単体法中 프로그램을 利用한 変数와 制約条件에 관한 研究

(A Study of Variables and Subject to the Restrictions using the Program of Simplex Method)

高 龍 海 *

Abstract

Computer program about the simplex method —one of the most popularily used linear programming— has been studied. Variable and subject to the restriction are growing according to the growing of all of the problem. In this paper, the problem that can be solved by simplex method may be processed with enermous block unit (50 × 50). Because of using computer all of the problem can be solved more accurately and quickly. In appendix, computer program and running example are recorded.

1. 緖 論

單體法은 線型計劃法中 가장 基本的인 模型으로서 가장 널리 適用되고 實質的으로도 커다란 效果를 얻고 있다. 그 適用範鴎를 보면 製品配合 (product mix)이나 用役配合 (service - mix , 例를 들면 電話局, 호텔, 食堂, 運送會社, 病院) 建築 등 상당히 복잡한 問題가 線型計劃技法의 發達에 의해서 比較的 容易하게 問題를 把握할 수 있게 되었다.

單體法에서 變數와 制約條件이 커지면 사람의 能力으로는 도저히 감당할 수 없으므로 컴퓨터를 利用해서 問題를 解決해야 할 것이다. 例를 들어 IBM 1130 LP MOSS (110 - CO- 16 X)[1] 의 경우 샘플問題를 푸는데 무려 50餘分이나 걸린다. 그래서 LP package 를 作成하고 이에 따른 變數와 制約條件과의 關係를 比較·檢討해보고 더 나아가서 이에 所要되는 段階數를 測定하여 變數의 數가 制約條件의 數의 몇 배가 될 때 가장 얻어지는 效果가 크게 되는가를 찾아보고자 한다.

2. 單體法의 理論的 考察

線型計劃問題의 性質을 보면 目的函數와 制約條件들이 變數들과 線型關係가 있고, 各 制約條件들은 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ge b_i$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i$ 의 3 가지 條件中 하나와 모든 線型計劃問題의 變數들은 陰數가 될 수는 없다. 즉

最大化 $Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$ [2]

制約條件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ (\le,\ \ge,\ =)\ b_i$ [3]

$i = 1, 2, \cdots\cdots, m$

$x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \cdots\cdots, n$ 로 表現된다.

單體法의 技法은 無限個의 可能한 解로부터 最適解에 가까운 有限個의 解를 찾아내는 方法이다. 唯一한 解가 存在한다면 最適解에 가까운 것은 $(m+n)$ 個[4] 의 變數로부터 n 個의 變數를 0 으로 놓고 나머지 m 個의 變數를 풀어서 얻을 수 있다. n 個의 0 의 값을 가진 變數를 非基底變數(nonbasic variable) [5] 라 하고, 나머지 m 個의 變數의 값은 基底變數(basic variable)[6] 라 한다. 이러한 條件으로 最適解에 대한 수효는 無限個數로부터 最大限界가 $\binom{m+n}{n}$ [7] 인 有限個數로 줄어들고 모든 變數는 陰數가 아니어야 한다. 이러한 方法에 의해 發生한 解

明知實業專門大學 專任講師

1) IBM 1130 LP MOSS Manual 參照.

2) Hamdy A. Taha, *Operation Research*, Macmillan Publishing Co., 1976.

3) Harvey M. Wagner, *Principles of Operation Research*, Prentice - Hall, 1975.

4) 等式制約이 包含된 경우 基底解는 단지 이 모든 制約式을 滿足하는 增補된 꼭지점이다.

5) n 定義變數라고도 부름.

6) m 개의 函數型 制約式과 n 개의 非陰制約의 各各에 하나씩 對應하는 變數 (m 變數라고도 부름).

7) Frederick S. Hiller and Gerald J. Lieberman, *Operations Research*, Holden-day, 1974.

는 基底可能解(basic feasible solution) 또는 basis 라 불리우고, 基底變數가 양의 값을 가지면 그 解는 退化되지 않았다. 이것을 nondegenerate 라 하고 n 變數中 어느 것이 0이면 degenerate[8] 되었다고 한다.

새로운 基底解(new basic solutions) 들은 進入基底變數(entering variable)로 들어오는 것과 進入基底變數中에서 脫落基底變數(leaving variable)를 選擇함으로써 이전의 基底解에서 구한 목적함수의 값보다 向上을 가져오고 새로운 解가 이전의 解보다 더욱 좋다는 變數中에 基本解로 들어올 變數를 選擇하는 것이 可能하다. 目的函數에서 들어오는 變數로서 單位當 가장 큰 利潤을 가져오는 非基底變數를 選擇하는 것이 最適條件[9]이다. 目的函數에 있어서 값의 改善이 더 이상 可能하지 않을 때까지 계속적으로 反復된다. 이 때 最適解에 도달하게 된다.[10]

進入基底變數를 찾는 基準[11]은 n 個의 現 非基底變數이다. 選擇된 變數는 非基底에서 基底로 바뀌어져서 그 값이 0으로부터 어떤 양수로 增加되며 다른 것은 0으로 남는다. 새로운 基底可能解는 目的函數값을 增加시켜야 하므로 進入基底變數의 增加로 인한 各 係數는 그 變數 增加에 따른 Z의 增加率을 나타낸다. 最大係數를 갖는 變數가 進入變數로 선정된다. 脫落基底變數를 찾는 基準은 現 解를 規定하는 n 個의 制約境界로부터 한 개를 지우고 現 解로부터 나머지 $(n-1)$ 個의 制約境界의 交集合을 따라서 實行可能 方向으로 옮겨가서 첫 新 制約境界에 달하면 中止한다. 現 基底可能解에서 인접해로 옮겨가는 方法은 現 解를 規定하는 n 個의 非基底變數로부터 하나를 지우고 $(n-1)$ 個의 非基底變數를 0으로 두면서 한 變數를 增加함으로써 現 解로옮겨가서 基底變數中 첫번째가 0이 될 때 中止한다. 進入基底變數가 일단 選定되면 脫落基底變數는 選擇의 여지없이 不可能解에 달할뿐이다.

目的函數에서 Z를 最小化하는 方法[12]은 row 0 係數의 符號를 바꾸는 것이다. 즉 $Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$ 의 最小化는 $(-Z)=\sum_{j=1}^{n}(-C_j)X_j$ 의 最大化로 處理하였다.

3. Computer program 構成

任意의 線型計劃問題에 대해 單體法에 의한 solution을 찾는 프로그램을 다음과 같은 部分으로 나누어 作成하였다.

① 線型計劃問題의 데이터를 읽어들이는 部分
② 入力데이터를 印刷해주는 部分
③ 最大化에 의해 solution을 計算하고 印刷하는 部分
④ 基本問題를 双對問題로 바꾸어 作成하고 印刷하는 部分
⑤ 모든 制限條件式을 만족하는 x_j $(j=1,2,\cdots\cdots,n)$의 값이 존재하지 않는 경우
즉 可能解가 없는 경우
⑥ 唯一하게 最適解가 存在하는 경우
⑦ 여러 개의 最適解를 갖는 경우
⑧ 可能解內에서 目的函數가 極限값을 갖지 않은 경우.

Input data 入力方法으로
① 最大化와 最小化를 指定
② 매트렉스의 row와 column의 數
③ Big M값이 必要한 경우 M의 갯수
④ 目的函數의 係數(係數만큼 card check)
⑤ 不等號의 方向決定

附錄에는 컴퓨터 프로그램과 實際 適用例를 몇가지 說明해 놓았다.

4. 結 論

프로그램을 利用하여 여러가지 경우의 線型計劃問題를 풀어 solution을 구하는데 마지막 段階에서 變數와 制約條件에 所要되는 段階만을 根據로 變數의 數가 制約條件의 數보다 큰 경우에 더 빠른 段階(적은 段階數)에서 구해짐을 알 수 있다.

그리고 制約條件의 數가 變數의 數의 약 1.3~1.5倍에 이를 때 段階數가 같아짐을 알 수 있다.

本研究를 遂行함에 本校 電子計算所의 도움과 本校 硏究助成費가 큰 도움이 되었다. 이에 感謝를 表한다.

---

8) 目的函數값이 變하지 않는 경우임.
9) 目的函數式을 直接 使用하면 가장 negative 한 係數를 갖는 非基底變數가 선정된다.
10) Z의 最大增加를 나타내지 않는다. 왜냐하면 制約條件에 의해서 變數가 다른 어떤 變數만큼 增加할 수 없을 경우가 있기 때문이다.
11) 目的函數式의 係數가 모두 negative 하면 最適解가 구해지는 것이다.
12) Frederick S. Hiller and Gerald J. Lieberman, *op. cit.*

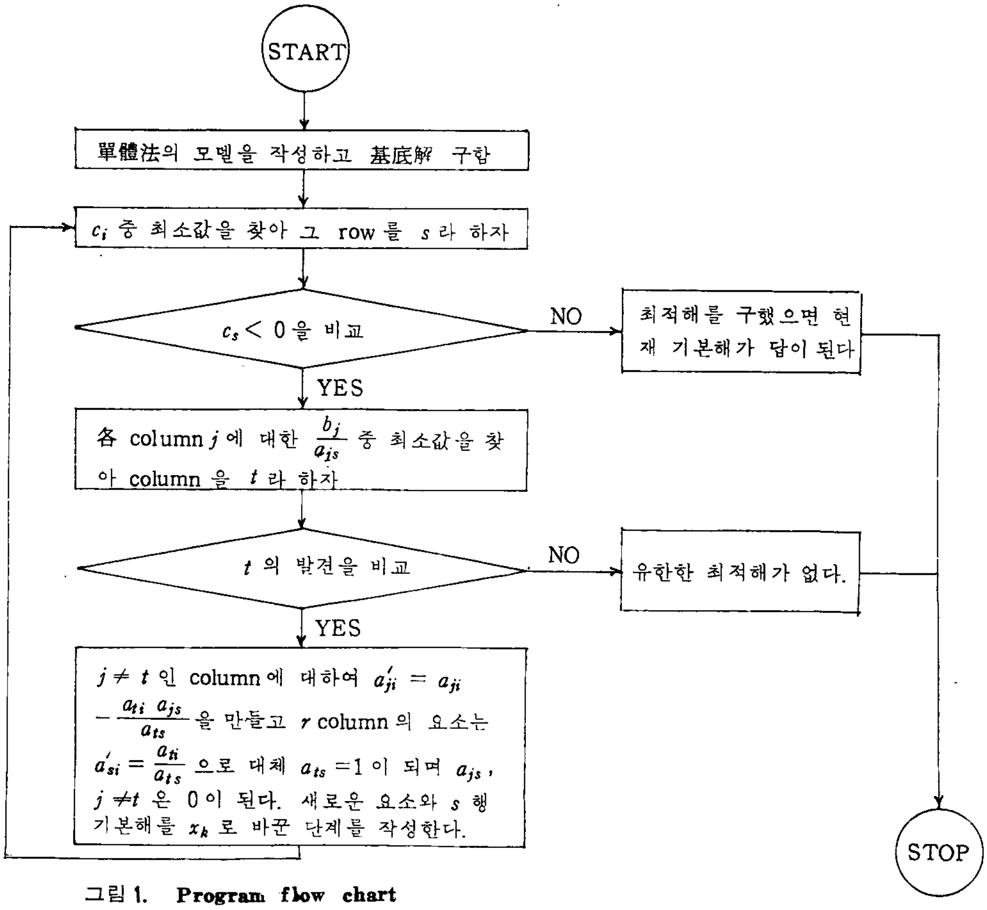

그림 1. **Program flow chart**

參 考 文 獻

1) 姜錫旲, *Operations Research*, 서울 : 英志文化社, 1980.

2) 吳昌桓, 線型經濟學, 서울 : 高麗大學校出版部, 1972.

3) 李相文, 意思決定論, 서울 : 博英社, 1978.

4) Buffa, E. S., *Modern Production Management* 5th ed., John Wiley and Sons, 1977.

5) Churchman, C. W., Ackoff R. L., and E. L. Arnoff, *Introduction to Operations Research*, Wiley, 1958.

6) Gass, S. I., *Linear Programming Method and Applications*, McGraw-Hill, 1974.

7) Hadley, G., *Linear Algebra*, 1961.

8) Hadley, G., *Linear Programming*, Addison-Wesley Publishing Co., 1962.

9) Hillier, Frederick S., and Gerald J. Lieberman, *Operations Research*, Holden-Day, 197

10) Kuester, James L., and Joe H. Mize, *Optimization Techniques with Fortran*, McGraw Hill, 1973.

11) Simmons, Donald M., *Linear Programmi for Operations Research*, Holden-Day, 19

12) Taha, Hamdy A., *Operations Research*, Macmillan Publishing Co., 1976.

13) Teichroew, Daniel, *An Introduction to Management Science*, John Wiley and Sons 1964.

14) Thierauf, Robert J., and Robert C. Klekamp, *Decision Making Through Operation Research*, John Wiley and Sons, 1975.

15) Wagner, Harvey M., *Principles of Operations Research*, Prentice-Hall, 1975.

16) Zionts, S., *Linear and Integer Programming*, Prentice-Hall, 1974.

***** PROBLEM IDENTIFICATION ..... UNIQUE SOLUTION, PRIMAL ONLY

***** INPUT PROBLEM *****

	VARIABLES X(J) J = 1	2
* MAXIMIZE	3.0000	4.0000
* SUBJECT TO		
CONSTRAINT 1	5.0000	3.0000
.LE.	30.0000	
CONSTRAINT 2	5.0000	11.0000
.LE.	55.0000	
CONSTRAINT 3	0.0000	1.0000
.LE.	4.0000	

* AND X(J).GE.0 FOR EVERY J.

***** REVISED PROBLEM (THE FIRST ITERATION OF SIMPLEX TABLEAU BY MAXIMIZATION METHOD) *****

	VARIABLES X(J) J = 1	2	3	4	5
0.0000 = X(0)	-3.0000	-4.0000	0.0000	0.0000	0.0000
30.0000 =	5.0000	3.0000	1.0000	0.0000	0.0000
55.0000 =	5.0000	11.0000	0.0000	1.0000	0.0000
4.0000 =	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000

***** REVISED SIMPLEX TABLEAU FOR THE ABOVE PROBLEM *****

ITERATION **	BASIS **	CURRENT VALUES **	VARIABLES X(J) J = 1	2	3	4	5
ITER. 1							
	X(0)	0.0000	-3.0000	-4.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	X(3)	30.0000	5.0000	3.0000	1.0000	0.0000	0.0000
	X(4)	55.0000	5.0000	11.0000	0.0000	1.0000	0.0000
	X(5)	4.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000
ITER. 2							
	X(0)	16.0000	-3.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4.0000
	X(3)	18.0000	5.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-3.0000
	X(4)	11.0000	5.0000	0.0000	0.0000	1.0000	-11.0000
	X(2)	4.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000
ITER. 3							
	X(0)	22.6000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6000	-2.6000
	X(3)	7.0000	0.0000	0.0000	1.0000	-1.0000	8.0000
	X(1)	2.2000	1.0000	0.0000	0.0000	0.2000	-2.2000
	X(2)	4.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000
ITER.							
	X(0)	24.8750	0.0000	0.0000	0.3250	0.2750	0.0000
	X(5)	0.8750	0.0000	0.0000	0.1250	-0.1250	1.0000
	X(1)	4.1250	1.0000	0.0000	0.2750	-0.0750	0.0000
	X(2)	3.1250	0.0000	1.0000	-0.1250	0.1250	0.0000

```
***** OPTIMAL SOLUTION AT ITERATION   4 *****

   * OBJECTIVE VALUE =            24.8750

   * BASIC VALUES ......................... SHOULD NOT CONTAIN ARTIFICIAL VARIABLES, OTHERWISE THE PROBL
                                            HAS NO SOLUTION AS LONG AS THE M-S ARE BIG ENOUGH IN USING TH
                                            BIG M METHOD.

                  X(  1 ) =               4.1250
                  X(  2 ) =               3.1250
                  X(  5 ) =               0.8750 ---- SLACK VARIABLE
```

```
***** PROBLEM IDENTIFICATION ..... FINAL TEST (3)

***** INPUT PROBLEM *****

                      VARIABLES
                        X(J)
                      J =  1          2

* MAXIMIZE              -2.0000    0.0000

* SUBJECT TO

  CONSTRAINT  1          1.0000    1.0000
          .GE.           2.0000

  CONSTRAINT  2         -1.0000    1.0000
          .LE.           1.0000

* AND X(J).GE. 0 FOR EVERY J.
```

```
***** REVISED PROBLEM ( THE FIRST ITERATION OF SIMPLEX TABLEAU BY MAXIMIZATION TECHNIQUE ) *****

                        VARIABLES
                          X(J)
                        J =  1         2          3          4          5

 -200.0000 = X(0)     -98.0000 -100.0000   100.0000     0.0000     0.0000

    2.0000 =            1.0000    1.0000    -1.0000     0.0000     1.0000

    1.0000 =           -1.0000    1.0000     0.0000     1.0000     0.0000
```

```
***** REVISED SIMPLEX TABLEAU FOR THE PROBLEM *****

ITERATION ** BASIS ** CURRENT VALUES ** VARIABLES
                                          X(J)
                                        J =  1          2          3          4          5

ITER.   1
             X(  0)       -200.0000      -98.0000  -100.0000   100.0000     0.0000     0.0000
             X(  5)          2.0000        1.0000     1.0000    -1.0000     0.0000     1.0000
             X(  4)          1.0000       -1.0000     1.0000     0.0000     1.0000     0.0000

ITER.   2
             X(  0)        -94.0000     [illegible]   0.0000   100.0000   100.0000     0.0000
             X(  5)          1.0000        2.0000     0.0000    -1.0000    -1.0000     1.0000
             X(  2)          1.0000       -1.0000     1.0000     0.0000     1.0000     0.0000

ITER.   3
             X(  0)          8.0000        0.0000     0.0000    -2.0000     4.0000   102.0000
             X(  1)          0.5000        1.0000     0.0000    -0.5000    -0.5000     0.5000
             X(  2)          1.5000        0.0000     1.0000    -0.5000     0.5000     0.5000
```

```
***** UNBOUNDED OPTIMAL SOLUTION, I.E., THE OBJECTIVE VALUE IS INFINITE.
```