韓國數學敎育學會誌 <數學敎育>
1980. 12. Vol. XIX No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Dec. 1980. Vol. XIX No. 1

Vector 硏究와 그의 應用

李 貴 述

(一) 序 論

오늘날 文明의 發達과 더불어 數學의 功獻이 날로 增大하여 감에따라 自然科學과 人文科學 및 敎育의 모든 分野에서 數學敎育이 더욱 重要하게 되어가고 있다. 이와같은 추세는 數學의 內容을 새롭고 現代科學에 適用될 수 있게 改編되어져야 하게 되었다.

여기서는 基礎的인 Vector의 硏究를 비롯하여 이 立體解析幾何에의 適用을 硏究하여 科學을 發展시킴으로써 祖國近代化에 一助가 되고저 한다.

從來는 Vector가 物理學者에 依하여 物理學과 더불어 發達하였기 때문에 二次大戰前까지만 해도 物理學者들에 依하여 힘의 合成이라든가 速度를 다루기 爲하여 硏究되어 왔을뿐 數學의 分野로는 생각되지 않았었다.

이러던것이 終戰後 數學의 分野로서 重要視된 契機中의 하나는 有名한 Einstein(1879~1955)이 相對性 理論硏究에 Vector의 擴張인 Tensor를 使用하기 始作한 것과, 다른 하나는 線型代數로서 Vector가 重要한 役割을 한데서부터이며, 이른바 數學敎育 現代化물결에 따라서 高等學校의 敎科課程에도 Vector가 들어오게 된 것이다.

Vector는 代數分野에서 뿐만 아니라 現代數學 全般에 걸쳐서 널리 使用되는 基礎槪念으로서 그의 應用面에 있어서도 自然科學은 勿論이고, 人文科學, 社會科學等에서도 取扱되어 그의 應用範圍가 廣範하게되어 Vector의 硏究는 그 意義가 크다고 본다.

(二) 本 論

(1) Vector의 導入

Vector는 行列에서의 行 Vector나 列 Vector로 定義할 수 있다. 그러나 傳統的인 Vector의 定義는 物理에서 變位, 速度, 힘과 같은 크기와 方向을 갖는 量을 나타내기 爲한 方法으로 導入된 槪念으로, 變位 Vector, 幾何 Vector 等으로 불리어 지고 있다. 이러한 幾何 Vector는 平面이나 空間에서만 使用할 수 있기 때문에 그 以上의 擴張이 困難하다.

따라서 幾何的인 表現보다 代數的인 表現이 必要하기 때문에 數의 配列로 定義된 行 Vector나 列 Vector와 같은 數 Vector를 使用하면 平面이나 空間과 같은 二次元이나 三次元보다도 次元높은 n次元空間까지 擴張할 수 있고 代數的인 연산의 便利性을 많이 利用할 수가 있다. 그러나 이러한 Vector를 統合하여 包括的으로 代數的 構造를 通하여 보려면 Vector 空間의 定義가 必要하게 된다. 結局 Vector를 導入하려면 대충 다음의 세가지가 있다.

㉠ 幾何 Vector

㉡ 數 Vector

㉢ Vector 空間의 元素로서의 Vector

이 中에 어느 方法이 便利하고 理解하기 쉬운가 하는 것은 아직은 硏究課題로 되어 있으나

지금까지는 大部分이 直觀的으로 理解를 돕는 ㉠의 幾何 Vector로 Vector를 導入하는 方法으로 基礎過程에서 많이 使用되고 있으나 漸次的으로 ㉡의 數 Vector의 導入을 使用하는 傾向이 많아지고 있으며 Vector를 擴張해 나가는데 있어서 Vector의 成分을 가지고 說明하는 경향이 높아지고 있다.

㉢의 方法은 定義가 若干 複雜하여 高等數學에서 이 方法을 主로 使用하는 경향이고 보니 本 硏究者는 ㉡의 數 Vector에 置重하여 說明해 나가고저한다.

(2) Vector의 演算

平面上의 幾何 Vector에 代數的인 表現을 使用하기 위하여 平面에 直交座標를 導入하여 原點에 幾何 Vector의 始點을 두면 終點에 한 點이 對應하고 두 實數로 된 한쌍의 座標가 決定된다. 逆으로 두 實數로 된 座標가 주어지면 그 點을 終點으로 갖는 位置 Vector가 決定된다. 곧 平面의 點에는 座標와 位置 Vector가 1對 1로 對應하게 된다.

따라서 幾何 Vector $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$에는 A點의 좌표 (a_1, a_2)를 對應시킬 수 있기 때문에 Vector $\overrightarrow{OA}$를 Vector(a_1, a_2)로 나타낼 수 있다. 이것은 空間인 경우도 마찬가지로 空間의 幾何 Vector $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$에서 A點의 座標$(a_1, a_2, a_3)$가 對應된다. 結局 Vector는 (a_1, a_2)나 (a_1, a_2, a_3)와 같이 數의 配列, 다시 말하면 $1\times n$行列인 行 Vector로 나타낼 수 있다. 이것을 좀더 正確하게 말하면 다음과 같다.

n個의[1] 數 $a_1, a_2, \ldots, a_n$을 한줄로 配列한 $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 을 n次 Vector라고 한다. $a_1, a_2, \ldots, a_n$을 各各 제一성분, 제二성분, ……, 제 n 성분이라하고 數 $a_1, a_2, \ldots, a_n$을 scalar라고 한다.

以上의 定義를 使用하여 Vector의 연산을 說明하고저 한다.

두 Vector $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, \ldots b_n)$에 있어서 $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, ……, $a_n=b_n$이면 $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 같다고 하여 $\vec{a}=\vec{b}$를 쓴다.

幾何 Vector에서는 크기와 方向이 같으면 두 Vector는 서로 같다고 하듯이 두 Vector의 대응하는 성분내용이 같을때 相等이다.

特히 $\vec{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$에 對하여 逆 Vector $-\vec{a}=(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$으로 나타내고 $|\vec{a}|=|-\vec{a}|$ 있고 $\vec{a}=-(-\vec{a})$이다.

또 $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2,\ \ldots\ldots,\ a_n\pm b_n)$으로 정의한 것을 幾何 Vector에서는 三角形의 方法이나 平行四邊形의 方法을 基礎過程에서는 많이 利用하는 方法이다.

特히 $\vec{a}=\vec{b}$인 경우에 $\vec{a}-\vec{b}$의 성분은 모두 0이 되는데 이것을 Zero Vector라고 한다. 또 k가 scalar일 때 $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2,\ \ldots\ldots,\ ka_n)$으로 表示한다.

Vector에서는 다음 法則이 成立함을 알 수 있다. 卽

交換律 : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(a_1, a_2, \ldots, a_n)+(b_1, b_2, \ldots b_n)\\&=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots\ldots, a_n+b_n)\\&=(b_1+a_1, b_2+a_2, \ldots\ldots, b_n+a_n)\\&=(b_1, b_2, \ldots b_n)+(a_1, a_2, \ldots a_n)\\&=\vec{b}+\vec{a}\end{aligned}$$

結合律 : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}&=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots\ldots, a_n+b_n)\\&\quad+(c_1, c_2, \ldots, c_n)\\&=(a_1+b_1+c_1, a_2+b_2+c_2, \ldots\ldots, a_n\\&\quad+b_n+c_n)\\&=(a_1+(b_1+c_1),\ a_2+(b_2+c_2),\ \ldots,\ a_n\\&\quad+(b_n+c_n))\\&=(a_1, a_2, \ldots, a_n)+(b_1+c_1, b_2+c_2, \ldots,\\&\quad b_n+c_n)\\&=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\end{aligned}$$

恒等元 : $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{0}&=(a_1, a_2, \ldots, a_n)+(0, 0, \ldots, 0)\\&=(a_1+0, a_2+0, \ldots\ldots, a_n+0)\\&=(0+a_1, 0+a_2, \ldots\ldots, 0+a_n)\\&=(0, 0, \ldots, 0)+(a_1, a_2, \ldots, a_n)\\&=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}\end{aligned}$$

逆元 : $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

$$\begin{aligned}\vec{a}+(-\vec{a})&=(a_1, a_2, \ldots, a_n)+(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)\\&=(a_1-a_1, a_2-a_2, \ldots\ldots, a_n-a_n)\end{aligned}$$

$=(0, 0, \ldots, 0)$
$=\vec{0}$
$\therefore\ \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

特히 k, j가 scalar이고 Vector $\vec{a}$, $\vec{b}$에 對하여 다음이 成立함을 증명하자.

① $k(j\vec{a})=j(k\vec{a})=(kj)\vec{a}$
② $(k+j)\vec{a}=k\vec{a}+j\vec{a}$
③ $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

〈證明〉

① $k(j\vec{a})=k(ja_1, ja_2, \ldots, ja_n)$
$=(kja_1, kja_2, \ldots, kja_n)$
$=(j(ka_1), j(ka_2), \ldots\ldots, j(ka_n))$
$=j(k\vec{a})$
$=((kj)a_1, (kj)a_2, \ldots\ldots, (kj)a_n)$
$=(kj)\vec{a}$
$\therefore\ k(j\vec{a})=j(k\vec{a})=(kj)\vec{a}$

② $((k+j)\vec{a}=((k+j)a_1, (k+j)a_2, \ldots, (k+j)a_n)$
$=(ka_1+ja_1, ka_2+ja_2, \ldots, ka_n+ja_n)$
$=(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)+(ja_1, ja_2, \ldots, ja_n)$
$=k\vec{a}+j\vec{a}$
$\therefore\ (k+j)\vec{a}=k\vec{a}+j\vec{a}$

③ $k(\vec{a}+\vec{b})=(k(a_1+b_1),\ k(a_2+b_2), \ldots\ldots, k(a_n+b_n))$
$=(ka_1+kb_1, ka_2+kb_2, \ldots\ldots, ka_n+kb_n)$
$=(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)+(kb_1, kb_2, \ldots, kb_n)$
$=k\vec{a}+k\vec{b}$
$\therefore\ k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

例를 들면
$\vec{a}=(2, 3, 1)$, $\vec{b}=(-1, 2, 4)$, $\vec{c}=(3, 2, -1)$
일 때
$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=(5, 3, -4)$
을 만족하는 實數 x, y, z를 구하려면

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=x(2, 3, 1)+y(-1, 2, 4)+z(3, 2, -1)$$
$$=(2x-y+3z,\ 3x+2y+2z,\ x+4y-z)$$
$$=(5, 3, -4)$$

에서 연립방정식

$\begin{cases}2x-y+3z=5\\3x+2y+2z=3,\\x+4y-z=-4\end{cases}$ 을 풀어서 $x=3$, $y=-2$, $z=-1$ 을 얻을 수 있다.

(3) Vector 空間

一般的으로 元 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …… 의 集合 V에서 相等과 加法 및 scalar倍를 적당히 定義할 때 다음 두개의 基本性質이 成立한다는 것은 잘 알 수 있다. 卽

① 덧셈 :
$\vec{a}, \vec{b}$를 各各 n次元空間의 位置 Vector라고 하면 $\vec{a}+\vec{b}$도 n次元 空間의 位置 Vector이다.

② scalar의 곱 :
$\vec{a}$를 n次元空間의 位置 Vector, k를 scalar라 하면 $k\vec{a}$도 n次元空間의 位置 Vector이다.

이들이 다음 조건을 만족할때 「V는 Vector 空間을 形成한다」고 한다.

① 任意의 $\vec{a}, \vec{b}\in V$에 對하여 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$가 성립한다.

② 任意의 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\in V$에 對하여 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$가 성립한다.

③ 任意의 $\vec{a}\in V$에 對하여 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$가 되는 $\vec{0}\in V$가 存在한다.

④ 任意의 $\vec{a}\in V$에 對하여 $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$가 되는 $-\vec{a}\in V$가 存在한다.

⑤ 任意의 scalar k, l와 $\vec{a}\in V$에 對하여 $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$가 성립한다.

⑥ 任意의 scalar k와 $\vec{a}$, $\vec{b}\in V$에 對하여 $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$가 성립한다.

⑦ 任意의 k, l인 scalar와 $\vec{a}\in V$에 對하여 $k(l\vec{a})=l(k\vec{a})=(kl)\vec{a}$가 성립한다.

⑧ 任意의 $\vec{a}\in V$에 對하여 $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$가 성립한다.

以上의 두개의 성질과 8개의 성질을 Vector 空間의 公理라고 한다.

따라서 平面上의 Vector의 集合은 Vector 空間의 公理를 만족한다. 따라서 平面上의 Vector 全體集合이나 空間 Vector 全體의 集合은 各各 하나의 Vector 空間이 된다. 또 Vector 空間 V

의 部分集合에서 그 自身도 Vector 空間인 것을 V의 部分空間이라고 한다.

特히 $\boldsymbol{R}^3=(x_1, x_2, x_3)$ $x_i \in R(i=1,2,3)$...... $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \boldsymbol{R}^3$, k, l이 scalar 일때 $\boldsymbol{R}^3$는 Vector 空間이 됨을 쉽게 증명할 수 있을 것이다.

特히 線型空間 V의 空集合이 아닌 部分集合 W가 다음 條件을 만족할때 W를 V의 線型部分空間이라 한다.

① 任意의 $x, y \in W$에 對하여 $x+y \in W$ ② 任意의 $x \in W$와 任意의 scalar k에 對하여 $kx \in W$

(4) 一次 獨立과 一次從屬

$\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$이 모두 n次 Vector이고 $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$이 scalar 일 때

$$k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+......+k_n\vec{a_n}$$

을 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$의 一次結合이라 한다.

$k_1, k_2, ..., k_n$이 모두 0이면 이것을 Vector 記法을 빌려서

$$(k_1, k_2, ..., k_n)=0$$

이라 表示하고, $k_1, k_2, ..., k_n$ 中에 0이 아닌 것이 적어도 하나 있으면 이것을

$$(k_1, k_2, ..., k_n)\neq 0$$

이라고 表示한다. 따라서

$(k_1, k_2, ..., k_n)\neq 0^{(2)}$이고

$$k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+......+k_n\vec{a_n}=\vec{0}$$

이면 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$은 一次從屬이라하고

$(k_1, k_2, ..., k_n)\neq 0$이면

$$k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+......+k_n\vec{a_n}\neq\vec{0}$$

일때 바꿔말하면(對偶)

$k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+......+k_n\vec{a}=\vec{0}$이면

$$(k_1, k_2, ..., k_n)=0$$

일때 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$은 一次獨立이라고 한다. 따라서 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$은 一次獨立이 아니면 一次從屬이고, 또 그의 逆도 成立한다.

$\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$이 一次從屬이면 그들중의 어느 하나는 나머지 것들의 一次結合으로 表示할 수가 있고 또 그의 逆이 成立한다. 卽 $k_1\neq 0$이라고 하면

$$\vec{a_1}=\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\vec{a_2}+\left(-\frac{k_3}{k_1}\right)\vec{a_3}+......+\left(-\frac{k_n}{k_1}\right)\vec{a_n}$$

와 같이 $\vec{a_1}$를 나머지 것들의 一次結合으로 表示할 수 있고 逆으로

$$\vec{a_1}=k_2\vec{a_2}+k_3\vec{a_3}+......+k_n\vec{a_n}$$

와 같이 $\vec{a_1}$가 나머지것들의 一次結合으로 表示되면

$(-1, k_2, k_3, ..., k_n)\neq 0$이고

$$(-1)\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+...+k_n\vec{a_n}=\vec{0}$$

이므로 $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$은 一次從屬이다.

例를 들면 $\vec{a}=(2, -3)$, $\vec{b}=(-4, 6)$일 때

$$x(2, -3)+y(-4, 6)=0$$

인 實數 x, y를 求하면 $x=0$, $y=0$이 아닌 해 $x=2$, $y=1$가 存在하므로 두 Vector는 一次從屬이고

$\vec{c}=(4, -5)$, $\vec{d}=(-3, 4)$일때

$$x(4, -5)+y(-3, 4)=(0, 0)$$

$x=0$ $y=0$이 아닌 實數 x, y가 存在하지 않으므로 $\vec{c}, \vec{d}$는 一次獨立이다.

마찬가지로

$\vec{a}=(1, 0, 0)$, $\vec{b}=(0, 1, 0)$ $\vec{c}=(2, 1, 0)$

은 一次從屬이고, 微分可能한 函數 全體의 集合으로 形成되는 Vector 空間에서 e^x와 e^{2x}는 一次獨立이다. 왜냐하면 k_1, k_2를 scalar 라고 할때

$$k_1e^x+k_2e^{2x}=\vec{0} \cdots\cdots ①$$

이라 할때 ①의 양변을 x에 關하여 微分하여

$$k_1e^x+2k_2e^{2x}=\vec{0} \cdots\cdots ②$$

①, ②에서 $k_2e^{2x}=0$, $\therefore k_2=0$ $\therefore k_1=0$

卽, $k_1e^x+k_2e^{2x}=\vec{0}$이면 $(k_1, k_2)=0$ 따라서 e^x와 e^{2x}는 一次 獨立이다.

또 實數 全域에서 定義된 연속함수가 만드는 R上의 線型空間에서

$$f=2^{2t},\ g=t^2,\ h=t$$

은 一次 獨立이다.

(5) Vector 의 內積

두 Vector $\vec{a}$, $\vec{b}$에 對하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 놓을때 사선 $\overrightarrow{OA}$와 사선 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 角 $\angle AOB=\theta$라 할때 두개의 Vector 의 크기 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$

와 $\angle$AOB의 코싸인 곱을 內積이라 하고, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 또는 $(\vec{a}\cdot\vec{b})$로 表示한다. 卽, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$ 로 나타낸다. 特히 注意할 것은 두 Vector의 內積은 scalar가 되기 때문에 Vector의 內積을 scalar積이라고도 한다.

$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$일 때

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

로 表示가 可能하다. 왜냐하면 $\overrightarrow{OA}=(a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1, b_2, b_3)$라하면 $\triangle$OAB에서 cosine 제 2 정리를 사용하면 $m(\angle AOB)=\theta$ 일때

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$$

定義에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$ 이므로

$$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2\}$$

$$=\{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

$$-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2-(b_3-a_3)^2\}$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

그런데 空間의 任意의 두 Vector는 一般的으로 同一平面上의 Vector는 아니지만, 平行移動에 依하여 恒常 同一平面上의 Vector로 옮겨놓을 수 있으므로 위의 공식으 一意的으로 定義된다.

따라서 Vector의 內積公式에서 두 Vector의 交角을 求하는 要領은 쉽게 誘導할 수 있다. 卽

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

따라서 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 일 때 $\theta=90°$이므로 $\cos\theta=0$ 에서 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ 임을 說明할 수 있고, $\vec{a}/\!/\vec{b}$ 이면 $\theta=0$ or π 이므로

$$\cos\theta=\pm1$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

卽,

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\pm\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$$

例를 들면

$\vec{a}=(1, 2, 3)$, $\vec{b}=(2, -1, 4)$, $\vec{c}=(4, -3, 2)$ 일때 $\vec{a}+k\vec{c}$와 $\vec{b}-\vec{a}$가 垂直이 되게 實數 k를 求해보면

$$\vec{a}+k\vec{c}=(1+4k,\ 2-4k,\ 3+2k)$$

$$\vec{b}-\vec{a}=(1, -3, 1)$$

이므로 이들의 內積이 Zero이므로

$$1\cdot(1+4k)-3(2-4k)+1\cdot(3+2k)=0$$

에서 $k=\frac{2}{15}$가 얻어진다.

Vector의 內積에서는 다음 성질이 성립함을 알 수 있다. 卽,

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$: 交換律

② $m(\vec{a}\cdot\vec{b})=(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})$: 結合律

③ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$: 配分律

이들을 차례로 증명하여 보자.

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\theta=b\cdot a$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

② Vector $\vec{a}, \vec{b}$의 交角을 θ라면 $\vec{b}$ 위로의 $\vec{a}$의 正射影은 $\vec{a}\cos\theta$이다. 또 $\vec{b}$ 위로의 $m\vec{a}$의 正射影은

i) $m>0$ 일때 $|m\vec{a}|\cos\theta=m|\vec{a}|\cos\theta$

ii) $m<0$ 일때 $|m\vec{a}|\cos(\pi-\theta)$

$=|m||\vec{a}|(-\cos\theta)=m|\vec{a}|\cos\theta$

iii) $m=0$ 일때 $|m\vec{a}|\cos\theta=0$

따라서 $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$

같은 方法으로

$$\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

③은 空間 Vector의 성분을 가지고 하면

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(a_1, a_2, a_3)\ (b_1+c_1,\ b_2+c_2,\ b_3+c_3)$

$=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)$

$=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3b_3)$

$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

여기서 주의해야 할 것은 연산의 基本 성질中의 結合律 곧 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$는 성립하지 않는다. 왜냐하면 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$인 경우, $\vec{a}$와 $\vec{b}\cdot\vec{c}$의 곱은 이미 內積이 될 수 없기 때문이다. 內積의 演算은 다른 연산처럼 닫혀있는 것이 아니고 Vector가 아닌 scalar가 된다.

따라서 內積演算에 關해서는 單位元이라던가 逆元은 生覺할 수 없다.

다음에 4次元의 空間에서 두 Vector

$$\vec{a}=(2,4,3,-1),\ \vec{b}=(1,2,3,4)$$

의 交角을 求하여 보자.

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+4^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{30},$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}=\sqrt{30}$$

또 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+2\times4+3\times3+(-1)\times4=15$

따라서 두 Vector의 交角을 θ라면

$$\cos\theta=\frac{15}{\sqrt{30}\ \sqrt{30}}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$$

$0<\theta<\pi$에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

다음에 schwarze의 不等式을 알아 보자. 卽,

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

Vector의 內積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$에서 $-1\leqq\cos\theta\leqq1$이므로 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$는 쉽게 誘導되지만 $\vec{a}\fallingdotseq0$, $\vec{b}\fallingdotseq0$인 경우 實數 t에 對하여

$$|t\vec{a}+\vec{b}|^2=t^2|\vec{a}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})t+|\vec{b}|^2\geqq0$$

왜냐하면 實數의 제곱은 陰數가 아니기 때문이다. 따라서 모든 實數 t에 對하여 위의 不等式이 成立하려면 二次式의 判別式은

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\leqq0$$

따라서

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leqq|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$$
$$\therefore\ |\vec{a}\cdot\vec{b}|^2\leqq|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$$

따라서 一般的으로

$$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2\leqq(a_1{}^2+a_2{}^2+\dots+a_n{}^2)\ (b_1{}^2+b_2{}^2+\dots+b_n{}^2)$$

이 成立함을 알 수 있다. 例를 들면

$$x^2+y^2+z^2=9,\ a^2+b^2+c^2=4$$

일때 $ax+by+cz$의 최대값과 최소값을 구해 보면 schwarze의 부등식에 依하여

$$(ax+by+cz)^2\leqq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$=4\times9$$
$$\therefore\ -6\leqq ax+by+cz\leqq6$$

(6) Vector의 外積

平行이 아닌 두개의 Vector에 있어서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 할때 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 外積이란 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$를 두변으로 하는 平行四邊形의 面積을 크기로 하고 이 平行四邊形을 품는 平面 α와 垂直되는 方向으로 方向을 갖는 Vector를 말하고 $\vec{a}\times\vec{b}$ 또는 $[\vec{a},\vec{b}]$로 나타낸다.

따라서

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$$

로 정의한다.

$\vec{a}$와 $\vec{b}$가 平行이거나 $\vec{a}, \vec{b}$ … 적어도 어느 하나가 Zero Vector일때

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta=0$$

이므로 이때는 $\vec{a}\times\vec{b}=0$이라 정한다.

外積에 關하여서 다음 성질이 성립함을 알 수 있다.

① $\vec{a}\fallingdotseq0$, $\vec{b}\fallingdotseq0$이고, $\vec{a}\times\vec{b}=0$일때는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 平行이다.

② $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

따라서 交換法則은 成立치 않는다.

③ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$가 正規直交右手系의 Vector일때 다음이 성립한다.

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}$$
$$\therefore\ \vec{a}=(a_1, a_2, a_3),\ \vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$$

라면

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$
$$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$$

따라서

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}$$
$$+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$
$$\therefore\ \vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

④ $\vec{a}\perp\vec{b}$일때 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

⑤ $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$

따라서 配分法則이 成立한다.

⑥ $\vec{a}\times\vec{b}$는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 各各 수직이다.

卽

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0,\ \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$$

⑦ k가 scalar일때

$$(k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})$$

⑧ $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 交角을 θ라 할때

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$$

一般的으로[3]

$$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3),\ \vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$$

에 對하여

$$\vec{c}=\left(\begin{vmatrix}a_2 a_3\\ b_2 b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_3 a_1\\ b_3 b_1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_1 a_2\\ b_1 b_2\end{vmatrix}\right)=(c_1, c_2, c_3)$$

을 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 外積이라고 한다.

(7) 直線의 方程式

空間座標에서 原點을 지나는 直線의 方程式을 求해보자.

平面上에서는 y軸의 절편과 方向係數가 定하여지면 直線이 決定되는 것과 마찬가지로 空間에서는 직선 g가 x, y, z軸과의 方向角이 決定되면 直線은 一意的으로 決定되게 된다. 이 直線[4]이 x, y, z과 이루는 角을 各各 α, β, γ라면 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$를 직선 g의 方向餘弦(direction cosine)이라 부르고 $m(\mathrm{OP})=\rho$라 하면 $x=\rho\cos\alpha$, $y=\rho\cos\beta$, $z=\rho\cos\gamma$가 되어 $x^2+y^2+z^2=\rho^2$이고

$$\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\gamma$$
$$=\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2}+\frac{z^2}{\rho^2}=1$$

위의 식에서

$$\rho=\frac{x}{\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\beta}=\frac{z}{\cos\gamma}$$

이것이 直線 g의 方程式이다.

다시 定點 $A(x_1, y_1, z_1)$을 지나고 方向餘弦을 各各 l, m, n이라 할때 直線 g의 任意의 점 $P(x, y, z)$라면 座標軸을 平行移動하여 A에 옮길 수 있고, 新座標에 對한 g의 方向餘弦은 亦是 l, m, n이고 점 P의 新座標는 $(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$이므로 점 A를 지나고 方向餘弦이 l, m, n인 直線의 方程式은

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

特히 點(x_1, y_1, z_1)에서 점(x_2, y_2, z_2)로 옮기는 方向比를 各各 a, b, c라 할 때

$$a:b:c=l:m:n$$

이 되고

$$\frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c}=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

그러므로 同時에 0이 아닌 3수 a, b, c에 比例하는 方向餘弦을 갖는 直線은 늘 存在한다고 말할 수 있다.

따라서 두점 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)을 지나는 直線은 方向比 a, b, c가 $a=x_2-x_1$, $b=y_2-y_1$, $c=z_2-z_1$이므로

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

이 된다. 特히 a, b, c를 方向比로 하는 直線의 方向餘弦에서 分母의 부호는 직선의 어느 方向을 陽으로 잡느냐에 따라서 陽 또는 陰이 된다.

(8) 平面의 方程式

點 $A(a_1, a_2, a_3)$를 지나고 $\vec{u}=(\alpha, \beta, \gamma)$에 垂直한 平面 α의 方程式을 求해보자. 平面 α上의 任意의 點을 $P(x, y, z)$라 하면 $\overrightarrow{AP}\perp\vec{u}$이므로

$$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}=0$$
$$\vec{u}\cdot(\overrightarrow{OP}-\vec{a})=0$$
$$\therefore\ (\alpha, \beta, \gamma)\cdot(x-a_1,\ y-a_2,\ z-a_3)=0$$
$$\therefore\ \alpha x+\beta y+\gamma z-(\alpha a_1+\beta a_2+\gamma a_3)=0$$

卽, 平面의 方程式은 一次方程式

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

으로 나타내어 지며 逆으로 $\vec{u}=(\alpha, \beta, \gamma)\fallingdotseq 0$일때 一次方程式 $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$은 α, β, γ中 적어도 하나는 0이 아니므로 $\alpha\fallingdotseq 0$이라면

$$\alpha\left(x+\frac{\delta}{\alpha}\right)+\beta y+\gamma z=0$$

가 되어 점$\left(-\frac{\delta}{\alpha}, 0, 0\right)$을 지나고 法線 Vector가 (α, β, γ)인 平面을 나타낸다.

또 同一直線上의 點이 아닌 3點 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$를 지나는 平面 α上의 任意의 한 點을 $P(x, y, z)$라면 Vector $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$는 同一平面上에 있고, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$는 平行하지 않다. 따라서

$$\overrightarrow{AP}=s(\overrightarrow{AB})+t(\overrightarrow{AC})$$

을 만족하는 實數 s, t가 存在한다.

여기서 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$를 점 A, B, C, P의 位置 Vector라 하면

$$\vec{p}-\vec{a}=s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$$
$$\therefore\ \vec{p}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})\ \cdots\cdots\text{㉠}$$

逆으로 ㉠을 만족하는 점 P는 α上에 있다. 따라서 ㉠은 3점 A, B, C를 지나는 Vector方程

式이다.

㉠의 式을 媒介變數 方程式으로 쓰면

$$x=a_1+(b_1-a_1)s+(c_1-a_1)t$$
$$y=a_2+(b_2-a_2)s+(c_2-a_2)t$$
$$z=a_3+(b_3-a_3)s+(c_3-a_3)t$$

으로 나타낼 수 있다. 例를 들어 3點 A(1, 2, −3), B(−1, 2, 2), C(−3, 1, 0)을 지나는 平面의 方程式을 求해 보면

$$x=1+(-1-1)s+(-3-1)t$$
$$y=2+(2-2)s+(1-2)t$$
$$z=-3+(2+3)s+(0+3)t$$

에서 s, t를 消去하면 $x+2y+2z+1=0$

다음에 두 平面의 方程式 α, β가

$$\alpha: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$\beta: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

일때 α, β의 法線 Vector는 各各

$$\vec{u_1}=(a_1, b_1, c_1),\ \vec{u_2}=(a_2, b_2, c_2)$$

이라면 $\alpha /\!/ \beta$ 일때는 $\vec{u_1} /\!/ \vec{u_2}$ 이므로

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$$

特히 $c_1 : c_2 = d_1 : d_2$ 이면 一致할때다. 또 $\alpha \perp \beta$ 일때는 $\vec{u_1} \perp \vec{u_2}$ 이므로 $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}=0$ 따라서

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

特히 Hesse의 標準型을 소개하면

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$$

이것은 직선의 方向角을 가지고 쉽게 誘導될 수 있다. 따라서 $N(-6, 3, 6)$을 지나며 $\overrightarrow{ON}$에 수직인 平面의 方程式은 Hesse의 標準型에서 $2x-y-2z+27=0$ 임을 알 수 있다.

(三) 結 論

Vector를 올바로 理解하고 이들의 演算方法을 좀더 體係있게 取扱함으로서 Vector의 導入에서 適用에 이르기까지 無理없이 展開해 나갈 수 있고 媒介變數를 使用함으로서 理解를 쉽게 할 수 있다. 特히 Vector의 導入은 有向線分의 概念을 土臺로하여 行 Vector의 形態인 數 Vector로 誘導함으로서 Vector와 行列을 서로 關聯시켜서 理解할 수 있고 行列은 變換部分을, Vector는 一次元 Vector에서 n次元의 Vector 空間까지 擴張시킴으로서 宇宙時代로 指向하는 未來의 多次元의 世界를 理解할 수 있고 따라서 行列과 Vector의 理論的 背景에 도움을 줄 수 있다고 보아서 基礎的인 Vector의 올바른 理解는 勿論, 이의 適用에 關한 硏究는 매우 重要하다고 생각되어 이것을 基礎로 더욱 硏究할 것을 約束하며 끝을 맺는다.

—參 考 文 獻—

① 「數學敎育의 現代化」 李星憲譯 東亞出版社刊
② 「微積分과 解析幾何學」 金炯堡著 國民出版社刊
③ 「解析學 入門」 福井常孝外 5人著 內田老鶴圃刊
④ 「敎養數學」 洪錫浩外二人著 光林社刊
⑤ 「線型 代數學」 南正玩, 許源譯 螢雪出版社刊

註 1) 敎養數學 p. 75
2) 敎養數學 p. 82
3) 解析學入門 p. 333
4) 微積分學과 解析幾何 p. 202