

有限要素法에 의한 二次元連續體의 構造解析

Structural Analysis of Two-dimensional Continuum by Finite Element Method

李 宰 泳* · 高 在 君**
Jae Young Lee, Chae Koon Koh

Summary

This study was intended to computerize the structural analysis of two-dimensional continuum by finite element method, and to provide a preparatory basis for more sophisticated and more generalized computer programs of this kind.

A computer program, applicable to any shape of two-dimensional continuum, was formulated on the basis of 16-degree-of-freedom rectangular element

Various computational aspects pertaining to the implementation of finite element method were reviewed and settled in the course of programming. The validity of the program was checked through several case studies.

To assess the accuracy and the convergence characteristics of the method, the results computed by the program were compared with solutions by other methods, namely the analytical Navier's method and the framework method.

Through actual programming and analysis of the computed results, the following facts were recognized;

- 1) The stiffness matrix should necessarily be assembled in a condensed form in order to make it possible to discretize the continuum into practically adequate number of elements without using back-up storage.
- 2) For minimization of solution time, in-core solution of the equilibrium equation is essential. LDL^T decomposition is recommended for stiffness matrices condensed by the compacted column storage scheme.
- 3) As for rectangular plates, the finite element method shows better performances both in the accuracy and in the rate of convergence than the framework method. As the number of elements increases, the error of the finite element method approaches around 1%.
- 4) Regardless of the structural shape, there is a uniform tendency in convergence characteristics dependent on the shape of element. Square elements show the best performance.
- 5) The accuracy of computation is independent of the interpolation function selected.

I. 緒 論

從來의 構造設計는 設計者들이 쉽게 다룰 수 있

는 撓角撓度法이나 모우먼트 分配法과 같은 骨組構造의 解析方法에만 依存해 왔다. 따라서 構造物이 連續體의인 性格을 지니고 있는데도 骨組構造의 概念에 依해서 設計되는 境遇가 許多하였다. 擁壁의 壁

*全北大學校 農科大學

**서울大學校 農科大學

體를 캔틸레버나 보로 解析한다든지 排水開門의 軀體를 라멘으로 看做하는 것은 아주 普編의 通 用되고 있는 實例라고 할 수 있다.

이러한 在來의 設計方式은 결코 合理的인 것이 못되며 實際와 附合되는 力學의 解析에 根據해서 設計가 이루어지려면 設計에 實用的으로 活用될 수 있는 連續體의 解析方法이 講究되어야 할 것이다.

오래전부터 連續體 特히 二次元的인 連續體의 構造解析을 爲하여 여러가지 解析의 方法(Analytical Method)과 數值解析의 方法(Numerical Method)이 研究되어 왔다. 컴퓨터가 出現하기 以前에는 數值解析의 方法이 實用化되지 못하고 傳統的으로 解析의 方法이 連續體解析의 主된 方便이었다.

解析의 方法은 設計實務者들이 直接 다루기 힘든 數學的 處理를 要하므로 設計便覽의 많은 冊子에서는 設計者들이 容易하게 利用할 수 있도록 여러 가지 境遇에 對한 解析結果를 公式化하거나 또는 圖表化하여 提示하고 있다. 設計者들이 이러한 公式이나 圖表를 利用하므로써 이른바 合理的인 設計 根據資料를 마련할 수 있을지 모른다. 그러나 解析의 方法은 그 過程이 複雜하다는 點은 且置하고라도 構造形態, 荷重條件, 支持條件 등이 單純한 몇가지의 特殊한 境遇가 아니면 풀 수 없다는 缺點을 지니고 있어서 設計하려는 構造物의 力學的 條件에 꼭맞는 公式이나 圖表를 適用할 수 있는 境遇란 흔하지 않다. 結局 이러한 公式이나 圖表를 利用하기 爲해서는 力學的 條件을 實際와 다르게 假定하지 않으면 안된다. 이와같이 歪曲된 解析의 結果가 設計에 얼마나 큰 影響을 줄지는 쉽게 豫測할 수 없지만 바람직하지 못하리라는 것만은 確實하다.

最近에 와서는 構造物의 規模가 커지고 複雜해짐과 同時에 設計의 最適化가 重要視되는 傾向이 있어 在來의 設計方式으로부터의 脫皮가 切實히 要請된다. 이에 따라서 構造解析 또는 構造設計의 電算化는 必須的인 課題가 되고 있다.

解析의 方法은 위에서 말한 制限性으로 因하여 컴퓨터프로그램化하기에 適合하지가 못하다. 任意의 形態, 荷重條件, 境界條件을 다룰 수 있는 汎用 프로그램(General-purpose program)을 開發하려면 컴퓨터 指向的인 數值解析의 方法이 適合하다. 數值解析의 方法은 대체로 解析의 方法이 갖는 制限性을 克服할 수 있다.

二次元連續體의 構造解析을 爲한 數值解析의 方法의 種類는 다음과 같다.

1) Energy Method

2) Framework Method

3) 有限差分法(Finite Difference Method)

4) 有限要素法(Finite Element Method)

이중에서도 特히 有限要素法은 컴퓨터의 發達과 함께 構造解析의 가장 有力한 道具로 登場하게 되었다. 有限要素法의 特有的인 長點은 複雜하고 不規則한 問題를 크게 單純化시키거나 理想化시키지 않더라도 實際에 가까운 結果를 얻을 수 있으며 體系的인 프로그램이 容易하다는 點이다.

土木構造物의 設計에 따르는 二次元 連續體 構造解析을 中心問題로 한 本研究의 要旨는 다음과 같다.

- 1) 有限要素法에 依據한 二次元連續體 構造解析 프로그램의 作成
- 2) 프로그램作成에 따르는 諸問題點과 그 解決方案에 對한 考察
- 3) 方法 乃至 프로그램의 合理性 檢定
- 4) 他方法에 依한 結果值와의 比較
- 5) 構造物 및 要素의 形狀에 따르는 收斂性 檢定
- 6) 補間函數가 計算結果에 미치는 影響의 檢討

이 研究는 有限要素法의 새로운 理論이나 技法을 開發한다기 보다는 이미 定立되어 있는 理論을 適用하여 設計에 實質的으로 活用할 수 있는 프로그램을 開發하고 이와 同時에 有限要素法의 特性을 分析, 考察하므로써 좀더 高次的인 프로그램 開發에 參考가 될 수 있는 資料를 마련하는데 意義가 있다.

II. 有限要素法의 理論과 適用

1. 有限要素法의 基本概念

有限要素法의 基本原理는 全體의 解析領域(Solution Domain)을 有限個의 小領域, 즉 有限要素(Finite Elements)로 分割하고 各 要素內의 應力과 變位를 나타내는 函數를 假定하여 力學的 現象을 模型化하고, 이를 綜合하므로써 全體領域의 現象을 解析하는 것이다

彈性體에 一連의 荷重이 作用할 때, 一般的으로 荷重 對 變位의 關係는 荷重벡터(Force Vector), 剛度行列(Stiffness Matrix)과 變位벡터(Displacement Vector)의 關係式(System Equation)으로 表

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix}$$

現할 수 있다”

이를 簡略하게 表示하면

$$\{F\} = [K] \{d\} \dots \dots \dots (1)$$

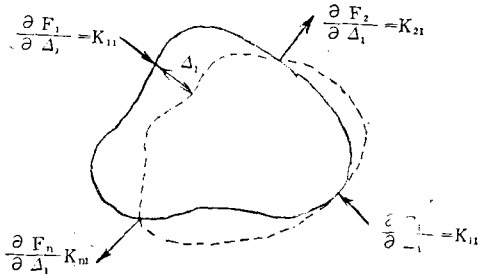


Fig.1. Force, displacement and stiffness.

트러스나 라멘과 같은 骨格形 構造物에 있어서 $\{F\}$, $\{d\}$ 및 $[K]$ 는 各各 節點力, 節點의 變位 및 部材剛도와 對應될 수 있기 때문에 限定된 個數의 未知數를 갖는 方程式이 成立된다. 그러나 連續體의 境遇에는 $\{F\}$, $\{d\}$, $[K]$ 가 領域內의 無數히 많은 點에 對해 定義될 수 있기 때문에 方程式 $\{F\} = [K] \{d\}$ 가 理論上 無限個의 未知數를 갖게 되어 實際의 無意味해진다.

有限要素法은 連續體를 有限個의 假想的인 構造要素로 分割하고 이 要素들이 節點에서만 서로 連結되어 있다고 看做하여 骨格形 構造物과 같이 方程式과 未知數의 個數를 有限個로 限定시킨다.

有限要素法의 核心은 適切한 補間函數(Interpolation Function)를 設定하여 要素內 任意點의 變位를 節點變位에 對한 函數로 表示하고 最小일의 定理(Potential Energy Theorem) 등에 依하여 要素剛度行列(Element Stiffness Matrix), $[K]^e$ 를 誘導하는 것이다. 各 節點間의 應力과 變形의 聯關性에 依據하여 各 要素의 剛度行列을 結合하면 全體剛度行列(Global Stiffness Matrix), $[K]^g$ 가 形成되며 이에 따라서 構造物 全體의 平衡方程式

$$\{F\} = [K]^g \{d\} \dots \dots \dots (2)$$

이 完成된다. 이를 풀어서 未知의 變位, 反力과 應力을 求하므로써 連續體의 解析이 마무리된다.

有限要素法에 依한 構造解析 過程은 다음과 같이 要約할 수 있다.

- 1) 構造物을 여러개의 要素로 分割한다.
- 2) 補間函數를 設定한다.
- 3) 要素剛度行列을 求한다
- 4) 要素剛度行列을 結合하여 全體剛度行列을 求

하고 平衡方程式을 세운다

- 5) 平衡方程式을 풀어서 未知의 變位를 求한다.
- 6) 反力과 應力을 計算한다.

2. 構造要素

二次元連續體는 構造의 理想化된 여러개의 平面要素의 結合體로 模型化할 수 있다. 이때 元來의 連續體와 模型사이에는 形態的으로나 力學的으로 相似性이 維持되어야 한다. 構造物을 要素로 分割하려면 우선 要素의 形態, 節點의 數와 要素의 自由度를 決定하여야 한다.

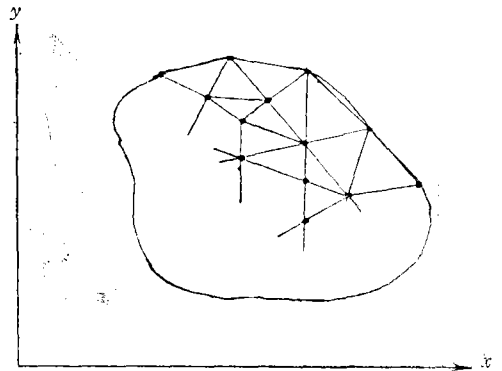
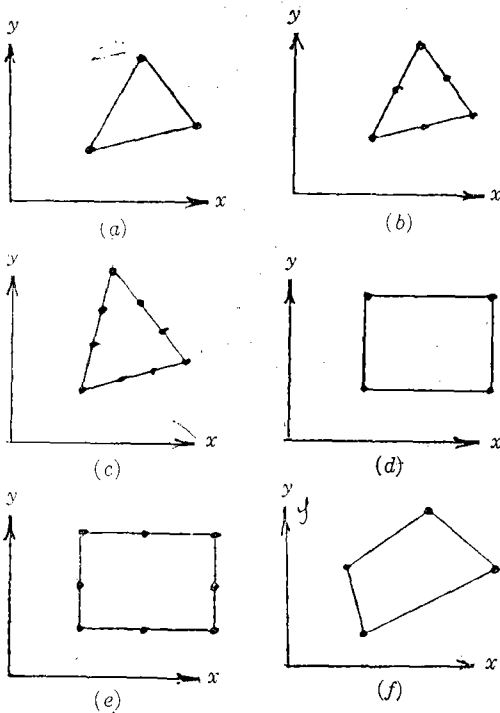


Fig. 2. Two-dimensional domain divided into triangular elements.

가. 要素의 形態

平面要素의 形態는 三角形, 四邊形, 曲線形 등으로 할 수 있는데 普遍的으로 많이 利用되는 것은 三角形과 直四角形이다. 三角形要素는 어떠한 形態의 2次元의 構造物도 比較的 精密하게 表現할 수 있는 利點이 있으나 要素의 局部座標系(Local Coordinates)가 構造物 全體에 對한 直角座標系와 一致하지 않으므로 座標轉換을 要하는 難點이 있다. 直四角形 要素는 曲線的인 境界線에 맞추기가 어려운 點이 있는데 高性能의 大形컴퓨터를 使用할 境遇에는 要素를 充分히 細게 分割하므로써 이를 解決할 수 있다. 또 直四角形 要素는 座標轉換이 必要없고 컴퓨터에 依한 Automatic Mesh Generation¹²⁾이 容易하기 때문에 現在 많이 利用되는 傾向이 있다⁹⁾. 計算結果의 正確性도 直四角形要素와 三角形要素보다 높은 것으로 나타났⁹⁾

本研究에서는 주로 直四角形要素를 重點的으로 考察하였으며 또 直四角形要素를 基準해서 프로그램을 作成하였다.



(a), (b), (c) Three-, six- and ten-node triangle
 (d), (e) Four- and eight-node rectangle
 (f) General quadrilateral

Fig. 3. Shapes of two-dimensional elements.

나. 節點의 數와 自由度

節點은 要素의 모퉁이뿐만 아니라 要素의 內部 또는 境界線에도 둘 수 있다. 하나의 要素가 갖는 節點變位의 數를 自由度라고 하며 이는 節點의 數와 各 節點에 配定되는 變位의 數에 依해서 決定된다.

要素의 自由度를 增加시키면 力學的 現象을 좀더 實際와 近似하게 模型化할 수 있고, 所要의 正確度를 얻는데 必要한 要素의 數를 줄일 수 있다. 그러나 自由度를 크게 하는 것이 반드시 有利하다고 할 수는 없다. 問題의 性格에 따라서는 自由度를 줄이고 대신에 要素의 數를 높이는 것이 有利할 수도 있다⁹⁾. 本研究에서는 要素의 自由度를 16으로 하여 프로그램을 作成하였다.

3. 補間函數

가. 補間多項式(Interpolation Polynomial)

全體의 解析領域을 여러개의 構造要素로 分割했을 때 要素의 力學的 性質, 即 剛度行列을 求하기 爲해서는 要素內 任意點의 變位를 近似的으로 推定

하는 函數를 假定할 必要가 있다. 이 函數는 우선 多項式의 形態로 된 補間多項式으로 表現되며, 이 補間多項式으로부터 節點의 變位와 任意點의 變位를 聯關시켜주는 補間函數를 誘導해 낼 수 있다.

二次元的 平面에 對한 補間多項式은 x, y 두개의 變數로 構成된다.

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \dots + \alpha_n x^i y^k$$

또는

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i y^k \dots \dots \dots (3)$$

Gallegher¹⁰⁾는 아래와 같이 二次元的 n 次補間多項式을 便利하게 展開하는 方法을 提示하였다.

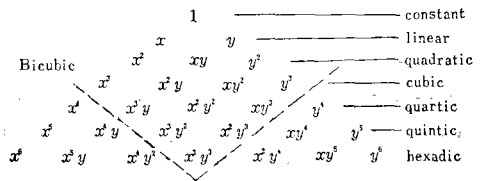


Fig. 4. Array of terms of polynomial series in two-dimensions.

補間多項式의 未定係數 α_i 는 節點에서의 函數值가 節點의 變位와 같다는 條件으로부터 생기는 一連의 方程式으로부터 求할 수 있다.

그러므로 必要한 數의 方程式을 얻기 爲해서는 補間多項式의 項數와 要素의 自由度가 一致하여야 한다. 未定係數 α_i 를 求하므로서 補間多項式은 窮極的으로 節點變位에 關한 函數로 轉換될 수 있다. 結局 要素內 任意點의 變位 $w(x, y)$ 는 다음과 같이 節點의 變位 w_i 와 補間函數 N_i 에 依해서 表現될 수 있다.

$$w(x, y) = \sum N_i w_i = [N] \{w\} \dots \dots \dots (4)$$

나. 補間函數의 必要條件

要素를 細分함에 따라서 有限要素法에 依한 近似解(Approximate Solution)가 完全解(Exact Solution)에 收斂하고 또 要素의 接合部에서 變位의 連續性(Continuity)이 維持되도록 하기 爲해서는 다음의 두가지 條件이 充足되도록 補間函數를 定하여야 한다.

1) 完全性的 條件(Completeness Requirement)

要素의 크기를 極小化시킬 때 w 와 $\partial w / \partial n$ 가 要素內에서 一定한 값이 되어야 한다. 다시 말하면 要素內에 어떠한 變形도 發生하지 않는 剛體運動을 나타낼 수 있어야 한다. 따라서 補間多項式에도 一定變形度(Constant Strain State)를 나타내는 項인 $1, x, y, xy$ 가 包含되어야 한다.

2) 適合性的 條件(Compatibility Requirement)

要素의 接合部에서 變位 w 와 $\partial w/\partial n$ 가 連續的이어야 한다. 骨組構造物의 境遇에는 各要素가 節點에서만 만나기 때문에 要素間의 適合性이 自動的으로 成立된다. 그러나 連續體에 對해서는 適合性的條件을 充足시키는 것이 容易하지 않다. 境遇에 따라서는 適合性條件에 맞지 않는 補間函數를 設定할 수도 있으며 事實上 이때에도 良好한 結果를 얻을 수 있다⁹⁾.

다. 補間函數의 誘導

直四角形 要素의 節點에서 w 와 $\partial w/\partial n$ 가 連續性을 가지려면 最少限 4個의 自由度($w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$)가 必要하다. 直四角形要素의 4個節點에 各各 4個의 自由度를 設定하면 要素의 全體 自由度는 16이 된다. 그러므로 補間多項式의 項數는 16個가 되어야 한다. 한편 Fig. 4에서 보는 바와 같이 4次, 5次 및 6次完全多項式은 各기 15個, 21個 및 28個의 項으로 되어 있다. 16個의 項을 얻기 爲해서는 5次多項式에서 5個의 項을 除去하거나 6次多項式에서 12個의 項을 除去해야 할 것이다. 어떤 項을 除去할 것인지는 위에서 論한 두가지의 條件外에 幾何學的 等方性(Geometric Isotropy)과도 關聯된다. 幾何學的 等方性을 充足시키기 爲해서는 補間多項式은 對稱的이어야 한다⁹⁾

本研究에서는 以上の 諸條件을 充足시키는 16項

補間多項式 3個를 選定하여 補間函數를 誘導하고 그 結果를 比較하였다*.

이들 補間多項式중에서 Bicubic의 補間多項式으로부터 補間函數를 誘導하는 過程을 例로 들면 다음과 같다.

Bicubic의 補間多項式은

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^2 y + \alpha_7 x^2 y^2 + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 y^2 + \alpha_{10} x^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} x^3 y^2 + \alpha_{13} y^3 + \alpha_{14} xy^3 + \alpha_{15} x^2 y^3 + \alpha_{16} x^3 y^3$$

벡터로 表示하면

$$w(x,y) = [P] \{ \alpha \} \dots \dots \dots (5)$$

여기서

$$[P] = [1, x, y, xy, \dots \dots \dots x^3 y^3]$$

$$\{ \alpha \} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots \dots \dots \alpha_{16}]$$

4個의 節點에서 函數值가 各 節點의 變位와 같고 놓으면 16元 1次聯立方程式을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 x_1 y_1 + \dots + \alpha_{16} x_1^3 y_1^3 \\ (\partial w/\partial x)_1 &= \alpha_2 + \alpha_4 y_1 + \dots + \alpha_{16} \cdot 3x_1^2 y_1^3 \\ (\partial w/\partial y)_1 &= \alpha_3 + \alpha_4 x_1 + \dots + \alpha_{16} \cdot 3x_1^3 y_1^2 \\ (\partial^2 w/\partial x \partial y)_1 &= \alpha_4 + \dots + \alpha_{16} \cdot 9x_1^2 y_1^2 \\ w_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 x_2 y_2 + \dots + \alpha_{16} \cdot x_2^3 y_2^3 \\ (\partial w/\partial x)_2 &= \alpha_2 + \alpha_4 y_2 + \dots + \alpha_{16} \cdot 3x_2^2 y_2^3 \\ \dots \dots \dots \\ (\partial^2 w/\partial x \partial y)_4 &= \alpha_4 + \dots + \alpha_{16} \cdot 9x_4^2 y_4^2 \end{aligned}$$

行列式으로 表示하면

$$\{w\} = [G] \{ \alpha \} \dots \dots \dots (6)$$

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ (\partial w/\partial x)_1 \\ (\partial w/\partial y)_1 \\ \vdots \\ (\partial w/\partial x \partial y)_4 \end{Bmatrix}, [G] = \begin{Bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \dots & x_1^3 y_1^3 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 & \dots & 3x_1^2 y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & \dots & 3x_1^3 y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 9x_4^2 y_4^2 \end{Bmatrix}, \{ \alpha \} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{16} \end{Bmatrix}$$

變位는 다음과 같이 表示된다.

$$w^e(x,y) = \sum_{i=1}^4 [N_i w_i + N_i (\partial w/\partial x)_i + N_i (\partial w/\partial y)_i + N_i (\partial^2 w/\partial x \partial y)_i] \dots \dots \dots (8)$$

補間函數 $[N]$ 은 $[G]^{-1}$ 을 求하면 自動的으로 決定되는데 이때 다음과 같은 問題가 發生할 수 있다

1) 補間多項式을 어떻게 假定하느냐에 따라서 $[G]^{-1}$ 이 存在하지 않을 수도 있다.

2) 要素의 自由度가 많아지면 $[G]$ 를 세우는데 勞力이 많이 든다.

(6)式을 풀면

$$\{ \alpha \} = [G]^{-1} \{w\}$$

(5)式에 代入하면

$$w(x,y) = [P][G]^{-1} \{w\} = [N] \{w\} \dots \dots (7)$$

$$[N] = [P][G]^{-1}$$

(7)式에서 보는 바와 같이 補間函數 $[N]$ 를 導入하므로서 任意點의 變位 $w(x,y)$ 를 節點變位 $\{w\}$ 의 函數로 表現할 수 있다. 節點 i 의 變位를 $\{w_i, (\partial w/\partial x)_i, (\partial w/\partial y)_i, (\partial^2 w/\partial x \partial y)_i\}$ 라고 하면 要素內의 任意點의

*IV, 3項 參照

3) 컴퓨터 演算時間이 많이 所要된다.

補間函數를 以上에서 論한 方法과는 달리 Hermitian Interpolation Formula¹¹⁾를 利用해서 直接的으로 誘導 할수도 있는데 計算過程이 簡單한 뿐만 아니라 위와 같은 問題를 避할 수가 있다⁸⁾. Hermitian Interpolation Formula에 依하면 Bicubic Polynomial의 境遇와 同一한 結果를 얻게 된다.

本研究에서는 上記의 두 方法 중 어느 方法으로나 處理할 수 있도록 컴퓨터 프로그램을 作成하였으며 各 補間多項式에 따르는 收斂性을 比較 檢討하였다.

4. 剛度行列과 平衡方程式

構造物 全體에 對한 平衡方程式이 (2)식과 같이 剛度行列, 荷重벡터 및 變位벡터로 構成되는데 個個의 要素에 對한 平衡方程式도 同一한 形態를 取한다. 要素에 對한 剛度行列은 最少일의 定理에 依하여 應力과 變形度의 關係式으로부터 求할 수 있다.

가. 應力과 變形度의 關係

二次元連續體의 應力과 變形度의 關係는 線모멘트(Line Moment)와 曲率(Curvature)의 關係式으로 나타낼 수 있다.

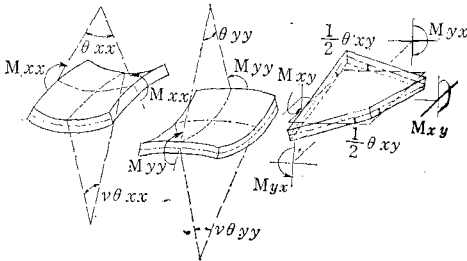


Fig. 5. Curvatures θ_{xx} , θ_{yy} and θ_{xy} caused respectively by line moments M_{xx} , M_{yy} and M_{xy} .

Fig. 5에서 x軸과 y軸에 對한 휨모멘트를 各各 M_{xx} , M_{yy} , 비틀림모멘트를 M_{xy} 라고 하고, 이에 對應하는 曲率을 各各 θ_{xx} , θ_{yy} , θ_{xy} 라고 하면 要素의 應力벡터 $\{\sigma\}$ 와 變形度벡터 $\{\epsilon\}$ 는

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \theta_{xx} \\ \theta_{yy} \\ \theta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix}$$

이때 應力과 變形度의 關係式은

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \dots (9)$$

여기서 w ; z方向의 變位
 E ; 彈性係數
 ν ; Poisson의 比
 t ; 슬래브의 두께

(9)式을 簡略하게 表示하면

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \dots (10)$$

나. 要素의 剛度行列과 平衡方程式

前述한 바와 같이 일단 應力과 變形度의 關係가 設定되면 最少일의 定理에 依하여 要素의 剛度行列을 誘導할 수 있다

平面要素에 對한 Potential Energy는

$$\pi^{(e)} = \frac{1}{2} \iint [\epsilon]^T [\sigma] dA - \sum_i [W]_i [P]_i \dots (11)$$

3, 다項에서 이미 言及했듯이 節點에서의 變位벡터는

$$\{w\}_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{xyi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ (\partial w / \partial x)_i \\ (\partial w / \partial y)_i \\ (\partial^2 w / \partial x \partial y)_i \end{Bmatrix}$$

이때, 이에 對應되는 荷重벡터는

$$\{P\}_i = \begin{Bmatrix} S_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{xyi} \end{Bmatrix}$$

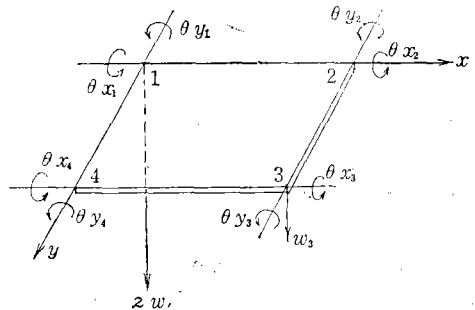


Fig. 6. Geometry of a rectangular element in bending.

(11)式에 最少일의 定理을 適用하면 要素의 自由度와 同一한 個數의 方程式을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \pi^{(e)}}{\partial w_i} \\ \frac{\partial \pi^{(e)}}{\partial (\partial w / \partial x)_i} \\ \frac{\partial \pi^{(e)}}{\partial (\partial w / \partial y)_i} \\ \frac{\partial \pi^{(e)}}{\partial (\partial^2 w / \partial x \partial y)_i} \end{Bmatrix} = \{0\}, \quad i=1, 2, 3, 4 \dots (12)$$

(12)式을 整理하면 (13)式의 要素平衡方程式이 된다.

$$16 \times 16 \quad [K]^{(e)} \quad 16 \times 1 \quad \{w\} - \{P\} = 0 \dots \dots \dots (13)$$

또한 要素의 剛度行列 $[K]^{(e)}$ 의 Coefficient는 (14)式과 같이 된다.

$$k_{ij} = \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)} \iint (A) \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dA \dots \dots \dots (14)$$

積分記號안의 값은 變數 x 와 y 에 關한 多項式으로 表示되므로 解析의인 積分이 容易하다. 또한 數值積分(Numerical Integration)을 利用할 수도 있다

本研究에서는 演算時間을 줄이고 正確도를 높이기 爲하여 解析的 積分方式에 依하여 프로그램을 作成하였다.

다. 構造物 全體의 剛度行列과 平衡方程式

全體의 平衡方程式은 各節點의 變位가 그 節點에서 만나는 모든 要素에 對하여 同一하다는 條件을 土臺로 個個의 要素平衡方程式을 結合하므로써 얻을 수 있으며 (13)式의 要素平衡方程式과 同一한 形態를 取한다

$$n \times n \quad n \times 1 \quad n \times 1 \\ [K]^* \quad \{W\} - \{P\} = 0$$

여기서 n 은 全體의 自由度이다.

實際의 컴퓨터프로그램에 있어서는 다음과 같은 體系의인 方法으로 要素의 剛度行列을 結合하여 全體剛度行列을 構成하므로써 全體平衡方程式이 自動的으로 完成된다. $[K]^*$ 를 組立하는 一般의인 過程은 다음과 같다.

- 1) $n \times n$ 과 $n \times 1$ 의 Master Matrix를 設定하고 Coefficient를 零으로 Initialize한다.
- 2) 要素內 節點番號와 全體의인 節點番號의 相互關係를 定한다
- 3) 要素剛度行列의 Coefficient를 2)에서 定한 關

係에 따라서 Master Matrix의 該當되는 Coefficient에 더한다.

4) 모든 要素에 對해서 3)의 過程을 되풀이하면 $n \times n$ 의 $[K]^*$ 와 $n \times 1$ 의 $\{P\}$ 가 形成된다

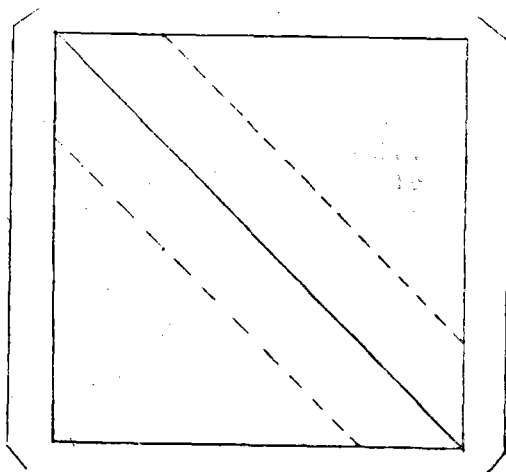


Fig. 7. Overall pattern of the global stiffness matrix, $[K]^*$

라. 剛度行列의 分割(Partitioning)과 縮少(Condensation)

全體 剛度行列은 Fig. 7과 같은 形態의 對稱帶狀行列(Symmetric Banded Matrix)이며 항상 Singular이다. 이는 方程式(15)가 構造物 全體의 自由度를 모두 包含하고 있기 때문이다. 따라서 $[K]^*$ 의 逆行列은 存在하지 않는다. 全體의 平衡方程式이 唯一解를 갖기 爲해서는 最少限 하나 또는 그 以上の 節點變位의 값을 定해 주므로써 $[K]^*$ 를 Nonsingular化시키지 않으면 안된다.

構造物의 支持點에서는 變位가 零 또는 어떤 既知의 값을 갖게된다.

平衡方程式을 풀기 爲해서는 우선 既知와 未知의 自由度를 分離해서 再整列할 必要가 있다.

$$\begin{Bmatrix} [K_{11}] : [K_{12}] \\ \dots \dots \dots \\ [K_{21}] : [K_{22}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_1\} \\ \dots \\ \{w_2\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \dots \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} = 0 \dots \dots \dots (16)$$

여기서 $\{w_2\}$ 와 $\{P_1\}$ 은 各各 既知의 變位와 既知의 外力으로 構成되어 있으며 未知의 變位를 未知數로 한 最終的인 平衡方程式은 (17)式으로 縮少된다.

$$[K_{11}]\{w_1\} - \{P_1\} = -[K_{12}]\{w_2\} \dots \dots (17)$$

$[K_{11}]$ 은 對稱의 帶狀行列로서 Nonsingular이며 (17)式은 唯一解를 갖는다. 方程式을 풀기 爲해서는 $[K_{11}]$ 이 컴퓨터에 記憶되어야 하는데 原形 그대로를 시려면 憶기 記 大한莫 記憶容量이 所要되며 演

算時間으로 불메도 極히 非效率의이다²⁾. 實際의으로는 對稱帶狀行列의 特性을 利用하여 $[K_{11}]$ 을 縮少시켜야 한다.

本研究에서는 Compacted Column Storage Scheme²⁾에 依하여 $[K_{11}]$ 이 縮少되도록 프로그램을 作成하였다*.

다. 平衡方程式의 풀이

全體의 平衡方程式은 窮極의으로 剛度行列 $[K_{11}]$ 을 풀므로서 解決된다. 行列式은 一般의으로 Gauss Elimination 等의 方法으로 쉽게 풀 수 있지만, 前項에 記述한 바와 같이 $[K_{11}]$ 이 縮少되어 記憶된 狀態에서는 이러한 方法을 適用할 수 없다. $[K_{11}]$ 이 壓縮된 狀態에서 別途의 Working Storage가 없이 平衡方程式을 풀기 爲해서는 特殊한 技法이 必要하다.

本研究에서는 LDL^T Decomposition 方法²⁾에 依據하여 프로그램을 作成하였다.

5. 節點의 反力 및 內力의 計算

(17)式의 平衡方程式으로부터 구해진 節點變位の 값을 原來의 要素平衡方程式인 (13)式에 代入하므로서 各要素別로 節點力을 算出할 수 있다.

即 한 要素를 獨立의으로 보았을 때 各 節點에 發生하는 힘은 (13)式으로부터

$$\{P\} = [K]^e \{w\}$$

支持點에서의 反力은 그 支持點에서 만나는 모든 要素의 節點力을 合하므로서 얻을 수 있다.

$\{R\} = \sum_m [K]^e_m \{w\}_m$ (m 은 支持點에서 만나는 모든 要素)

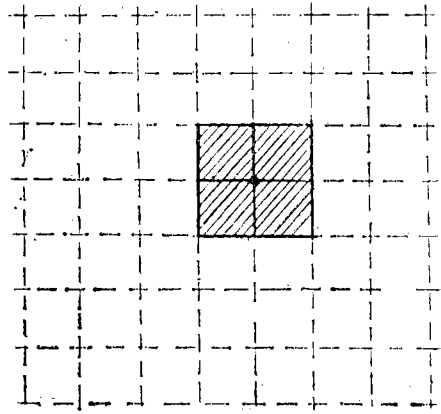
任意 節點에서의 內力은 그 內力이 發生하는 斷面이 形成되도록 한 方向의 要素만을 結合하므로서 求할 수 있다.

$\{Q\} = \sum_m [K]^e_m \{w\}_m$ (m 은 內力이 發生하는 斷面을 構成하는 모든 要素)

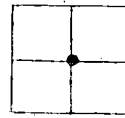
III. 컴퓨터 프로그램化

有限要素法은 性格上 컴퓨터指向의인 方法이며 이에 依한 構造解析도 컴퓨터프로그램化되었을 때 비로서 實質의인 意味를 갖는다.

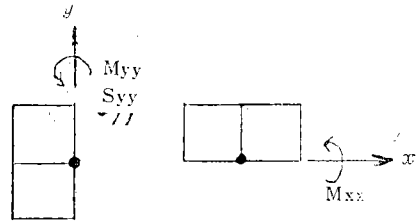
有限要素法의 가장 큰 長點中的 하나는 어떠한 形態, 荷重條件 및 境界條件이라도 處理할 수 있는 汎用性이라고 할수 있다. 이러한 汎用性을 살리려면



(a).



(b)



(c)

- (a) Elements connected at a node.
- (b) Elements forming support reactions.
- (c) Elements forming internal forces.

Fig. 8. Assemblage of nodal forces.

構造物을 可及的 많은 要素로 分割할 수 있도록 프로그램化되어야 한다. 處理 可能한 要素의 最大限度은 一次的으로 컴퓨터의 容量과 演算時間에 依해서 制限을 받는다. 補助記憶裝置를 利用하면 所要되는 記憶容量을 줄일 수도 있지만 그 代身에 處理時間이 길어지게 된다. 所要記憶容量과 演算時間은 電算處理費用과 直接的인 關聯이 있으며, 서로 相反되는 制限條件으로서 프로그램 作成上 考慮되지 않으면 안된다. 만일 컴퓨터의 記憶容量보다는 所要處理時間에 더 큰 制限을 받는다면 可及的 많은 Array를 使用하여 Routine을 줄이거나 簡略化하므로서 演算時間을 短縮하여야 할 것이다. 反對의 境界라면 Routine이 길어지더라도 Array의 數를 最少

* III項 參照

限으로 줄일 필요가 있다²⁾.

有限要素法으로 結果를 얻기까지는 수많은 方程式을 풀어야 하기 때문에 多數의 乘除算에 따르는 Truncation Error가 計算結果에 큰 影響을 줄수도 있다. 이점을 考慮하지 않고 프로그램을 作成한다면 要素의 數를 增加시키더라도 Truncation Error가 急增하여 計算結果가 收斂하지 않을 수도 있다.

有限要素法에 따르는 또하나의 問題點은 入力 데이터가 複雜해지기 쉽다는 것이다. 要素의 分割, 節點番號와 節點座標의 賦與, 要素와 節點의 關係 등을 일일이 데이터로 入力시키려면 데이터 作成에 많은 勞力이 所要될 뿐만 아니라 要素의 數가 많을 때에는 錯誤의 原因이 되기 쉽다.

위에서 記述한 有限要素法의 프로그램化에 따르는 主要問題點들을 要約하면 다음과 같다.

- 1) 所要되는 컴퓨터의 記憶容量
- 2) 處理時間
- 3) Truncation Error
- 4) 格子構成을 爲한 入力데이터作成

이러한 問題를 效果적으로 解決하기 爲해서는 數直解析과 컴퓨터프로그래밍의 諸技法을 適切히 活用할 必要가 있다.

本研究에서는 이러한 問題와 關聯해서 다음과 같은 方式으로 프로그램을 作成하였다.

1) 가장 많은 Core Memory을 차지하는 全體剛度行列을 Compacted Column Storage Scheme으로 縮小시키고 이와같이 縮小된 狀態에서 平衡方程式을 LDL^T Decomposition 方式에 依하여 푼다.

2) 要素剛度行列의 計算에 3가지의 Option, 卽 Option A—(補間多項式으로부터 誘導)

Option B—(Hermitian Interpolation Formular를 利用)

Option C—(直四角形要素의 長邊과 短邊의 길이에 對한 函數로 만들어서 要素의 크기가 변할 때마다 剛度行列을 計算)

를 設定하여 크기가 同一한 要素로만 構成되어 있던 Option B, 크기가 여러가지일 境遇에는 Option C, 願하는 別途의 補間多項式을 適用하고자 할 때는 Option A등, 必要에 따라서 Option을 選定하므로써 處理時間을 短縮시킬 수 있도록 한다.

3) 모든 Real Variable을 Double Precision으로 하여 Truncation Error를 줄인다.

4) Automatic Mesh Generation으로서 要素의 分割, 節點番號의 賦與, 座標計算 등이 컴퓨터에 依해서 自動적으로 遂行되도록 한다.

이 프로그램은 한개의 主프로그램(Main Program)과 10개의 補助프로그램(Sub-program)으로 構成되어 있으며 各프로그램의 主要內容은 다음과 같다.

1. Main Program

I/O 作業이 이루어지며, Automatic Mesh Generation, Matrix Partitioning, 荷重의 分類, 反力 및 內力의 計算 등이 遂行된다.

2. Sub-program

1) Subroutine COORD; 直角座標을 주어진 三角形에 對한 自然座標(Natural Coordinate)로 轉換한다.

2) Subroutine LOADC; 直角座標로 入力된 集中荷重을 節點에 配定한다.

3) Subroutine LOADD; 分布荷重을 自然座標를 利用하여 節點에 配定한다.

4) Subroutine LOADE; 線荷重을 節點에 配定한다.

5) Subroutine MTXINV; Inverted Matrix를 計算한다.

6) Subroutine STFINT; 假定된 Interpolation Polynomial로부터 Matrix[G]를 求하고, Subroutine MTXINV에서 計算된 [G]⁻¹로부터 補間函數를 誘導하고 要素剛度行列을 求한다.

7) Subroutine STFMAT; Hermitian Interpolation Formular에 依해서 補間函數를 誘導하고 要素剛度行列을 計算한다.

8) Subroutine STFDSK; 既定된 函數에 直四角形要素의 長邊과 短邊의 길이를 代入하여 要素剛度行列을 計算한다.

3) Subroutine LOCAL 1; Compacted Column Storage Scheme으로 全體剛度行列을 組立한다.

10) Subroutine MTXSOL; LDL^T Decomposition 으로 Matrix를 푼다.

이 프로그램의 一般順序圖는 Fig. 9과 같다.

IV. 結果 및 考察

1. 프로그램의 檢定

프로그램의 合理性을 檢定하기 爲하여 構造物의 形狀, 荷重條件 및 持支條件이 다른 10個의 境遇에 對한 計算結果를 檢討하였으므로 그 中에 한가지를 實例로 提示하였다. 이것은 算出된 反力, 內力 및

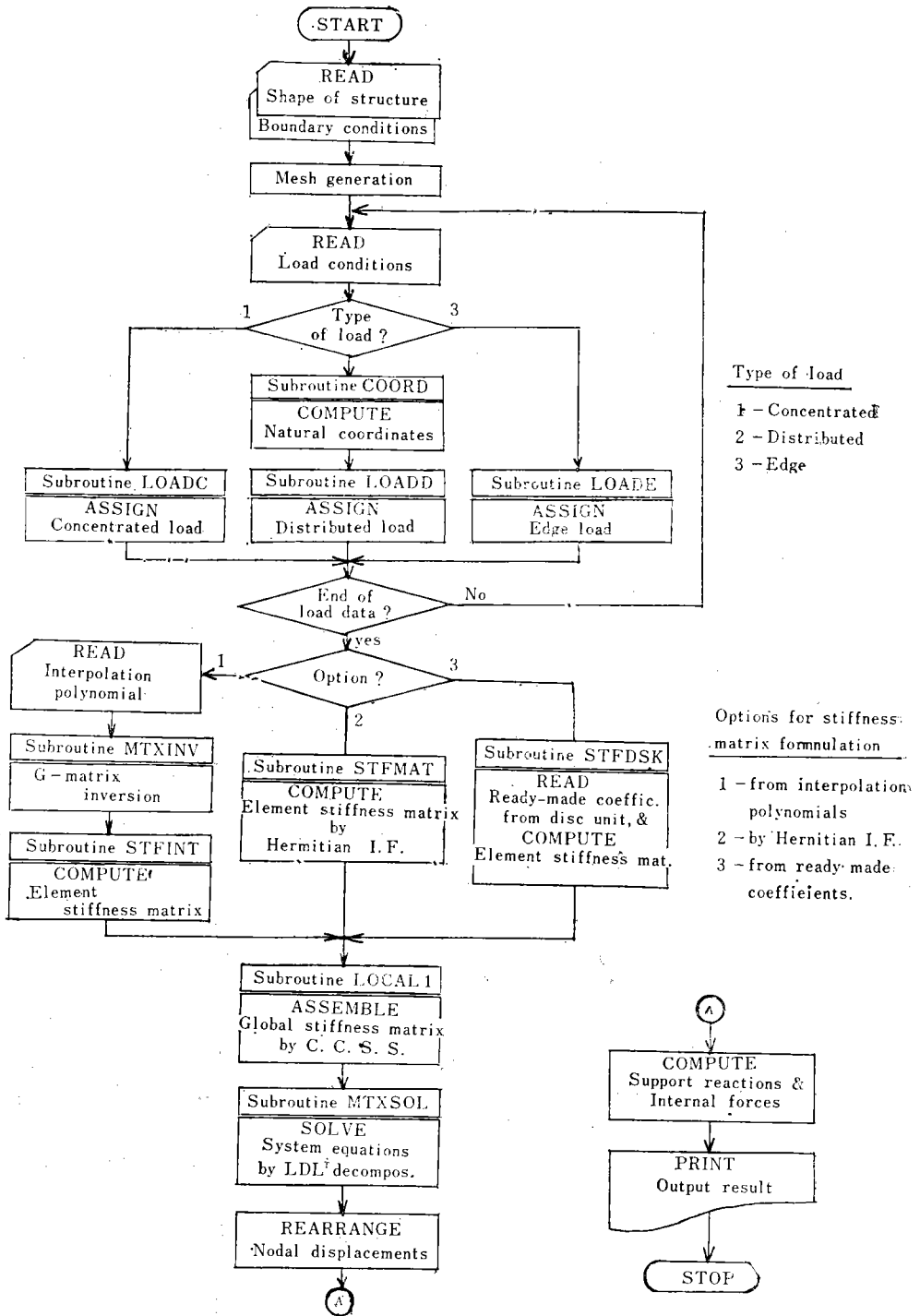


Fig. 9. General flow chart of the program

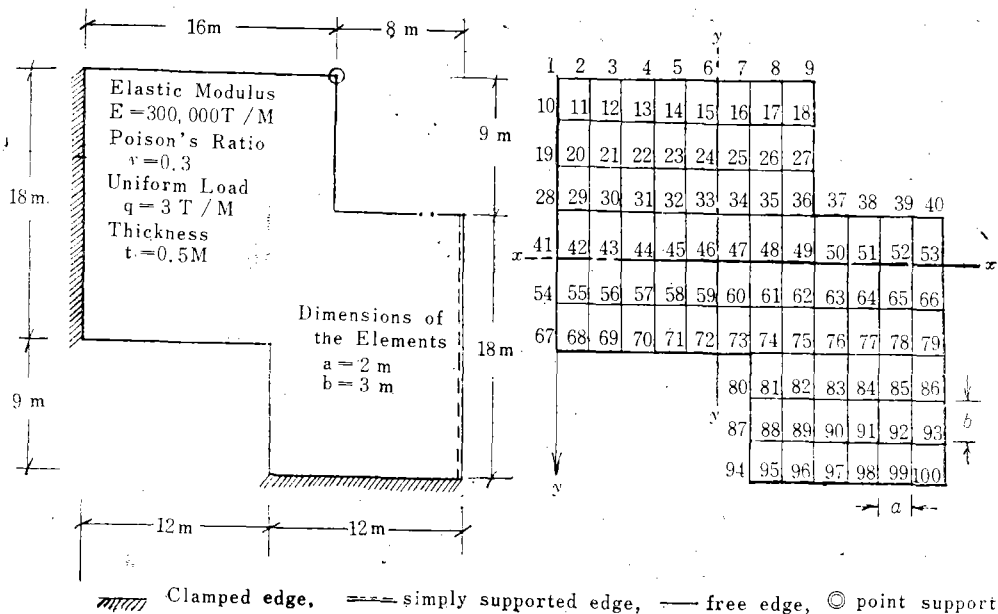


Fig. 10. A case study for the test of the program.

變位の 값에서 全體의인 矛盾이 없음을 確認하기 爲한 것이며, 이것으로 프로그램의 正確性이 立證되는 것은 아니다. 프로그램 또는 方法自體의 正確性 及至 精密度는 다음 項에 記述한 解析의 方法과 的 比較檢討를 通해서 判斷될 수 있을 것이다.

가. 條件의 假定

프로그램의 檢定을 爲하여 假定된 條件의 一例는 Fig. 10과 같다. 이의 電算結果는 Table-3와 같다.

나. 反力

1) 全支持點의 垂直反力

$$R_h = R_1 + R_9 + R_{10} + R_{19} + R_{28} + \dots + R_{99} + R_{100} = -1404.0(T)$$

2) 全體의 荷重

$$W_h = 3.0 \times (16.0 \times 9.0 + 24.0 \times 9.0 + 12.0 \times 9.0) = 1404.0(T)$$

3) 垂直力의 總和

$$R_h + W_h = -1404.0 + 1404.0 = 0.0$$

다. Y-Y斷面의 휨모멘트

1) 斷面모멘트

$$M_{yy} = (M_{y_8/2} + M_{y_{18}} + M_{y_{24}} + M_{y_{33}} + M_{y_{48}} + M_{y_{69}} + M_{y_{72}/2}) \times b = 1069.8(T.M)$$

2) 反力모멘트

$$M_{rm} = RM_{y_1} + RM_{y_{10}} + RM_{y_{19}} + RM_{y_{28}} + RM_{y_{41}} + RM_{y_{64}} + RM_{y_{87}} = -6251.2(T.M)$$

3) 垂直反力에 依한 모멘트

$$M_{rh} = (R_1 + R_{10} + R_{19} + R_{28} + R_{41} + R_{64} + R_{87}) \times 10.0 = 2481.4(T.M)$$

4) 荷重에 依한 모멘트

$$M_w = 3.0 \times (10.0 \times 18.0) \times 5.0 = 2700.0(T.M)$$

5) 모멘트의 總和

$$M_{yy} + M_{rm} + M_{rh} + M_w = 1069.8 - 6251.2 + 2481.4 + 2700.0 = 0.0$$

라. X-X斷面의 剪斷力

1) 剪斷力

$$S_{xx} = (S_{x_{41}/2} + S_{x_{42}} + S_{x_{43}} + \dots + S_{x_{62}} + S_{x_{63}/2}) \times 9 = 100.6(T)$$

2) 垂直反力

$$R_h = R_1 + R_9 + R_{10} + R_{19} + R_{28} + R_{40} + R_{41} + R_{63} = -748.6(T)$$

3) 荷重

$$W_h = 3.0 \times (16.0 \times 12.0 + 8.0 \times 3.0) = 648.0(T)$$

4) 垂直力의 總和

$$S_{xx} + R_h + W_h = 100.6 - 748.6 + 648.0 = 0.0$$

마. 變位

Fig. 11은 構造物의 變形狀態를 나타내기 爲해서 變位의 算出值를 一定한 縮尺으로 圖解한 것이다.

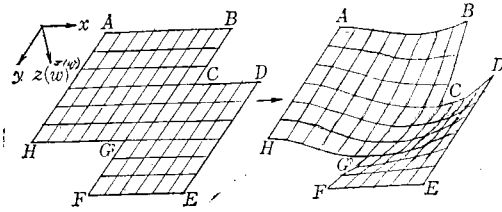
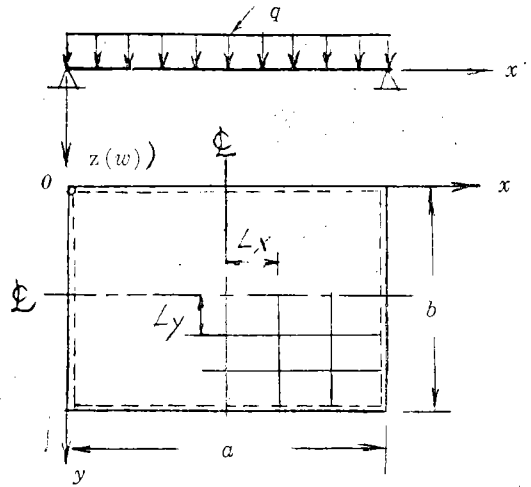


Fig. 11. Distorted evolution of displacement shape.

그림에서 보는바와 같이 A-H邊과 E-F邊에서 變位 w 와 기울기 $\partial w/\partial n$ 가 零이고, D-E邊 및 B點에서는 變位가 零이다. 이는 實際로 期待되는 바와 같 一致한다.



$E=300,000\text{T/M}^2$ $\nu=0.3$
 $t=0.05\text{M}$ $q=0.5\text{T/M}^2$

Fig. 12. Structural system for convergence study.

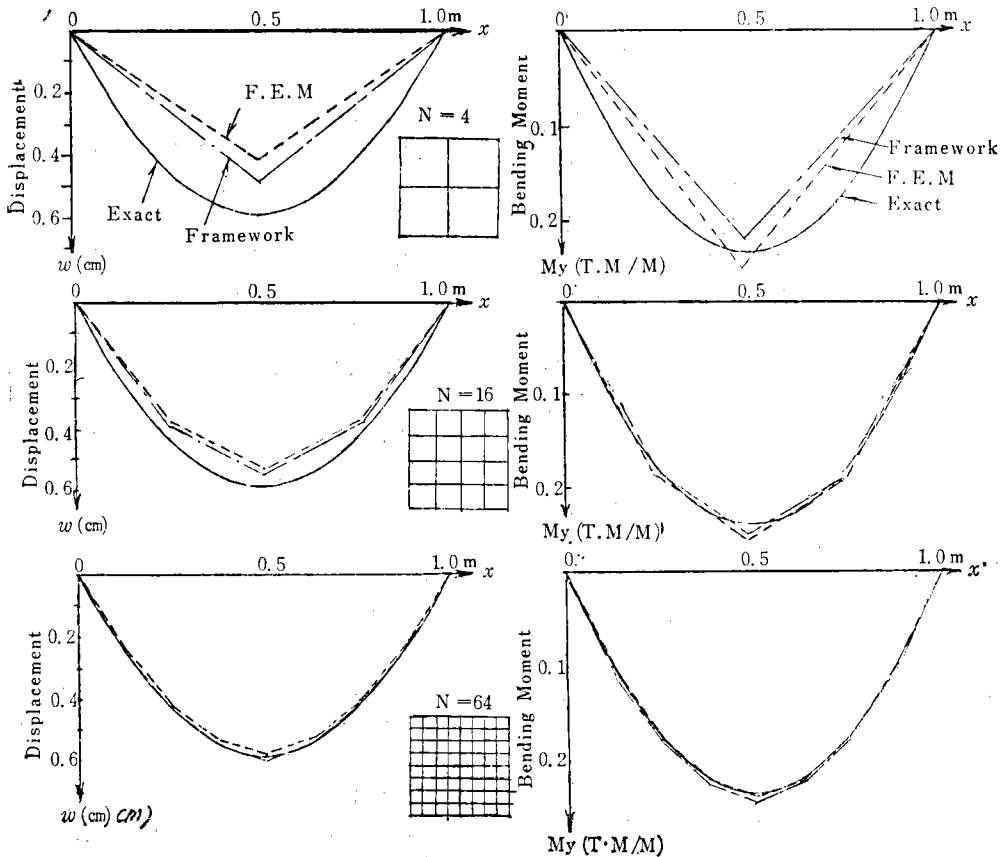


Fig. 13. Exact vs. approximate solutions.

위의 例에서 檢討한 바와같이 이 프로그램에 依한 計算結果에 矛盾點이 없음이 確認되었다. 앞에서 言及했듯이 그밖의 여러 境遇에 對해서도 이와 同一한 方式으로 프로그램이 合理性이 檢定되었다.

2. 收斂性檢定

프로그램의 合理性은 前項에서 檢討하였거니와 이로서 計算結果의 正確성이 立證되는 것은 아니다.

有限要素法等 數值解析의 方法은 本質적으로 近似解法이므로 收斂性에 對한 檢討가 따라야 한다. 有限要素法의 正確성은 要素의 數를 增加시킬 때 近似解가 完全解(Exact Solution)에 어떻게 收斂하느냐에 따라서 決定된다¹⁾.

Desai와 Abel⁴⁾은 中央에 集中荷重이 作用하는 正方形板의 4邊이 單純支持되거나 固定된 두가지 境遇를 對象으로 하여 有限要素法의 收斂性을 分析하고 使用된 要素의 形態에 따라서 收斂性에 明確한 差異가 있음을 밝혔다.

Szilar¹⁰⁾은 4邊이 單純支持된 正方形板의 中央에 集中荷重이 作用할 때 自由度12의 正方形要素를 使用해서 計算한 中央點의 變位値는 完全解보다 約 6%가 적은 값에 收斂한다고 하였다.

本研究에서는 Fig. 12에서 보는 바와 같이 邊이 單純支持된 直四角形板에 等分布荷重이 作用하는 境遇를 問題로 設定하여 板의 各部分에 發生하는 內力 및 變位를 算出하고, 板中央點의 變位値에 對한 收斂性을 檢討하였으며 特히 數值解析의 方法의 하나인 Framework Method의 收斂성과 比較, 考察하였다.

板의 形態와 要素의 形態에 따른 影響을 考察하기 爲하여 b/a와 L_y/L_x 를 各各 1.0, 1.5, 2.0, 의 3가지로 한 9個의 境遇에 對하여 結果를 算出하였다.

完全解는 Double Trigonometric Series에 依한 Navier's Solution으로 부터 求하였다.

Framework Method는 二次元連續體를 Open Grid로 模型化하여 Matrix Analysis로 解析하는 方法이다.

有限要素法과 Framework Method로 計算한 結果値가 完全解에 收斂해가는 過程을 例示하면 Fig. 13과 같다. 여기서 $a=b=1.0m$ 로 假定하였다.

有限要素法과 Framework Method에 依해서 各各 算出된 板中央의 垂直變位値의 誤差率을 b/a와 L_y/L_x 別로 整理하면 Table-1과 같다.

Table-1. Percentage error in center displacement. N=Number of elements

b/a	L_y/L_x	N	Error(%)		
			F.E.M.	Framework	
1.0	1.0	4	-29.64	-18.12	
		16	-10.87	-6.88	
		25	-6.41	-4.36	
		36	-4.25	-3.13	
		64	-2.07	-0.19	
		81	-1.53	+0.24	
		100	-0.98	+1.52	
	1.5	1.5	256	-0.90	+2.37
			6	-25.33	-6.03
			24	-7.09	-5.76
			54	-3.28	-0.47
	2.0	2.0	96	-1.56	+2.11
			216	-1.29	+2.75
			8	-25.71	-9.61
			18	-11.92	-4.43
			32	-8.00	-2.06
			50	-4.36	-0.58
	1.5	1.0	72	-2.84	+1.45
			98	-2.17	+2.74
			200	-1.95	+3.87
			6	-23.82	-13.76
24			-8.05	-4.11	
1.5		1.5	54	-2.39	+1.29
			96	-1.02	+2.98
			216	-0.89	+3.44
			4	-34.97	-20.09
			16	-13.65	-8.72
			25	-9.43	-7.24
			36	-6.94	-3.81
			64	-2.49	-0.65
			100	-1.17	+1.03
			256	-1.02	+2.47
2.0	2.0	12	-19.45	-6.42	
		27	-10.36	-1.83	
		48	-5.57	+0.55	
		108	-2.01	+3.41	
		192	-1.29	+3.82	
1.0	1.0	8	-18.43	-9.09	
		18	-9.92	-2.58	
		23	-5.87	-0.17	
		50	-3.69	+1.97	

2.0		72	-2.17	+2.32
		98	-1.75	+3.87
		200	-0.97	+4.03
	1.5	12	-17.06	-7.54
		27	-9.46	-2.35
		48	-4.30	+1.02
		108	-2.97	+3.85
		192	-1.37	+4.17
	2.0	4	-36.81	-13.89
		16	-16.26	-5.74
		25	-6.41	-1.46
		36	-4.79	+0.67
		64	-2.03	-1.01
		81	-3.66	+2.03
		100	-2.05	+3.88
256	-1.84	+4.12		

Fig. 14는 Table-1에 依據해서 有限要素法과 Framework Method의 收斂狀態를 그래프로 나타낸 것이다. 그 結果는 有限要素法과 Framework Method가 모두 上限의 收斂을 한다는 事實³⁾과 잘 一致한다.

Fig. 14에서 보는 바와 같이 Framework Method의 收斂性은 L_y/L_x (要素의 長短邊比)뿐만 아니라 b/a (板의 長短邊比)에 따라서 差異가 있는 反面에 有限要素法の 收斂性은 b/a 에 關係없이 L_y/L_x 別로 一定한 傾向을 보이고 있다. 有限要素法の 收斂性은 L_y/L_x 가 1에 가까울수록 良好한 것으로 나타났다. 要素의 數를 200個 以上 增加시켰을 때 Framework Method의 收斂值가 3~4%의 誤差를 갖는데 比較해서 有限要素法の 境遇에는 1% 内外이며, 要素의 數를 그 이상 더 增加시켜도 收斂值의 誤差를 줄이는데는 別로 效果가 없는 것으로 推定된다. 그러므로 要素의 數를 不必要하게 크게 잡는 것은 컴퓨터의 記憶容量과 處理時間의 浪費일 뿐이다. 프로그램 使用者는 設計上 所要되는 精度의 結果를 얻을 수 있는 範圍內에서 要素의 數를 適切하게 定하므로써 프로그램을 經濟적으로 利用할 수 있을 것으로 생각된다.

3. 補間函數가 計算結果에 미치는 影響

本研究에서는 아래와 같이 3個의 16項 補間多項式을 選定하여 各 多項式으로부터 補間函數를 誘導하였을 境遇의 計算結果를 比較하므로써 補間函數가 計算結果에 얼마나 큰 影響을 주는가에 對해서 檢討하였다.

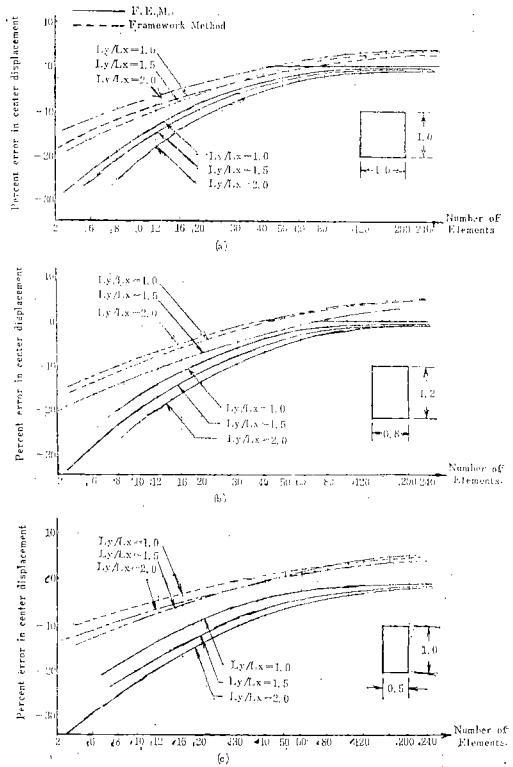


Fig. 14. Convergence characteristics of F.E.M. and F.M.

Table-2. Percentage error in center displacement by F.E.M. with various interpolation functions.

b/a	L_y/L_x	N	Error(%)		
			Polynomial 1	Polynomial 2	Polynomial 3
1.0	1.0	4	-29.64	-30.12	-30.57
		16	-10.87	-10.97	-11.04
		25	-6.41	-6.50	-6.56
		36	-4.25	-4.29	-4.31
		64	-2.07	-2.09	-2.10
		81	-1.53	-1.54	-1.54
		100	-0.98	-0.98	-0.98
		256	-0.90	-0.90	-0.90

補間多項式 1(Bicubic)

$$1 + x + x^2 + x^3 + y + xy + x^2y + x^3y + y^2 + xy^2 + x^2y^2 + x^3y^2 + y^3 + xy^3 + x^2y^3 + x^3y^3$$

Table-3. (Continued)

*** DISPLACEMENT, SUPPORT REACTION & INTERNAL FORCE ***

NODE	DISPLACEMENT				SUPPORT REACTION				INTERNAL FORCE (PER UNIT LENGTH)				
	Z	GX	GY	GZ	R	MX	MY	MZ	SX	SY	MT	MY	
1	0.0	0.0	0.0	0.0	-6.89	-34.55	-123.39	-75.26	6.89	-4.59	36.55	-82.26	75.23
2	0.0373	0.0368	0.0107	0.0027	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-51.78	0.00
3	0.1384	0.0593	0.0370	0.0032	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	-2.72	0.00	23.23	-0.00
4	0.2558	0.0534	0.0299	0.0049	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	5.74	0.00	47.36	-0.00
5	0.3390	0.0291	0.0375	0.0078	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	14.41	0.00	94.99	-0.00
6	0.3824	-0.0070	0.0967	0.0132	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	34.33	0.00	96.57	-0.00
7	0.3027	-0.0460	0.0846	0.0184	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	53.34	0.00	96.57	-0.00
8	0.1802	-0.0800	0.1232	0.0223	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	70.99	0.00	96.57	-0.00
9	0.0	-0.0954	0.1750	0.0296	-154.45	0.0	0.0	0.0	154.45	102.96	0.00	-0.00	-0.00
10	0.0	0.0	0.0	0.0	-106.38	-0.26	-349.45	-16.36	39.49	-34.79	95.99	-116.48	106.39
11	0.0568	0.0524	0.0045	0.0037	0.0	0.0	0.0	0.0	-6.77	-26.42	13.83	-59.31	-2.03
12	0.1577	0.0733	0.0143	0.0057	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.48	-18.56	-0.56	-14.74	-1.17
13	0.3349	0.0724	0.0211	0.0070	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.09	-14.42	-10.90	19.98	-1.17
14	0.4442	0.0547	0.0627	0.0086	0.0	0.0	0.0	0.0	0.35	-10.10	-18.01	43.60	-0.96
15	0.5411	0.0272	0.0619	0.0106	0.0	0.0	0.0	0.0	1.53	-6.27	-25.75	94.73	-0.91
16	0.5722	-0.0019	0.0854	0.0129	0.0	0.0	0.0	0.0	2.85	-3.01	-33.04	91.95	-1.06
17	0.5446	-0.0219	0.1138	0.0154	0.0	0.0	0.0	0.0	4.44	-0.77	-42.24	33.67	-1.40
18	0.4911	-0.0237	0.1449	0.0173	0.0	0.0	0.0	0.0	60.89	0.00	-50.24	-0.00	15.99
19	0.0	0.0	0.0	0.0	-117.81	-1.55	-415.65	-10.32	48.82	-37.60	82.17	-130.55	119.99
20	0.0478	0.0145	0.0030	0.0028	0.0	0.0	0.0	0.0	-6.52	-31.02	18.54	-72.13	-2.63
21	0.2234	0.0893	0.0105	0.0046	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.15	-24.80	0.00	-17.17	-2.27
22	0.4003	0.0921	0.0209	0.0057	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.20	-19.19	-15.68	16.06	-1.91
23	0.5005	0.0779	0.0331	0.0044	0.0	0.0	0.0	0.0	0.73	-14.31	-28.00	61.06	-1.66
24	0.7133	0.0360	0.0665	0.0069	0.0	0.0	0.0	0.0	2.76	-10.12	-40.60	53.64	-1.50
25	0.7952	0.0063	0.0903	0.0086	0.0	0.0	0.0	0.0	5.36	-6.67	-51.95	53.18	-1.56
26	0.8318	0.0103	0.0710	0.0097	0.0	0.0	0.0	0.0	7.71	-4.07	-64.33	37.72	-1.77
27	0.8490	0.0110	0.0682	0.0038	0.0	0.0	0.0	0.0	9.14	0.00	-74.95	-0.00	22.99
28	0.0	0.0	0.0	0.0	-119.30	-0.80	-455.17	-5.36	55.65	-39.77	86.69	-151.72	126.50
29	0.0747	0.0679	0.0016	0.0015	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.53	-33.31	21.09	-81.02	-2.87
30	0.2477	0.0599	0.0024	0.0024	0.0	0.0	0.0	0.0	-2.04	-27.23	10.74	-76.40	-2.58
31	0.4364	0.1052	0.0109	0.0029	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.64	-21.63	-17.02	25.81	-2.20
32	0.6500	0.0920	0.0167	0.0029	0.0	0.0	0.0	0.0	0.83	-16.60	-32.37	41.32	-1.60
33	0.8169	0.0677	0.0220	0.0023	0.0	0.0	0.0	0.0	2.82	-12.15	-45.67	57.17	-1.66
34	0.9230	0.0390	0.0259	0.0005	0.0	0.0	0.0	0.0	6.49	-8.33	-57.61	62.43	-1.52
35	0.9741	0.0120	0.0219	0.0048	0.0	0.0	0.0	0.0	17.04	-5.70	-68.87	58.90	-1.69
36	0.9758	-0.0098	0.0254	0.0019	0.0	0.0	0.0	0.0	-15.49	-3.47	-80.67	53.21	-1.67
37	0.8798	-0.0008	-0.3301	-0.0038	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.00	2.19	0.00	86.91	-0.10
38	0.6628	-0.1335	-0.0790	0.0036	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.00	21.41	0.00	66.94	0.00
39	0.3567	-0.1694	-0.0175	0.0074	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.00	35.89	0.00	38.77	0.00
40	0.0	-0.1826	0.0	0.0058	-67.46	-10.33	0.0	0.0	67.46	44.98	10.33	0.00	-0.00
41	0.0	0.0	0.0	0.0	-121.24	-0.44	-470.00	-0.98	60.75	-40.41	68.73	-156.67	130.41
42	0.0772	0.0703	0.0002	0.0002	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.43	-33.79	22.37	-84.40	-2.82
43	0.2365	0.1037	0.0003	0.0002	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.30	-27.46	2.12	-78.31	-2.50
44	0.4734	0.1093	0.0007	-0.0000	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.14	-21.75	-15.30	13.64	-2.15
45	0.6806	0.0752	0.0001	-0.0006	0.0	0.0	0.0	0.0	0.23	-16.80	-39.15	43.12	-1.82
46	0.8457	0.0494	-0.0020	-0.0016	0.0	0.0	0.0	0.0	0.66	-12.74	-42.91	61.57	-1.84
47	0.9494	0.0445	-0.0045	-0.0031	0.0	0.0	0.0	0.0	1.07	-9.30	-51.37	70.22	-0.98
48	0.9817	-0.0028	-0.0137	-0.0044	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.23	0.05	-53.11	75.83	0.40
49	0.9358	-0.0433	-0.0219	-0.0048	0.0	0.0	0.0	0.0	-4.53	10.33	-46.72	61.40	3.10
50	0.8054	-0.0664	-0.0254	0.0001	0.0	0.0	0.0	0.0	-4.60	11.07	-34.80	75.57	1.40
51	0.5931	-0.1243	-0.0219	0.0034	0.0	0.0	0.0	0.0	-2.58	12.87	-24.32	59.57	1.40
52	0.3154	-0.1911	-0.0125	0.0057	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.19	15.81	-13.72	34.83	1.50
53	0.0	-0.1610	0.0	0.0045	-62.13	-3.03	0.0	0.0	64.25	20.71	10.92	-0.00	15.64
54	0.0	0.0	0.0	0.0	-126.39	-4.16	-464.20	2.55	70.92	-42.80	73.69	-154.73	127.15
55	0.0760	0.0693	-0.0012	-0.0005	0.0	0.0	0.0	0.0	2.87	-32.98	20.94	-82.80	-2.35
56	0.2522	0.1017	-0.0032	-0.0012	0.0	0.0	0.0	0.0	1.04	-24.55	3.16	-27.54	-2.06
57	0.4639	0.1060	-0.0062	-0.0018	0.0	0.0	0.0	0.0	0.04	-18.99	-19.47	15.27	-1.60
58	0.6620	0.0892	-0.0110	-0.0032	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.48	-14.73	-31.83	41.03	-1.58
59	0.8117	0.0588	-0.0150	-0.0047	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.93	-12.81	-32.60	64.27	-1.47
60	0.8928	0.0220	-0.0303	-0.0067	0.0	0.0	0.0	0.0	-2.87	-9.80	-44.33	71.79	-2.42
61	0.9005	-0.0141	-0.0403	-0.0041	0.0	0.0	0.0	0.0	-7.46	-0.09	-50.55	60.35	-0.29
62	0.8375	-0.0485	-0.0447	-0.0005	0.0	0.0	0.0	0.0	-8.78	6.00	-48.87	67.18	0.59
63	0.7072	-0.0813	-0.0419	-0.0019	0.0	0.0	0.0	0.0	-10.66	9.60	-41.31	61.31	1.78
64	0.5349	-0.1100	-0.0317	0.0063	0.0	0.0	0.0	0.0	-5.93	13.11	-30.89	29.48	3.88
65	0.2723	-0.1309	-0.0171	0.0081	0.0	0.0	0.0	0.0	-2.78	17.31	-17.63	29.48	1.93
66	0.0	-0.1388	0.0	0.0038	-87.96	0.50	0.0	0.0	74.94	22.65	9.55	-0.00	2.12
67	0.0	0.0	0.0	0.0	-32.13	60.53	-203.52	117.31	-32.13	-21.42	60.53	-135.48	117.31
68	0.0432	0.0655	-0.0099	0.0006	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	-23.74	-0.00	-81.60	0.00
69	0.2365	0.1002	-0.0078	0.0017	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	-23.07	-0.00	-27.15	0.00
70	0.4440	0.1029	-0.0052	0.0005	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	-15.31	-0.00	17.44	0.00
71	0.6292	0.0791	-0.0070	-0.0026	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	-2.08	-0.00	50.12	0.00
72	0.7485	0.0379	-0.0175	-0.0084	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.00	16.12	-0.00	69.97	0.00
73	0.7770	-0.0138	-0.0506	-0.0249	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.10	16.07	-44.93	38.50	-10.66
74	0.7337	-0.0267	-0.0729	-0.0134	0.0	0.0	0.0	0.0	-22.45	6.05	-55.87	42.63	2.01
75	0.6623	-0.0453	-0.0724	0.0078	0.0	0.0	0.0	0.0	-15.88	9.94	-44.73	45.22	1.23
76	0.5500	-0.0661	-0.0627	0.0068	0.0	0.0	0.0	0.0	-12.59	7.33	-36.16	43.51	1.16
77	0.3983	-0.0859	-0.0480	0.0098	0.0	0.0	0.0	0.0	-8.45	10.07	-26.93	36.57	1.34
78	0.2102	-0.1011	-0.0243	0.0117	0.0	0.0	0.0	0.0	-4.69	14.06	-15.74	22.84	1.64
79	0.0	-0.1071	0.0	0.0124	-58.11	3.49	0.0	0.0	64.40	19.37	6.16	-0.00	1.86
80	0.5061	-0.0214	-0.1113	0.0036	0.0	0.0	0.0	0.0	-41.13	0.00	-24.34	-0.00	-4.84
81	0.4625	-0.0231	-0.1033	0.0043	0.0	0.0	0.0	0.0	-20.10	2.13	-19.94	14.43	0.59
82	0.4074	-0.0307	-0.0927	0.0065	0.0	0.0	0.0	0.0	-20.68	1.74	-16.17	19.76	0.63
83	0.3377	-0.0413	-0.0748	0.0094	0.0	0.0	0.0	0.0	-18.04	1.23	-11.58	21.67	0.30
84	0.2459	-0.0529	-0.0553	0.0121	0.0	0.0	0.0	0.0	-13.43	2.56	-11.23	20.27	0.34
85	0.1289	-0.0619	-0.0250	0.0140	0.0	0.0	0.0	0.0	-7.23	5.56	-1.70	14.03	0.41
86	0.0	-0.0668	0.0	0.0147	-31.57	7.40	0.0	0.0	78.91	10.52	-0.10	-0.00	0.78
87	0.1694	-0.0610	-0.1007	0.0094	0.0	0.0	0.0	0.0	-55.39	3.00	51.48	-0.00	20.52
88	0.1587	-0.0603	-0.0856	0.0047	0.0	0.0	0.0	0.0	-28.98	-3.11	47.99	-10.40	-0.74
89	0.1398	-0.0610	-0.0741	0.0060	0.0	0.0	0.0	0.0	-29.41	-6.73	42.00	-8.53	-0.94

Table-3. (Continued)

*** TOPOGRAPHY ***

NODE	ELEMENTS				COORDINATES		RESTRAINTS			APPLIED		LOADS		
	1	2	3	4	X	Y	Z	OX	OY	OXY	W	MX	MY	MAX
1	0	0	0	0	0.0	0.0	X	X	X	X	9.00	0.	0.	0.
2	1	1	0	0	2.00	0.0	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
3	2	2	0	0	4.00	0.0	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
4	3	3	0	0	6.00	0.0	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
5	4	4	0	0	8.00	0.0	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
6	5	5	0	0	10.00	0.0	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
7	6	6	0	0	12.00	0.0	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
8	7	7	0	0	14.00	0.0	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
9	8	8	0	0	16.00	0.0	X	-	-	-	4.50	0.	0.	0.
10	9	0	10	1	0.0	3.00	X	X	X	X	9.00	0.	0.	0.
11	10	1	11	2	2.00	3.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
12	11	10	2	3	4.00	3.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
13	12	11	3	4	6.00	3.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
14	13	12	4	5	8.00	3.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
15	14	13	5	6	10.00	3.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
16	15	14	6	7	12.00	3.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
17	16	15	7	8	14.00	3.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
18	0	16	8	0	16.00	3.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
19	17	0	0	9	0.0	6.00	X	X	X	X	9.00	0.	0.	0.
20	18	17	9	10	2.00	6.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
21	19	18	10	11	4.00	6.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
22	20	19	11	12	6.00	6.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
23	21	20	12	13	8.00	6.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
24	22	21	13	14	10.00	6.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
25	23	22	14	15	12.00	6.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
26	24	23	15	16	14.00	6.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
27	0	24	16	0	16.00	6.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
28	25	0	0	17	0.0	9.00	X	X	X	X	9.00	0.	0.	0.
29	26	25	17	18	2.00	9.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
30	27	26	18	19	4.00	9.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
31	28	27	19	20	6.00	9.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
32	29	28	20	21	8.00	9.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
33	30	29	21	22	10.00	9.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
34	31	30	22	23	12.00	9.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
35	32	31	23	24	14.00	9.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
36	33	32	24	0	16.00	9.00	-	-	-	-	13.50	0.	0.	0.
37	34	33	0	0	18.00	9.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
38	35	34	0	0	20.00	9.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
39	36	35	0	0	22.00	9.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
40	0	36	0	0	24.00	9.00	X	-	X	-	4.50	0.	0.	0.
41	37	0	0	25	0.0	12.00	X	X	X	X	9.00	0.	0.	0.
42	38	37	25	26	2.00	12.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
43	39	38	26	27	4.00	12.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
44	40	39	27	28	6.00	12.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
45	41	40	28	29	8.00	12.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
46	42	41	29	30	10.00	12.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
47	43	42	30	31	12.00	12.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
48	44	43	31	32	14.00	12.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
49	45	44	32	33	16.00	12.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
50	46	45	33	34	18.00	12.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
51	47	46	34	35	20.00	12.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
52	48	47	35	36	22.00	12.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
53	0	48	36	0	24.00	12.00	X	-	X	-	9.00	0.	0.	0.
54	49	0	0	37	0.0	15.00	X	X	X	X	9.00	0.	0.	0.
55	50	49	37	38	2.00	15.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
56	51	50	38	39	4.00	15.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
57	52	51	39	40	6.00	15.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
58	53	52	40	41	8.00	15.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
59	54	53	41	42	10.00	15.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
60	55	54	42	43	12.00	15.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
61	56	55	43	44	14.00	15.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
62	57	56	44	45	16.00	15.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
63	58	57	45	46	18.00	15.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
64	59	58	46	47	20.00	15.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
65	60	59	47	48	22.00	15.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
66	0	60	48	0	24.00	15.00	X	-	X	-	9.00	0.	0.	0.
67	0	0	0	49	0.0	18.00	X	X	X	X	4.50	0.	0.	0.
68	0	0	49	50	2.00	18.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
69	0	0	50	51	4.00	18.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
70	0	0	51	52	6.00	18.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
71	0	0	52	53	8.00	18.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
72	0	0	53	54	10.00	18.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
73	61	0	54	55	12.00	18.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
74	62	61	55	56	14.00	18.00	-	-	-	-	13.50	0.	0.	0.
75	63	62	56	57	16.00	18.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
76	64	63	57	58	18.00	18.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
77	65	64	58	59	20.00	18.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
78	66	65	59	60	22.00	18.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
79	0	66	60	0	24.00	18.00	X	-	X	-	9.00	0.	0.	0.
80	67	0	0	61	12.00	21.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
81	68	67	61	62	14.00	21.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
82	69	68	62	63	16.00	21.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
83	70	69	63	64	18.00	21.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
84	71	70	64	65	20.00	21.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
85	72	71	65	66	22.00	21.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
86	0	72	66	0	24.00	21.00	X	-	X	-	9.00	0.	0.	0.
87	73	0	0	67	12.00	24.00	-	-	-	-	9.00	0.	0.	0.
88	74	73	67	68	14.00	24.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
89	75	74	68	69	16.00	24.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
90	76	75	69	70	18.00	24.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
91	77	76	70	71	20.00	24.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
92	78	77	71	72	22.00	24.00	-	-	-	-	18.00	0.	0.	0.
93	0	78	72	0	24.00	24.00	X	-	X	-	9.00	0.	0.	0.
94	0	0	0	73	12.00	27.00	X	X	X	X	4.50	0.	0.	0.
95	0	0	73	74	14.00	27.00	X	X	X	X	9.00	0.	0.	0.
96	0	0	74	75	16.00	27.00	X	X	X	X	9.00	0.	0.	0.
97	0	0	75	76	18.00	27.00	X	X	X	X	9.00	0.	0.	0.
98	0	0	76	77	20.00	27.00	X	X	X	X	9.00	0.	0.	0.
99	0	0	77	78	22.00	27.00	X	X	X	X	9.00	0.	0.	0.
100	0	0	78	0	24.00	27.00	X	X	X	X	4.50	0.	0.	0.

V. 結 論

構造解析프로그램은 數値解析의 方法에 依해서 作成하는 것이 效果의이며 特히 連續體의 解析을 爲해서는 有限要素法이 가장 適合한 方法일 것이다. 本研究에서 有限要素法의 理論이 依據해서 作成한 二次元連續體의 構造解析프로그램은 解析의 方法으로 解決할 수 없는 任意的 構造的 條件을 處理할 수 있어 土木構造物을 좀더 合理的으로 解析하는데 活用될 수 있을 것이다.

本研究에서는 實際의인 프로그래밍과 結果의 分析檢討를 通해서 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다.

1. 프로그램을 實用化시키려면 構造物을 充分한 個數의 要素로 分割해서 處理할 수 있도록 하여야 하며 이를 위해서는 剛度行列을 Compacted Column Storage Scheme 等に 依해서 最少限으로 縮少시킬 必要가 있다.

2. 平衡方程式은 可及的 In-core Solution으로 解決할 수 있어야하며, 剛度行列이 Compacted Column Storage Scheme으로 저장된 狀態에서는 LDL^T Decomposition 方式이 適當하다.

3. 有限要素法에 依하면 Framework Method보다 대체로 더 높은 精度의 結果를 얻을 수 있으며 要素數를 充分히 增加시키면 그 誤差는 1% 内外로 줄어든다.

4. 有限要素法의 收斂性은 構造物의 形狀에 關係없이 直四角形要素의 長短邊의 比가 1에 가까울수록 더 良好하다.

5. 必要條件에 맞는 補間函數라면 어떠한 것을 選定하더라도 計算結果에 거의 影響을 주지않는다.

參 考 文 獻

1. Babuska, I., "The Rate of Convergence for

the Finite Element Method," SIAM J., Numerical Analysis, Vol.8, 1971.

2. Bathe, K.J, & Wilson, E.L., "Numerical Methods in Finite Element Analysis," Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.

3. Blaauwendraad, J., "Finite Element Method in Structural Analysis," Int. Inst. for Hydraulic Engr. Delft, the Netherlands, 1977.

4. Desai, C. & Abel, J., "Introduction to the Finite Element Method," Van Nostrand Reinhold, New York, 1971.

5. Gallagher, R.H., "Finite Element Analysis," Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1975.

6. Huebner, K.H., "The Finite Element Method for Engineers," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975.

7. Kordestuncer, H., "Elementary Matrix Analysis of Structures," McGraw-Hill Kogakusa, Ltd., Japan, 1974.

8. Martin, H.C., & Carey, G.F., "Introduction to Finite Element Analysis," Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd, New Delhi, 1975.

9. Rockey, K.C., & Evance, H.R., "The Finite Element Method," Granada Publishing Ltd., London, 1975.

10. Szliard, R., "Theory and Analysis of Plates," Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1974.

11. Vargar, R.S., Birkhoff, G., & Schultz, M.H., "Piecewise Hermitian Interpolation in One and Two Variables with Applications to partial Differential Equation," Numerical Mathematics, Vol. 11. 1978.

12. Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method," McGraw-Hill Book Co., London, 1977.