper attempts to extend the applicability of the chance-constrained programming model by modifying its objective function into a more general form.

The capital budgeting problem is formulated as a nonlinear 0-1 integer programming problem first, and is formulated into a linear 0-1 integer programming problem for finding a lower-bound solution of the original problem. The optimal solution of the original problem is then obtained by branch & bound algorithm.

Ⅰ. 序 論

投資案들의 評價에 있어 필수적으로 고려해야 할 要素들은 投資案들에 내포된 危險(risk)과 投資案들간의 相互關係(interrelationship)이다.

1950年代까지는 投資案의 危險을 資本費用이라는 개념으로써 고려하였으나, 1960年代에 들어서 投資案의 純現價의 確率分布를 分析的 方法(Hillier[4])과 컴퓨터 시뮤레이션(Hertz[3])에 의해 유도함으로써 統計學的 分析이 시도되어 왔다.

投資案들간의 相互關係는 實行可能한 投資組合을 일일히 열거하는 方法으로부터 Weingartner [7]에 의해 不等式의 형태로 制約條件에 포함시키는 方法으로 발전하였다.

이와같은 硏究를 土台로 投資案의 危險을 統計學的으로 고려하는 동시에 投資案들간의 相互關係를 制約條件式으로 포함하는 模型들이 개발되었는데, 이는 Byrne 等 [1]의 確率制約條件計劃模型(chance-constrained programming model)과 Hillier[6]의 期待效用極大化模型(expected utility maximization model)이다.

本 硏究는 이들 두 模型이 지닌 問題點을 지적하고 이를 보완한 模型을 제시하고자 한다.

* 現代建設(株)

Ⅱ. 旣存 模型의 問題點

1. 確率制約條件計劃模型

確率制約條件計劃模型에서는 投資組合의 期待純現價의 極大化를 目的函數로 놓고 投資案들에 내포된 危險은 稀少資源, 每年의 資金所要量, 回收期間等에 대한 制約을 確率式의 형태로 부과함으로써 고려한다.

이 模型이 지니는 問題點으로는 다음과 같은 點을 지적할 수 있다.

첫째, 目的函數가 制約的이어서 投資者 性格의 다양성을 고려하지 못한다.

純現價가 對稱分布를 할 경우 平均以上의 實現値를 갖게 될 確率(β)은 0.5이므로 期待純現價의 極大化라는 目的函數는 다음과 같이 바꿔 쓸 수 있다.

Maximize: y

subject to: $P\{W(X)\geq y\}\geq 0.5$

단, X는 모든 元素의 값이 0 또는 1인 行벡터이고 $W(X)$는 X라는 投資決定을 내렸을 경우의 純現價를 나타냄.

그런데 危險에 비교적 민감한 성격의 投資者는 50%의 確率로 달성할 수 있는 純現價의 下限보다 오히려 달성 가능성이 더 높은 下限을 원할 수도 있다. 이러한 投資者에 있어서는 β는 0.5보다 큰 값이 되어야 하는데, 이 模型의 目的函數는 β를 0.5로 고정시키는 결과가 되어 이러한 投資者를 고려할 수 없다.

둘째, 投資組合의 危險을 직접적으로 고려해주는 制約條件이 없다.

이 模型에서 부과한 每年의 資金所要量과 回收期間에 대한 確率制約式은 投資組合의 危險을 간접적으로 고려할 수 있을 뿐이다.

2. 期待效用極大化模型

效用理論에서는 다섯 개의 基本公理로부터 첫째로 效用函數가 單調增加函數(monotone increasing function)이며, 둘째로 危險이 內包된 意思決定에 있어 그 決定基準은 期待效用의 極大化라는 結果를 유도하고 있다[8].

期待效用極大化模型은 이 結果를 도입하여 目的函數를 期待效用의 極大化로 잡고 있다. 즉, 目的函數는 다음과 같이 표시된다.

Maximize: $E\{U[W(X)]\}$

단, $U(w)$는 效用函數

이 模型의 目的函數는 效用理論의 基本公理의 타당성을 인정하는 한 理論的으로는 완벽하다. 그러나 실제 적용단계에서는 다음과 같은 問題點들이 발생한다.

첫째, 效用函數의 유도가 현실적으로 용이하지 않다.

效用函數는 投資決定을 내리기에 앞서 유도되어야 하는데 假想的인 確率게임에 의해 유도된 效用函數가 과연 現實에 적용될 수 있으며 또한 누구의 效用函數가 投資決定에 사용되어야 하는지는 의문의 여지가 많다.

둘째, 期待效用을 近似式에 의해 추정하는 결과로 投資決定이 最適化되지 못할 가능성이 크다.

대부분의 경우 效用函數는 非線型의 복잡한 函數로 추정되기 때문에, 期待效用의 정확한 式을 數學的으로 유도하기 어려운 경우가 많으며 유도할 수 있는 경우에도 式의 형태가 복잡하여 最適解를 구하기 어렵기 때문에 近似式을 사용해야 한다. 그 결과 投資決定이 最適化되지 못할 가능성이 크다.

Ⅲ. 模型의 定立

1. 假定의 設定

Ⅱ節의 旣存 模型의 問題點에 대한 論議로부터 本 硏究에서는 첫째로, β의 값을 0.5와 1 사이에서 投資者가 選擇할 수 있도록 하며 둘째로, 投資組合의 純現價에 대해 다음의 確率制約式을 도입하고자 한다.

$P\{W(X)\leq L_0\}\leq\delta$

단, L_0 : 最大許容 投資損失

δ: 投資者가 원하는 確率水準($0<\delta\leq 0.5$)

이제 模型의 定立에 앞서 다음과 같은 假定을 設定한다.

(i) 모든 投資案에 대해서 채택, 기각의 決定만이 가능하다.[1)]

(ii) 投資案들 相互間에는 競爭效果(competitive effect)나 補償效果(complementary ef-

1) 同一事業일지라도 投資規模가 다를 경우는 別個의 投資案으로 해석하면 制約的인 假定이 아님.

fect)가 존재하지 않는다.[2)]

(iii) 各 投資案의 初期投資支出은 서로 (pairwise) 독립적이다.

(iv) 各 投資案의 純現價는 正規分布를 따른다.[3)]

2. 模型의 定立

2.1. 目的函數

Ⅱ節에서 論議된 바와 같이 本 硏究에서는 投資의 目的이 投資者가 원하는 일정한 確率水準 β로 달성할 수 있는 純現價의 下限 y를 極大化함에 있다고 본다. 즉 目的函數는 다음과 같은 형태로 표시된다.

Maximize: y ……………………………(1)

2.2. 制約條件

2.2.1. 目的函數의 定義에 따른 制約

目的函數의 定義로부터 y는 다음의 關係를 만족시켜야 한다.

$$P\{W(X)\geq y\}\geq\beta \quad \cdots\cdots(2)$$

그런데,

$$P\{W(X)\geq y\}=P\left\{Z\geq \frac{y-\mu(X)}{\sigma(X)}\right\}$$

단, Z는 $N(0,\ 1)$을 따르고 $\mu(X)$, $\sigma^2(X)$는 $W(X)$의 平均 및 分散.

이므로 z_β를 $P\{Z\leq z_\beta\}=\beta$로 定義할 때 (2)式은 다음과 같이 確定的 형태로 고쳐 쓸 수 있다

$$\mu(X)-z_\beta\sigma(X)-y\geq 0 \quad \cdots\cdots(3)$$

한편 m번째 投資案의 純現價의 平均과 分散을 각각 μ_m, $\sigma_m{}^2$라 하고 m번째와 n번째 投資案의 純現價들간의 共分散을 σ_{mn}, 分析對象 投資案의 數를 P라 하면 다음 關係가 성립하므로

$$\mu(X)=\sum_{m=1}^{P}\mu_m x_m$$

$$\sigma^2(X)=\sum_{m=1}^{P}(\sigma_m{}^2+\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{P}\sigma_{mn}x_n)x_m$$

(3)式은 결국 다음과 같이 표시된다.

$$\sum_{m=1}^{P}\mu_m x_m-z_\beta\Big[\sum_{m=1}^{P}\sigma_m{}^2+\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{P}(\sigma_{mn}x_n)x_m\Big]^{\frac{1}{2}}-y\geq 0 \quad (4)$$

2.2.2. 最大許容 投資損失에 대한 制約

純現價가 最大許容 投資損失 L_0이하일 確率이 投資者가 원하는 수준 δ보다 큰 投資組合은 고려대상에서 제외한다, 즉,

$$P\{W(X)\leq L_0\}\leq\delta \quad \cdots\cdots(5)$$

(5)式은 다음과 같이 確定的 형태로 고쳐 쓸 수 있다.

$$\sum_{m=1}^{P}\mu_m x_m-z_{1-\delta}\Big[\sum_{m=1}^{P}\Big(\sigma_m^2+\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{P}\sigma_{mn}x_n\Big)x_m\Big]^{\frac{1}{2}}\geq L_0 \cdots(6)$$

2.2.3. 投資總額에 대한 制約

初期投資總額이 調達可能資本 D이하일 確率이 投資者가 원하는 수준 α이상이어야 한다. m번째 投資案의 初期投資支出額을 $B_m(B_m<0)$이라 하면 이는 다음 式으로 표시할 수 있다.

$$P\Big\{-\sum_{m=1}^{P}B_m x_m\leq D\Big\}\geq\alpha \quad \cdots\cdots(7)$$

여기서 B_m과 D의 平均을 각각 $\mu(B_m)$, $\mu(D)$, 分散을 각각 $\sigma^2(B_m)$, $\sigma^2(D)$라 하면 (7)式은 다음과 같이 確定的 형태로 고쳐 쓸 수 있다.

$$-\sum_{m=1}^{P}\mu(B_m)x_m+z_\alpha\Big[\sum_{m=1}^{P}\sigma^2(B_m)x_m+\sigma^2(D)\Big]^{\frac{1}{2}}\leq \mu(D) \quad \cdots\cdots(8)$$

2.2.4. 投資案간의 相互關係에 대한 制約

① 排他的 關係

모든 分析對象投資案들을 각 集合내의 投資案들이 서로 排他的이 되도록 K개의 部分集合으로 분류할 때(단, 排他的 關係가 없는 投資案들은 분류대상에서 제외), 각 集合내의 投資案들간의 排他的 關係는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\sum_{j\in J_k}x_j\leq 1,\ k=1,\ 2,\cdots,K \quad \cdots\cdots(9)$$

단, J_k는 k번째 部分集合에 속하는 投資案들의 番號集合(index set).

② 依存的 關係

排他的 關係에 있지 않은 投資案의 數를 I개라 하고 R_k를 다음과 같이 定義하면,

$$R_k=\begin{cases}J_k, & k=1,2,\cdots,K\\ \{j_i\}, & k=K+1,\cdots,K+I,\ i=1,2,\cdots I\end{cases}$$

단, j_i는 排他的 關係에 있지 않은 投資案들

---

2) 두개 이상의 投資案에 동시에 投資할 때의 純現價가 각 投資案의 純現價의 合보다 클 경우 投資案들간에 補償效果가 존재한다고 하며, 작을 경우 競爭效果가 존재한다고 하는데, Hillier[6]는 이 假定을 제외하였음.

3) 일반적으로 各 投資案의 純現價가 正規分布를 따르지 않더라도 中心極限定理를 이용하여 $W(X)$가 近似的으로 正規分布를 따름을 說明할 수 있음. 자세한 것은 [6]을 參照.

의 番號

番號集合 R_i에 속하는 投資案들 중 어느 하나가 채택되어야만 R_h에 속하는 投資案들중 하나를 채택할 수 있는 關係는 다음 式으로 표시할 수 있다.

$\sum_{r \in R_h} x_r - \sum_{s \in R_i} x_s \leq 0$, h, i는 $1 \leq h, i \leq K+I$인 서로 다른 정수 ……………………………………(10)

3. 問題의 變形

Ⅲ—2節에서 定立한 模型은 일종의 非線型計劃問題로서 意思決定變數들이 連續型變數라면 二次型計劃問題(quadratic programming problem)로 變形하여 最適解를 구할 수 있으나, 意思決定變數들이 모두 0 또는 1의 값만을 취하는 離散型變數이므로 最適解를 구하기 위해서는 다른 演算法이 필요하다. 本 硏究에서는 먼저 制約條件들을 二次式으로 變形한 후, 이들의 線型上限을 구하여 線型整數計劃問題化하고, 그 最適解를 最初實行可能解로 하여 branch & bound 技法에 의해 原問題의 最適解를 구하는 演算法을 適用하기로 한다.[4)]

3.1. 二次式으로의 變形

(6)式에서 $\delta \leq 0.5$일 때,

$$\sum_{m=1}^{P} \mu_m x_m - L_0 \geq z_{1-\delta} \left[\sum_{m=1}^{P} \left(\sigma_m^2 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{P} \sigma_{mn} x_n \right) x_m \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

이므로 이 不等式의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{m=1}^{P} (z_{1-\delta}\sigma_m{}^2 - \mu_m{}^2 + 2L_0\mu_m) x_m + \sum_{m=1}^{P} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{P} (z_{1-\delta}^2 \sigma_{mn} - \mu_m \mu_n) x_m x_n \leq L_0^2$$

여기서 C_{1m}, a_{1mn}을 각각 다음과 같이 定義하면,

$$C_{1m} \equiv z_{1-\delta}^2 \sigma_m^2 - \mu_m^2 + 2L_0\mu_m$$

$$a_{1mn} \equiv z_{1-\delta}^2 \sigma_{mn} - \mu_m \mu_n$$

(6)式은 다음의 두 不等式과 동일하다.

$$\sum_{m=1}^{P} \mu_m x_m \geq L_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

$$\sum_{m=1}^{P} C_{1m} x_m + \sum_{m=1}^{P} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{P} a_{1mn} x_m x_n \leq L_0{}^2 \quad \cdots\cdots\cdots (12)$$

4) 여기서 使用된 演算法은 Hillier[6]의 演算法을 本 模型에 적합하도록 수정한 것임.

같은 방법으로 $\alpha \geq 0.5$일 때 (8)式을 다음과 같이 變形할 수 있다.

$$-\sum_{m=1}^{P} \mu(B_m) x_m \leq \mu(D) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

$$\sum_{m=1}^{P} C_{2m} x_m + \sum_{m=1}^{P} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{P} a_{2mn} x_m x_n \leq \mu^2(D) - z_\alpha^2 \sigma^2(D)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

단, $C_{2m} \equiv z_\alpha^2 \sigma^2(B_m) - \mu^2(B_m) - 2\mu(D)\mu(B_m)$

$a_{2mn} \equiv -\mu(B_m)\mu(B_n)$

3.2. 一次式으로의 變形

二次式으로 變形된 制約條件들의 線型上限을 구하기 위해 Hillier[5]에 의해 증명된 다음의 定理들을 인용하기로 한다.

〈定理 1〉 $a_1, a_2, \cdots, a_P, b$가 確率變數이고 $\sum_{m=1}^{P} x_m \leq P_1 \leq P$일 때, J_1을 $(P-P_1)$개의 가장 작은 $\sigma_m{}^2 (m=1, 2, \cdots, P)$에 대응되는 m의 番號集合이라 定義하면(단, $\sigma_m{}^2 \equiv \mathrm{Var}(a_m)$, $\sigma_b{}^2 \equiv \mathrm{Var}(b)$, $\sigma \equiv \sum_{m=1}^{P} \sigma_m^2 + \sigma_b^2)$)

i) $\left(\sum_{m=1}^{P} \sigma_m^2 x_m + \sigma_b^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq R(X) - C$

단, $R(X) \equiv \sigma - \sum_{m=1}^{P} [\sigma - (\sigma^2 - \sigma_m^2)^{\frac{1}{2}}](1 - x_m)$

$$C \equiv \sigma - \sum_{m \in J_1} [\sigma - (\sigma^2 - \sigma_m{}^2)^{\frac{1}{2}}] - (\sigma^2 - \sum_{m \in J_1} \sigma_m^2)^{\frac{1}{2}}$$

ii) $\sigma_b + \sum_{m=1}^{P} [v^{\frac{1}{2}} - (v - \sigma_m^2)^{\frac{1}{2}}] = \sigma$

를 만족시키는 $\sigma_b{}^2 + \max_{m \in J} \sigma_m{}^2 \leq v \leq \sigma^2$인 實數 v가 항상 유일하게 존재한다.

(단, $J = \{1, 2, \cdots, P\}$)

iii) $\left(\sum_{m=1}^{P} \sigma_m^2 x_m + \sigma_b^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \sum_{m=1}^{P} [v^{\frac{1}{2}} - (v - \sigma_m^2)^{\frac{1}{2}}] x_m + \sigma_b$

〈定理 2〉 $0 \leq P_0 \leq \sum_{m=1}^{P} x_m \leq P_1 \leq P$일 때,

$d_{mn} \equiv z_\tau^2 \sigma_{mn} - \mu_m \mu_n$, $(0.5 \leq \tau \leq 1)$

$\mu_m \equiv E(a_m)$

$\sigma_{mn} \equiv \mathrm{Cov}(a_m, a_n)$

$\{d_{m(1)}, d_{m(2)}, \cdots, d_{m(P-1)}\}$: $\{d_{m1}, d_{m2}, \cdots, d_{m,m-1}, d_{m,m+1}, \cdots, d_{mP}\}$의 $d_{m(1)} \geq d_{m(2)} \geq \cdots, \geq d_{m(P-1)}$인 順列

로 定義하면,

i) $\sum_{m=1}^{P}\sum_{n=1}^{P} d_{mn}x_m x_n \leq \sum_{m=1}^{P} r_m x_m$

단, $r_m \equiv \sum_{n=1}^{P_0-1} d_{m(n)} + \sum_{n=P_0}^{P_1-1} \max\{d_{m(n)},\ 0\}$

ii) $\sum_{m=1}^{P}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{P} d_{mn}x_m x_n \geq \sum_{m=1}^{P} q_m x_m$

단, $q_m \equiv \sum_{m=1}^{P_0-1} d_{m(P-n)} + \sum_{n=P_0}^{P_1-1} \min\{d_{m(P-n)},\ 0\}$

以上의 〈定理 1〉, 〈定理 2〉를 이용하여 制約條件들의 線型上限을 구할 수 있다. 먼저 (8)式의 둘째 項의 上限은

$\sum_{m=1}^{P} x_m \leq P_1 \leq P$ 일 때 〈定理 1〉의 i)로부터 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\left[\sum_{m=1}^{P}\sigma^2(B_m)x_m + \sigma^2(D)\right]^{\frac{1}{2}} \leq f(X) - \theta \cdots\cdots (15)$$

단, $f(X) \equiv \sigma - \sum_{m=1}^{P}\{\sigma - [\sigma^2 - \sigma^2(B_m)]^{\frac{1}{2}}\}(1 - x_m)$

$\sigma^2 \equiv \sum_{m=1}^{P}\sigma^2(B_m) + \sigma^2(D)$

$\theta \equiv \sigma - \sum_{m\in M}\{\sigma - [\sigma^2 - \sigma^2(B_m)]^{\frac{1}{2}}\} - [\sigma^2 - \sum_{m\in M}\sigma^2(B_m)]^{\frac{1}{2}}$

M: $(P-P_1)$개의 가장 작은 $\sigma^2(B_m)$ $(m=1, 2, \cdots, P)$에 대응되는 m의 番號集合

또한 (12)式의 둘째 項의 上限은 〈定理 2〉의 i)로부터 $0 \leq P_0 \leq \sum_{m=1}^{P} x_m \leq P_1 \leq P$ 일 때 다음과 같다.

$$\sum_{m=1}^{P}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{P} a_{1mn}x_m x_n \leq \sum_{m=1}^{P} r_m x_m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

단, $r_m \equiv \sum_{n=1}^{P_0-1} a_{1m(n)} + \sum_{n=P_0}^{P_1-1} \max\{a_{1m(n)},\ 0\}$

$\{a_{1m(1)},\ a_{1m(2)}, \cdots, a_{1m(P-1)}\}$: $\{a_{1m1},\ a_{1m2}, \cdots, a_{1,m,m-1},\ a_{1,m,m+1}, \cdots, a_{1mP}\}$를 큰 순서로 배열한 順列

끝으로 (4)式의 둘째 項의 上, 下限을 구해야 하는데, 이를 위해 먼저 $\sum_{m=1}^{P}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{P} \sigma_{mn}\ x_m x_n$ 의 上, 下限을 구하면 $0 \leq P_0 \leq \sum_{m=1}^{P} x_m \leq P_1 \leq P$ 일 때 〈定理 2〉의 i), ii)에 의해 다음과 같이 된다.

$$\sum_{m=1}^{P}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{P} \sigma_{mn}x_m x_n \leq \sum_{m=1}^{P} v_m x_m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$\sum_{m=1}^{P}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{P} \sigma_{mn}x_m x_n \geq \sum_{m=1}^{P} w_m x_m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

단, $v_m \equiv \sum_{n=1}^{P_0-1} \sigma_{m(n)} + \sum_{n=P_0}^{P_1-1} \max\{\sigma_{m(n)},\ 0\}$

$w_m \equiv \sum_{n=1}^{P_0-1} \sigma_{m(P-n)} + \sum_{n=P_0}^{P_1-1} \min\{\sigma_{m(P-n)},\ 0\}$

$\{\sigma_{m(1)},\ \sigma_{m(2)}, \cdots, \sigma_{m(P-1)}\}$: $\{\sigma_{m1},\ \sigma_{m2}, \cdots, \sigma_{m,m-1},\ \sigma_{m,m+1}, \cdots, \sigma_{mP}\}$를 큰 순서로 배열한順列

따라서 (4)式과 (17)式으로부터

$$\sum_{m=1}^{P}(\sigma_m^2 + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{P}\sigma_{mn}x_n)x_m \leq \sum_{m=1}^{P}(\sigma_m^2 + v_m)x_m$$

이므로, $\sigma_m^2 + v_m \geq 0$ $(m=1, 2, \cdots, P)$라고 假定하고

$b_m^2 \equiv \sigma_m^2 + v_m,\ m=1, 2, \cdots, P$

$b^2 \equiv \sum_{m=1}^{P} b_m^2$

로 定義하면 다음 關係가 성립한다.

$$\left[\sum_{m=1}^{P}\sigma_m^2 + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{P}\sigma_{mn}x_n)x_m\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{m=1}^{P} b_m^2 x_m\right)^{\frac{1}{2}}$$

여기서 다시 〈定理 1〉의 i)을 이용하면 다음 결과를 얻게 된다.

$$\left[\sum_{m=1}^{P}(\sigma_m^2 + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{P}\sigma_{mn}x_n)x_m\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{m=1}^{P} b_m^2 x_m\right)^{\frac{1}{2}} \leq h(X) - \phi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

단, $h(X) \equiv b - \sum_{m=1}^{P}\left[b - (b^2 - b_m^2)^{\frac{1}{2}}\right](1 - x_m)$

$\phi \equiv b - \sum_{m\in S}[b - (b^2 - b_m^2)^{\frac{1}{2}}] - (b^2 - \sum_{m\in S} b_m^2)^{\frac{1}{2}}$

S: $(P-P_1)$개의 가장 작은 b_m^2 $(m=1, 2, \cdots, P)$에 대응되는 m의 番號集合

같은 방법으로 $\sigma_m^2 + w_m \geq 0$ $(m=1, 2, \cdots, P)$라는 假定下에 〈定理 1〉, 〈定理 2〉를 이용하여 다음 결과를 유도할 수 있다.

$$\left[\sum_{m=1}^{P}(\sigma_m^2 + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{P}\sigma_{mn}x_n)x_m\right]^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{m=1}^{P} C_m^2 x_m\right)^{\frac{1}{2}} \geq r(X, u) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

단, $C_m^2 \equiv \sigma_m^2 + w_m$

$C^2 \equiv \sum_{m=1}^{P} C_m^2$

$$r(X,u)\equiv\sum_{m=1}^{P}[u^{\frac{1}{2}}-(u-C_m^2)^{\frac{1}{2}}]x_m$$

u: $\sum_{m=1}^{P}[u^{\frac{1}{2}}-(u-C_m^2)^{\frac{1}{2}}]=C$ 를 만족시키는 實根

한편 (4)式을 制約條件에서 제외시키고 目的函數를 다음과 같이 바꾸어도 最適解는 不變이므로

$$\text{Maximize: } F(X)=\sum_{m=1}^{P}\mu_m x_m-z_\beta\Big[\sum_{m=1}^{P}\Big(\sigma_m^2+\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{P}\sigma_{mn}x_n\Big)x_m\Big]^{\frac{1}{2}}$$

線型整數計劃問題의 目的函數 역시 (4)式과 (19)式으로부터 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다

$$\text{Maximize: } \sum_{m=1}^{P}h_m x_m-S$$

단, $h_m\equiv\mu_m-z_\beta[b-(b^2-b_m^2)^{\frac{1}{2}}]$

$S\equiv z_\beta\{(b^2-\sum_{m\in S}b_m^2)^{\frac{1}{2}}-\sum_{m\in S}[b-(b^2-b_m^2)^{\frac{1}{2}}]\}$

以上의 결과로부터 〈原問題〉와 〈派生問題〉를 요약해 나타내면 다음과 같다.

〈原問題〉

$$\text{Maximize: } F(X)=\sum_{m=1}^{P}\mu_m x_m-z_\beta\Big[\sum_{m=1}^{P}\Big(\sigma_m^2+\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{P}\sigma_{mn}x_n\Big)x_m\Big]^{\frac{1}{2}}$$

Subject to: $\sum_{j\in J_k}x_j\leq 1,\ \ k=1,2,\cdots K$

$\sum_{r\in R_h}x_r-\sum_{s\in R_i}x_s\leq 0$, h ,i는 $1\leq h,i\leq K+I$ 인 서로 다른 정수

$-\sum_{m=1}^{P}\mu(B_m)x_m\leq\mu(D)$

$-\sum_{m=1}^{P}\mu_m x_m\leq -L_0$

$\sum_{m=1}^{P}C_{1m}x_m+\sum_{m=1}^{P}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{P}a_{1mn}x_m x_n\leq L_0^2$

$\sum_{m=1}^{P}C_{2m}x_m+\sum_{m=1}^{P}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{P}a_{2mn}x_m x_n\leq\mu^2(D)-z_\alpha{}^2\sigma^2(D)$

x_m은 0 또는 1

〈派生問題〉

$$\text{Maximize: } \sum_{m=1}^{P}h_m x_m-S$$

Subject to: $\sum_{j\in J_k}x_j\leq 1,\ \ k=1,2,\cdots,K$

$\sum_{r\in R_h}x_r-\sum_{s\in R_i}x_s\leq 0$, h,i는 $1\leq h,i\leq K+I$인 서로 다른 정수

$-\sum_{m=1}^{P}\mu_m x_m\leq -L_0$

$\sum_{m=1}^{P}i_m x_m\leq\gamma$

$\sum_{m=1}^{P}k_m x_m\leq L_0^2$

x_m은 0 또는 1

단, $i_m\equiv-\mu(B_m)+z_\alpha\{\sigma-[\sigma^2-\sigma^2(B_m)]^{\frac{1}{2}}\}$

$k_m\equiv C_{1m}+r_m$

$r\equiv z_\alpha\Big[\sum_{m\in M}\{\sigma-[\sigma^2-\sigma^2(B_m)]^{\frac{1}{2}}\}-[\sigma^2-\sum_{m\in M}\sigma^2(B_m)]^{\frac{1}{2}}\Big]+\mu(D)$

4. 解法節次

〈原問題〉의 最適解를 구하기 위해서는 먼저 〈派生問題〉의 最適解를 구해야 하는데, 〈派生問題〉는 〈原問題〉보다 實行可能領域이 축소된 整數計劃問題로서 그 最適解는 〈原問題〉의 最適解에 대한 下限의 역할을 한다. 이 節에서는 구하여 진 〈派生問題〉의 最適解로부터 〈原問題〉의 最適解를 찾는 節次를 살펴 보기로 한다.

(20)式으로부터 다음 關係가 성립하므로,

$$F(X)\leq\sum_{m=1}^{P}\mu_m x_m-z_\beta r(X,u)$$
$$=\sum_{m=1}^{P}\{\mu_m-z_\beta[u^{\frac{1}{2}}-(u-C_m^2)^{\frac{1}{2}}]\}x_m$$
$$\equiv G(X)$$

X의 實行可能領域을 V라 할 때 다음 關係가 성립한다.

$G(X)\geq F(X)$, $X\in V$인 모든 X ………(21)

이제 다음과 같이 記號를 定義하면,

$K_0\equiv\{m|x_m=0\}$

$K_1\equiv\{m|x_m=1\}$

$K_N\equiv\{1,2,\cdots,P\}-K_0\cup K_1$

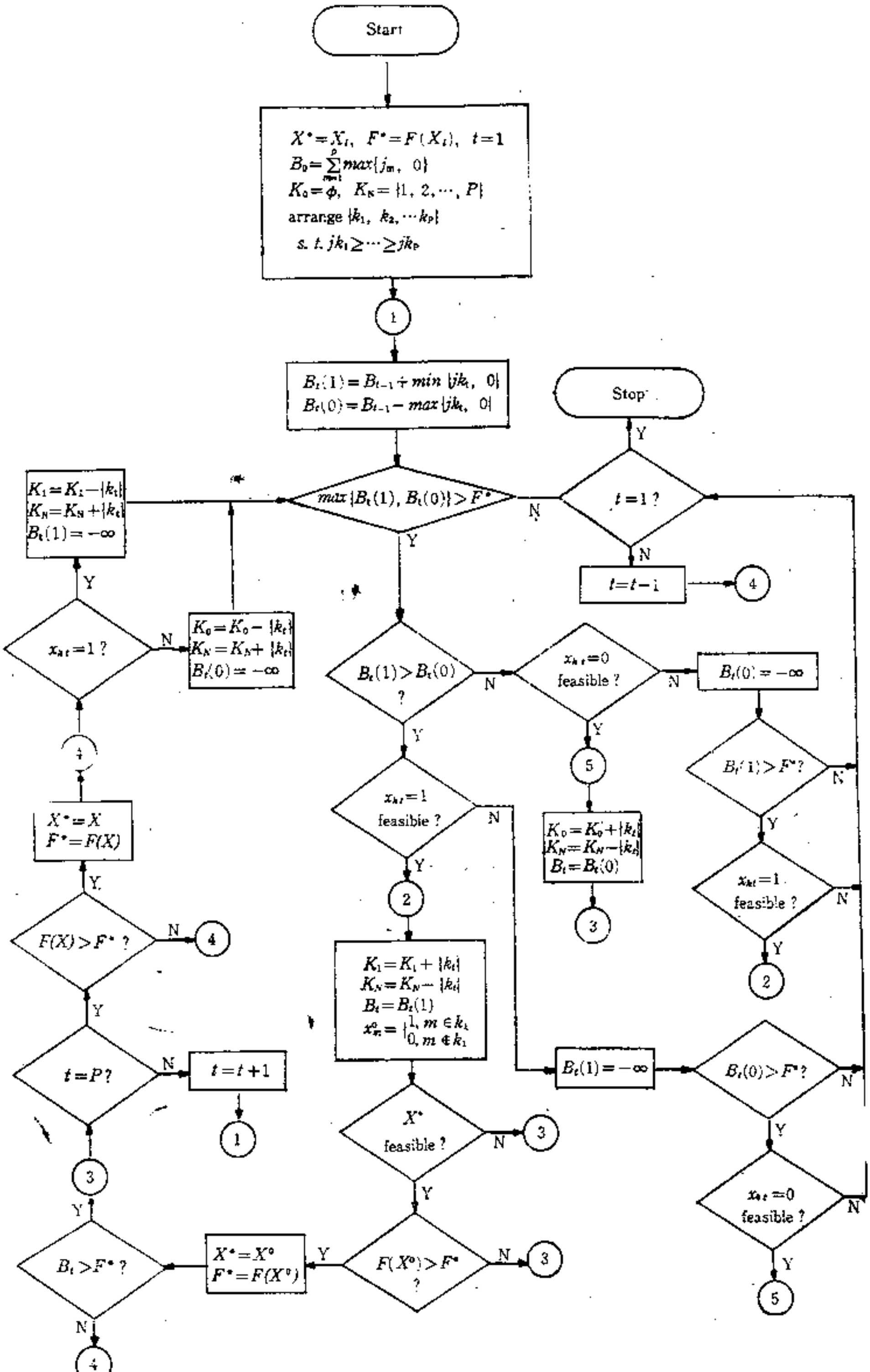
$U\equiv\{X|x_m=0 \text{ if } m\in K_0,\ x_m=1 \text{ if } m\in K_1\}$

$j_m\equiv\mu_m-z_\beta[u^{\frac{1}{2}}-(u-C_m^2)^{\frac{1}{2}},m=1,2,\cdots,P$

$B(K_0,K_1,\ K_N)\equiv\sum_{m\in K_1}j_m+\sum_{m\in K_N}\max\{j_m,\ 0\}$

$B(K_0,K_1,\ K_N)\geq G(X)$, $X\in U$인 모든 X (22)

이 되고 (21), (22)式으로부터 다음 關係가 성



<그림-1> 解法節次의 流通圖

립한다.

$B(K_0,\ K_1,\ K_N)\geq G(X)\geq F(X),\ \ X\in U\cap V$인 모든 X ....(23)

이 關係式으로부터 $B(K_0,K_1,K_N)$이 $\max_{X\in V}F(X)$의 현재까지 알려진 下限値보다 작은 U는 고려

대상에서 제외해도 무관함을 알 수 있다.

한편 $k \in K_N$인 X_k에 0 또는 1의 값을 할당했을 경우, $G(X)$의 上限値는 다음과 같이 표시된다.

$$B(K_0,\ K_1 \cup \{k\},\ K_N - \{k\})$$
$$= \sum_{m \in K_1 \cup \{k\}} j_m + \sum_{m \in K_N - \{k\}} \max\{j_m,\ 0\}$$
$$= \sum_{m \in K_1} j_m + j_k + \sum_{m \in K_N} \max\{j_m,\ 0\} - \max\{j_k,\ 0\}$$
$$= \sum_{m \in K_1} j_m + \sum_{m \in K_N} \max\{j_m,\ 0\} + \min\{j_k,\ 0\}$$
$$= B(K_0,\ K_1,\ K_N) + \min\{j_k,\ 0\}$$
$$B(K_0 \cup \{k\},\ K_1,\ K_N - \{k\})$$
$$= \sum_{m \in K_1} j_m + \sum_{m \in K_N - \{k\}} \max\{j_m,\ 0\}$$
$$= \sum_{m \in K_1} j_m + \sum_{m \in K_N} \max\{j_m,\ 0\} - \max\{j_k, 0\}$$
$$= B(K_0,\ K_1,\ K_N) - \max\{j_k,\ 0\}$$

以上의 결과를 이용하여 解法節次를 流通圖(flow chart)로 표시하면 〈그림-1〉과 같다.

Ⅳ. 結 論

投資決定에 關해서는 現在까지 많은 硏究가 이루어져 왔으나, 아직도 理論과 現實間에는 상당한 間隔이 있다고 思料된다. 따라서, 現實의 投資決定問題의 解決에 寄與할 수 있는 理論의 發展이 切實히 要請된다고 하겠다.

本 硏究는 이러한 觀點에서 旣存의 模型을 가급적 現實에 접근시키려는 試圖로서, 現實的으로 유도가 어려운 效用函數의 도입을 前提로 하지 않는 確率制約條件計劃模型을 보다 一般的인 形態로 수정, 보완하였다.

本 硏究의 模型이 보다 現實과 가까운 것이 되기 위해서는 다음과 같은 點에서의 보완이 요청된다 하겠다.

첫째, 本硏究는 投資案들간의 補償效果나 競爭效果를 고려하지 않았으나 現實的으로는 이들 效果가 존재할 수 있으므로 이를 고려해 줌이 바람직할 것이다.

둘째, 本 硏究의 解法節次는 假設 例에 적용시킨 결과 비교적 짧은 시간내에 最適解를 발견하였으나 소요시간을 보다 단축시키기 위한 追加的 硏究가 요청된다고 하겠다.

參考文獻

[1] Byrne, R.F., Charnes, A., Cooper, W.W., and Kortanek, K.O., "A Chance-Constrained Programming Approach to Capital Budgeting with Portfolio Type Payback and Liquidity Constraints and Horizon Posture Controls," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. Ⅱ, pp. 339—364, 1967.

[2] Byrne, R.F., Cooper, W.W., Charnes, A., Davis, O.A., and Gilford, D.A., *Studies in Budgeting*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1971.

[3] Hertz, D.B., "Risk Analysis in Capital Investment," *Harvard Business Review*, January-February, pp. 95—106, 1964.

[4] Hillier, F.S., "The Derivation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments," *Management Science*, Vol.9, No. 3, pp. 443—457, 1963.

[5] Hillier, F.S., "Chance-Constrained Programming with 0-1 or Bounded Continuous Decision Variables," *Management Science*, Vol. 14, No. 1, pp. 34—57, 1967.

[6] Hillier, F.S., *The Evaluation of Risky Interrelated Investments*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1969.

[7] Weingartner, H.M., *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

[8] Decision Analysis Group, *Readings in Decision Analysis*, 2nd ed., Stanford Research Institute, Menlo Park, California, 1977.

要 約

本 研究는 投資案들간의 相互關係 및 危險을 고려한 資本豫算問題를 다루고 있다.

旣存의 開發된 模型은 確率制約條件計劃模型 및 期待效用極大化模型의 두 範疇로 區分될 수 있다 전자의 경우 目的函數가 다소 制約的이며 危險을 직접적인 형태로 고려하지 않고 있는 반면에 후자는 期待效用에 대한 近似値를 사용하기 때문에 投資決定이 最適化되지 못할 가능성이 있다.

本 研究는 目的函數를 보다 一般的인 형태로 修正·補完함으로써 現實適用性을 높이고자 하였다.

解法節次로는, 資本豫算問題를 우선 非線型 0—1 整數計劃 문제로 定式化하고, 이를 線型 0—1 整數計劃문제로 變形하여 原問題의 下限을 찾은 후 B&B 演算法으로 原問題의 最適解를 구하고 있다.