講 座

스펙트럼解析

金 治 弘*

5. 白色雜音의 스펙크트럼과 自己相關函數

이 章은 단지 白色雜音의 相関과 스펙크트럼을 論하는 것이 아니고 이 議論을 通하여 相関函数와 스펙크트럼의 取扱이든가 意味에 対하여 理解를 깊이하고 同時에 델타(delta)函数의 性質에 関한 平易한 解説을 行하는 것에 目的을 둔다.

白色光(太陽光)이 모든 性分色光(可視域의 모든波長의 電磁波)을 거의 같은 強度의 比率로 包含하고 있는 것처럼 모든(좀 더 正確히 말하면 対象으로 周波数域보다 훨씬 넓은 周波数帯에 걸처서) 各性分波를 同比率로 混合하고 있는 不規則変動을 白色雜音이라고 命名한다. 따라서 既히 첫回에 説明한 스펙크트럼概念의 定義에 따르면 白色雜音의 스펙크트럼은 角周波数 w에 無関係로 一定하다. 즉,

$$S_n(w) = \text{const} = c \qquad (5.1)$$

또 式(5,1)에 形式的으로 Wiener-Khintchine의 公式을 使用하면 白色雜音의 自己相関函数 $C_n(t)$는

$$C_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} c\, e^{iw\tau} d\omega \qquad (5.2)$$

逆으로 스펙크트럼은

$$S_n(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_n(\tau)\, e^{-iwt}\, d\tau \qquad (5,3)$$

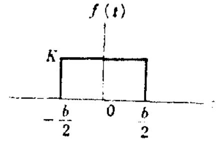
이 된다. 지금까지의 普通含数의 定義로서의 式(5.2)에 依하여 定義되는 $C_n(\tau)$는 不定이고 白色雜音의 自己相関函数는 決定 할 수 없다. 그래서 다음과 같은 順序를 밟아서 白色雜音의 自己相関函数와 스펙크트럼의 関係에 対하여 説明한다.

* 本学者 理事 成均舘大 副教授

5.1 팔스列의 自己相關函數와 스펙크트럼

5.1.1 短形팔스

白色雜音의 스펙크트럼 및 相関函数를 求하기에 앞서 図 5.1(a)에 表示하는 것과 같은 t=0을 中心으로 하는 幅 b, 높이 K의 単一의 短形팔스를 생각한다.



(a) 短形팔스

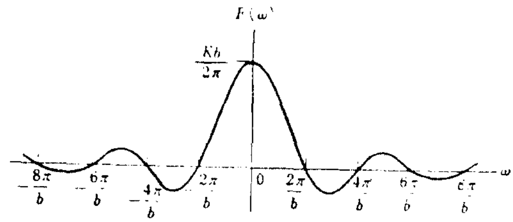


圖 5.1 (b) 短形팔스의 스펙크트럼(Fourie 成分)

이 Fourie 成分은 式(1,27)에 依해

$$X(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-iwt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-b/2}^{b/2} K e^{-iwt}\, dt = \frac{Kb}{2\pi} \circ \frac{\sin(wb/2)}{(wb/2)}$$

가 된다. (図 5.1 (b)) 上式의 逆変換 (1.26)에 依해 短形팔스 $\chi(t)$는 다음과 같이 表示된다.

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [X(w)\, e^{-iwt}]\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} [X(w) \cos wt]\, dw \qquad (5.5)$$

式(5.4), (5.5)는 다음과 같이 解釈된다. $t=0$을 中心으로 하는 短形팔스는 無数의 sinusoids (이 경우는 $\chi(t)$가 偶函数이므로 cosine 波)로 分解할 수 있어 角周波数 $-\infty$로부터 ∞에 걸친 連続인 各成分波의 振幅은

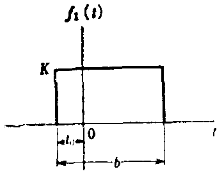
$$|X(w)| = \frac{Kb}{2\pi}\left|\frac{\sin(wb/2)}{(wb/2)}\right| \qquad (5.6)$$

이다. 또 成分波의 位相은 $\theta(w) = \tan^{-1}[(\vartheta(X(w)) / R(X(w))]$ (R: 実数部, ϑ: 虚数部)에 依해 즉 $X(w) = (Kb/\pi)[\sin(wb/2)/(wb/2)]$의 正・負에 따라 各各 0 또는 π가 된다.

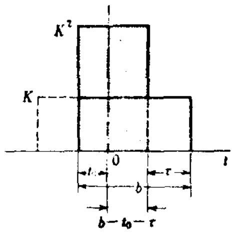
単一短形팔스의 自己相関은 図 5.2에 表示하는 것

* 本学会理事 成均館大学校 理工大 副教援 技術士

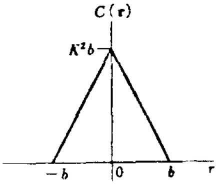
처럼 短形팔스를 τ 만큼 느추어 겹쳐지는 区間 $[-t_0,\ b-t_0-\tau]$ 에 쳐여여 積分을 하면 式 (5 . 7) 과 같이 求해진다. (図 5. 2. (c))



(a) 短形팔스



(b) 短形팔스의 log t 의 自己相関



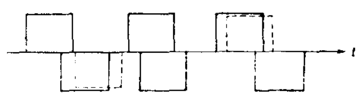
c) 短形팔스의 自己相関函数

圖 5.2 短形팔스의 自己相關의 計算

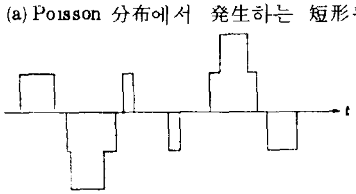
$$C(\tau)=\int_{-t_0}^{b-t_0-\tau} K^2\,dt \left\{ \begin{array}{ll} =K^2(b-|\tau|) & (|\tau|\leq b) \\ =0 & (|\tau|>b) \end{array} \right. \qquad (5.7)$$

5 . 1 . 2 Random 인 短形팔스列

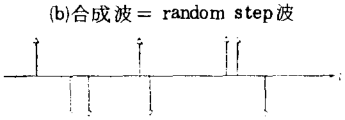
위의 設明에서는 單一의 短形팔스를 생각했지만 다음에는 図 5.3 에 表示하는 것과 같은 任意로 発生하는 短形팔스列을 생각하자. 但 이번에는 正의 팔스와 負의 팔스는 平均的으로는 同数 発生하는 것으로 한다. 各 팔스間에는 全然 関聠이 없고 팔스発生의 間隔의 確率分布는 Poisson分布가 되어 있고 合成波는 Random Step 波이다. 그런데 이 各 팔스間의 無相関때문에 팔스列의 自己相関函数는 式(5.7)의 單一팔스의 경우와 完全히 一致한다.



(a) Poisson 分布에서 発生하는 短形팔스



(b)合成波 = random step波



(c) Poisson Impulse ((a)에 있어 $b\rightarrow 0$, $Kb=$ const)

圖 5.3

$$C(\tau)\left\{ \begin{array}{ll} =K^2(t-|\tau|) & (|\tau|\leq b) \\ =0 & (|\tau|>b) \end{array} \right. \qquad (5.8)$$

上式의 Fourie 変換부터 Poisson 팔스列의 파워・스펙트럼은 式 (5. 9)와 같이 된다. (圖 5.4)

$$S(w)=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} K^2(b-|\tau|)\cos w\tau\,d\tau$$
$$=\frac{K^2 b^2}{2\pi}\left(\frac{\sin(w\,b/2)}{(w\,b/2)}\right)^2 \qquad (5.\ 9)$$

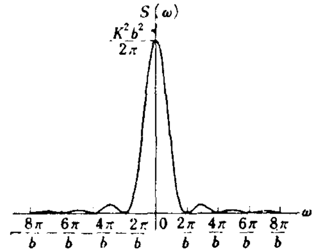


圖 5.4. Poisson Pulse 列의 Power Spectrum

5.2 델타函數

5.2.1 델타函數의 導入

5.1.2에서 생각한 random 인 短形팔스列의 極限으로서 各 팔스의 面積 Kb 를 一定値 $Kb=1$ 로 한되로 幅 b 를 0에 接近시켜 単位인팔스列 (unit－impulse) 로 하는 경우를 생각한다. 이 경우에는 各 팔스의 높이는 ∞가 된다. (図 5.3. (c)) 式(5.9)의 極限을 取하면 random単位인팔스列의 스펙크트럼은 簡単히 다음과 같이 求해진다.

$$S(w)=\lim_{b\rightarrow 0}\frac{K^2 b^2}{2\pi}\left(\frac{\sin(w\,b/2)}{(w\,b/2)}\right)^2=\frac{1}{2\pi} \qquad (5.10)$$

上式은 바로 式 (5.1)에 依해 物理的으로 定義한 白色雑音의 스펙크트럼인 것이다.

한편 式 (5.8)의 極限을 取하면 自己相関函数 $Cn(\tau)$ 는

$$Cn(\tau)\left\{ \begin{array}{ll} =\infty & (\tau=0) \\ =0 & (\tau\neq 0) \end{array} \right. \qquad (5.\ 11)$$

이고 또한 極限操作의 条件 $Kb=1$ 로 부터

$$\int_{-\infty}^{\infty} Cn(\tau)\,d\tau=1 \qquad (5.12)$$

가 된다. 이 極限操作에 따르는 自己相関函数 및 스펙크트럼의 変化의 모양을 図 5.5에 表示한다.

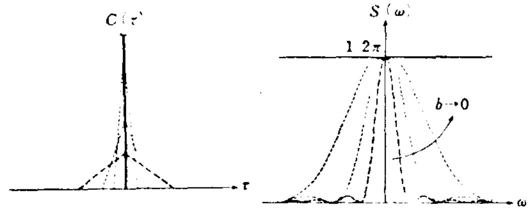


圖 5.5. Pandom Pulse 列의 幅 b 의 縮小에 따르는 自己相関函数와 Spectrum 의 変化, $C(\tau)$ 는 $\delta(\tau)$, $S(w)$는 $1/2\pi$ 이 된다.

式(5.11), (5.12)와 같이 "原点에서 無限大이고 그 以外의 点에서는 零이고 原点을 包含한 区間에서 積分하면 有限値(=1)이 된다." 이 奇妙한 性質을 가진 函数 Cn(τ)는 $\delta(\tau)$의 記号로 表示된다.

이 函数는 英国의 電気工学出身의 原子物理学者 P. A. M. Dirac 에 依해 導入되어 Dirac의 델타函数 라고 불리운다.

델타函数에 任意의 正則인 連続函数 $g(\tau)$를 곱해 $(-\infty, \infty)$의 範囲에서 積分한다. $\delta(\tau)$는 $\tau=0$ 을 除外하고 0이므로 ε을 微小量으로 하면 $(-\varepsilon, \varepsilon)$의 区間에서는 $g(\tau) \fallingdotseq g(0)$ 으로 近似化된다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, g(\tau)\,d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) g(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, g(\tau)\,d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) g(\tau)\,d\tau \\ &= g(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)d\tau \qquad (\varepsilon \approx 0) \\ &= g(0) \qquad (5.13)\end{aligned}$$

로 부터 一般的으로는

$$\delta(\tau-\mu)\begin{cases} =\infty & (\tau=\mu) \\ =0 & (\tau \neq \mu)\end{cases} \qquad (5.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-\mu)\, g(\tau)\,d\tau = g(\mu) \qquad (5.15)$$

그런데 이章의 最初의 곳으로 돌아가 式(5, 3)의 $Cn(\tau)$를 $\delta(\tau)$라고 노면 式(5, 13)의 関係에 依해 $Sn(w)$ = 一定(w에 無関係)의 関係가 逆으로 誘導된다.

$$Sn(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)e^{-iw\tau}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}$$

즉 델타函数의 Fourie 変換은 1이다.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, e^{-iw\tau}\,d\tau \qquad (5.16)$$

또 上式의 逆Fourie 変換 $\delta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Sn(w)e^{iw\tau}\,d\omega$ 로 부터 렌덤임팔스(random impulse)列의 自己相関은 形式的으로 다음과 같이 表示된다.

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iw\tau}\,dw \qquad (5.17(a))$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos w\tau\,dw \qquad (5.17(b))$$

上式의 積分은 通常의 定義에서는 明白히 意味를 갖지 않고 "distribution"(超函数)로서만의 意味를 갖는다.

5.2.2 白色雑音

以上 整理하여 간추리면 白色雑音의 自己相関函数 $Cn(\tau)$와 파워스펙트럼 $Sn(w)$는 次式이 된다.

$$\left.\begin{aligned} Cn(\tau) &= \delta(\tau) \\ Sn(\tau) &= \tfrac{1}{2}\pi \end{aligned}\right\} \qquad (5.18)$$

그런데 上式의 議論으로부터 平坦한 스펙크트럼을 갖는 白色雑音은 random 인 単位인팔스에 依해 만들어 짐이 나타났다. 즉, Poisson分布 random impulse는 白色雑音의 하나의 型이다. 個個의 impulse는 5.1.1에서 表示한 것 처럼

$$\lim_{\substack{Kb=1 \\ b\to 0}}\left|\frac{K\cdot b}{2\pi}\cdot\frac{\sin(w\,b/2)}{w\,b/2}\right|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

의 같은強度의 周波数가 0으로부터 ∞에 걸친 成分波의 겹침이고 各成分波의 位相差는 羅烈되어 있다.

그러나 따로따로의 임팔스(impulse)끼리는 何等의 関聯性은 없으므로 random인 임팔스列에 対하여 보면 各周波数間의 位相은 全然 任意이다. 따라서 다음과 같은 結論이 된다. "白色雑音은 周波数가 0부터 ∞(적어도 考慮하고 있는 周波数域보다 훨씬 넓은 周波数)에 걸쳐 連続된 成分波가 同一強度로 任意의 位相으로 混合된 것이다. 그 스펙크트럼은 平坦한 一定値이고 自己相関函数는 델타函数로 表示된다."

5.2.3 델타函数의 原形

델타函数는 特異한 性質을 가지는 函数(超函数)이나 前項에서 既히 델타函数의 定義든가 性質을 誘導하기 為해 使用한 것 처럼 普通의 単純한 函数의 極限形으로 생각하면 된다. 이 極限을 取하기 前의 普通의 函数를 "델타函数의 原形"(prototype)이라고 불리운다. 이들에는 式(5.8)의 三角팔스外에 다음과 같은 函数가 있다.

[短形팔스] $2a \geq 0$의 幅을 갖는 積分値가 1의 短形팔스

$$ka(t-t_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & (t_0-a < t < t_0+a) \\ 0 & (|t-t_0| \geq a)\end{cases} \qquad (5.19)$$

여기서

$$\int_{-\infty}^{\infty} ka(t-t_0)\,dt = 1 \qquad (5.20)$$

積分値를 1로 維持하면서 $a\to 0$의 極限을 取하면 短形팔스는 델타函数가 된다.

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0} ka(t-t_0) \qquad (5.21)$$

[Gauss 팔스] 短形팔스는 가장 単純한 原形으로 便利하지만 微分이 不連続이다. 그러므로 連続인 微分을 갖는 原形으로서 Gauss 팔스가 使用된다.

$$ga(t-t_0) = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\exp[-a^2(t-t_0)^2] \qquad (5.22)$$

여기서 $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} ga(t-t_0)\,dt = 1 \qquad (5.23)$$

\ $a\to\infty$의 極限에서 $ga(t-t_0)$는 無限大가 되고 그 下限에서 0에 接近한다. 따라서 $a\to\infty$의 極限에서

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to\infty} g_a(t-t_0) \qquad (5.24)$$

5.2.4 델타函數의 積分

델타函数 $\delta(t-t_0)$은 그 argument $t-t_0$의 偶函数라고 定義하는 것이 要望된다. 즉,

$$\delta(t-t_0) = \delta(t_0-t) \qquad (5.25)$$

이때

$$\int_{-\infty}^{t_0} \delta(t-t_0)\,dt = \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt \qquad (5.26)$$

이다.

델타函数를 $(-\infty, t)$의 範囲에서 積分하면 式(5,14), (5,26)로 부터 unit step函数 $U(t-t_0)$가 된다.

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\eta-t_0)\,d\eta = U(t-t_0) \qquad (5.27)$$

여기서

$$U(t-t_0) = \begin{cases} 0 & (t<t_0) \\ \frac{1}{2} & (t=t_0) \\ 1 & (t>t_0) \end{cases} \qquad (5.28)$$

逆으로 unit step 函数 U의 微分은 델타函数이다.

$$\frac{d}{dt}U(t-t_0) = \delta(t-t_0) \qquad (5,29)$$

5.2.5 델타函數의 微分

델타函数의 原形의 하나인 $t=t_0$을 中心으로 하는 幅 $2a$의 短形팔스는 2個의 unit step函数를 써서 다음과 같이 表示 할 수 있다.

$$k_a(t-t_0) = \frac{1}{2a}\{U(t-(t_0-a)) - U(t-(t_0+a))\} \qquad (5.30)$$

上式을 微分하면 式(5,29)로부터

$$k'_a(t-t_0) = \frac{1}{2a}\{\delta(t-(t_0-a)) - \delta(t-(t_0+a))\} \qquad (5.31)$$

그런데 短形팔스는 幅 $2a$를 0으로 하는 極限에서 델타函数가 되는 것 부터 式(5,31)에 依해 델타函数의 微分을 다음과 같이 定義 할 수 있다.

$$\delta'(t-t_0) = \lim_{a\to 0} k'_a(t-t_0)$$

그런데 函数 k_a와 $t=t_0$에서 連続인 微係数를 갖는 任意의 函数 $f(t)$의 積分을 取하면

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)k'_a(t-t_0)\,dt &= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\delta(t-(t_0-a)) - \delta(t-(t_0+a))]\,dt \\ &= \frac{1}{2a}[f(t_0-a) - f(t_0+a)] \qquad (5,32)\end{aligned}$$

式(5,32)의 $a\to 0$의 極限을 取하면 右辺은 任意函数 f의 $t=t_0$에 있어 微分에 負符号를 붙인 것이 되므로

$$\lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)k'_a(t-t_0)\,dt = -f'(t_0)$$

따라서 $t=t_0$에서 連続한 微分을 갖는 任意의 函数와 $t=t_0$을 中心으로 하는 델타函数의 微分의 積의 区間$(-\infty,\infty)$에서의 積分은 任意函数 f의 $t=t_0$에서의 微分을 附与한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)\,dt = -f'(t_0) \qquad (5.33)$$

마찬가지로 델타函数의 n圈의 微分은 그 原形의 어느것인가 하나의 n圈微分의 極限値로서 定義 할 수 있다. 萬若에 $f(t)$가 $t=t_0$에서 n圈微分이 可能하면 델타函数의 n圈微分에 関해서 다음의 微分公式이 成立한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t-t_0)\,dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0) \qquad (5.34)$$

上式에 있어 $f(t)=e^{-iwt}$로 노면 델타函数의 n圈微分의 Fourie 変換으로서 다음 公式을 얻는다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)e^{-iwt}\,dt = (iw)^n e^{-iwt_0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)e^{-iwt}\,dt = (iw)^n \qquad (5.35)$$

또 上式의 右辺에 式(5,15)를 適用하면 델타函数의 n圈微分의 Fourie変換은 델타函数의 Fourie 変換에 $(iw)^n$을 곱한 것이라는 것이 誘導된다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-t_0)e^{-iwt}\,dt = (iw)^n\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-iwt}\,dt$$

式(5.35)의 逆Fourie変換(或은 式(5.17a)의 t에 関한 微分)으로 부터 $(iw)^n$의 Fourie 変換이 $\delta^{(n)}(t)$인 것이 誘導된다.

$$\delta^{(n)}(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(iw)^n e^{-iwt_0}e^{iwt}\,d\omega \qquad (5.36)$$

$$\delta^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(iw)^n e^{iwt}\,d\omega \qquad (5.37)$$

5.3. 2個의 임팔스의 스펙크트럼

前前項에서 白色雑音에 対하여 論하고 自己相関函数와 스펙크트럼密度函数가 各各 델타函数와 $1/2\pi$임을 証明하였다. 또 Wiener-Khinchine의 公式으로서 다음의 関係式이 成立하는 것도 証明여였다.

$$\left.\begin{aligned}\delta(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\cdot e^{iwt}\,d\omega \\ 1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-iwt}\,dt\end{aligned}\right\} \qquad (5.38)$$

上式의 第一式에 있어 t를 $t-t_0$로 놓고 変形하면

$$\begin{aligned}\delta(t-t_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iw(t-t_0)}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt_0}e^{iwt}\,dw \qquad (5.39)\end{aligned}$$

즉, e^{-iwt_0}의 Fourie 変換은 $t=t_0$에 있어 作用하는 임팔스 $\delta(t-t_0)$이다. 따라서 上式의 逆Fourie 変換은

$$e^{-iwt_0}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,e^{-iwt}dt \qquad (5.40)$$

t와 w를 交換하여 t_0를 $-w_0$로 다시 써서 cosine 函数는

$$f_e(t)=\cos w_0 t=\frac{1}{2}\left[e^{iwt}+e^{-iwt}\right] \qquad (5.41)$$

이므로 그 Fourie変換은 式(5,39)의 關係를 使用하면

$$F_e(w)=\frac{1}{2}\left[\delta(w-w_0)+(w+w_0)\right] \qquad (5.42)$$

가 된다. 마찬가지로 sine函数에 対해서는

$$f_s(t)=\sin w_0 t=\frac{1}{2i}\left[e^{iwt}-e^{-iwt}\right] \qquad (5.43)$$

$$F_s(w)=\frac{1}{2}\left[\delta(w-w_0)-\delta(w+w_0)\right] \qquad (5.44)$$

가 된다.

即, cosine 波는 原点에 関해서 対称인 2個의 임팔스의 스펙크트럼, sine 波는 逆対称인 2個의 임팔스의 스펙크트럼이다. 또 t와 w의 役割을 바꿔보면 2組의 임팔스의 스펙크트럼은 sin 域은 cosine 函数가 된다.