LATTICE분포의 적률에 관하여

鄭 漢 永*

구간(0, 1)에서 균등분포를 따르는 n개의 서로 독립인 확률변수의 합의 확률밀도함수를 $f_n(x)$로 나타내기로 하자. 그러면 $f_n(x)$는 다음과 같은 forward B-spline으로 표시된다. ([2], [3]).

$$(1)\quad f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}(x-\nu)_+^{n-1}$$

단,

$$x_+=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

다음과 같이 정의되는 lattice points의 집합 $S(x;\delta)$를 생각하기로 하자.

$$S(x:\delta)=\{x\,|\,x=\delta+j,\ j=0,1,2,\cdots,n-1;\ 0\leq\delta\leq 1\}.$$

$f_n(x)$에 의하여 유도되는 lattice 분포족 $\{f_n(x;\delta);\ 0\leq\delta\leq 1\}$은 다음과 같이 정의된다.

$$(2)\quad f_n(x;\delta)=\begin{cases}f_n(x), & x\varepsilon S(x;\delta)\\ 0, & x\bar{\in} S(x;\delta)\end{cases}$$

lattice 분포 $f_n(x;\delta)$는 저자에 의하여 이미 소개된 바가 있다([1]). 본 논문에서는 다음과 같은 정리를 증명하고자 한다.

정리. (2)로 정의된 lattice 분포 $f_n(x;\delta)$의 k차적률을 $\mu_{k,n}(\delta)$로 표시하면, $\mu_{k,n}(\delta)$는 $k<n$ 일 때 δ에 종속되지 않는다.

증명. (1)과 (2)에 의하여, $f_n(x;\delta)$의 k차적률은 다음과 같이 표시된다.

$$\mu_{k,n}(\delta)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}(\delta+j)^k\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{n}{i}(\delta+j-i)_+^{n-1}$$

$$(3)\qquad=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}\sum_{j=i}^{n-1}(\delta+j)^k(\delta+j-i)^{n-1}.$$

Δ를 다음 관계식을 만족시키는 forward difference operator로 정의하고, $k<n$일 때 $\Delta\mu_{k,n}(\delta)=0$임을 밝히므로서 정리를 증명하고자 한다.

$$\Delta\mu_{k,n}(\delta)=\mu_{k,n}(\delta+1)-\mu_{k,n}(\delta).$$

서울대학교 자연과학대학 부교수

(3)에 의하여.

$$\Delta\mu_{k,n}(\delta)=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}\sum_{j=i}^{n-1}[(\delta+1+j)^k(\delta+1+j-i)^{n-1}$$

$$-(\delta+j)^k(\delta+j-i)^{n-1}]$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}[(\delta+n)^k(\delta+n-i)^{n-1}-\delta^{n-1}(\delta+i)^k]$$

$$=\frac{(\delta+n)^k}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}(\delta+n-i)^{n-1}$$

$$-\frac{1}{(n-1)!}\delta^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}(\delta+i)^k$$

등식 $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(\delta+n-i)^{n-1}=0$ 이 성립함을 쉽게 알 수 있다 ([4]).

따라서,

$$\Delta\mu_{k,n}(\delta)=\frac{(\delta+n)^k}{(n-1)!}\delta^{n-1}(-1)^{n+1}-\frac{1}{(n-1)!}\delta^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}(\delta+1)^k$$

$$=-\frac{\delta^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(\delta+i)^k$$

$$=0 \qquad \text{단, } k<n.$$

참 고 문 헌

[1] Park, C.J. and Chung, H.Y. "The Lattice Distributions induced by the sum of I .I.D. Uniform (0, 1) random variables," Journal of the Korean Math. Society 15, 1978. p.59-61.

[2] Schcenberg, I.J. Cardinal Spline Interpolation, Regicnal Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA. (1973), p. 11.

[3] Wilks, S.S. Mathematical Statistics, Wiley, New york (1962), p. 204.

[4] Riordan, John. An Introduction to Combinatorial Aualysis, Wiley, New York (1958).