論　文

大韓造船學會誌
第17卷 第1號 1980年 3月
Journal of the Society of
Naval Architects of Korea
Vol. 17, No. 1, March 1980

非對稱 斷面 補剛材의 強度解析

任 尙 鉠*·梁 永 淳*·李 柱 成*

On the Strength Analysis of the Stiffener with Asymmetric Cross Section

S. J. Yim,* Y. S. Yang,* J. S. Lee*

Abstract

In the conventional ship's structures, the stiffeners with asymmetric sections have been widely used, in spite of the disadvantage on the point of strength, compared to those with symmetric sections.

So far, the stiffened plating was usually analyzed not considering the geometric unsymmetry characteristics of the section, including only the cross sectional area and moment of inertia.

In this paper, the stiffened plating is devided into the strips having a thin-walled open cross section by using the concept of the effective width. The geometric characteristics of the sections are also included. The goverming equations are derived, which can be applied to the arbitrary cross section beams, and the symmetric and the asymmetric section beams which have the same cross sectional areas are analyzed by using the finite element method. From that result, we obtain the allowable load of the two sections, and compared them.

1. 緖　言

船體構造의 補剛材로서 L-型材와 같은 非對稱斷面材가 I-型材나 T-型材와 같은 對稱斷面材에 比해서 그 強度가 낮음에도 불구하고, 오랜 관습과 資材求得 및 工作上의 容易性때문에 널리 使用되고 있다.

지금까지 補剛된 平板의 解析에 있어서 補剛材의 斷面의 기하학적 특성을 고려하지 않고 그 斷面積과 2次 모우먼트만을 포함시켜서 解析해 왔다[3][8]. 그러나 非對稱斷面材로 補剛된 平板에서는 補剛材의 斷面中心과 剪斷中心과의 偏心으로, 平板과 補剛材 內의 應力分布나 보의 길이에 沿한 變位의 變化等이 對稱斷面材로 補剛된 平板의 경우와는 달라진다[7], [12], [13].

따라서, 船體構造의 最適設計를 위해서는 이러한 補剛材의 非對稱性을 고려한 새로운 方法으로, 좀 더 正確한 解析이 必要하다.

많은 學者들에 의해서 傳達매트릭스法, 應力法 等으로 薄板보에 對한 研究가 되어 왔고[15], [16], 特히 最近電子計算機의 發達과 아울러 變分理論에 기초를 둔 有限要素法을 利用하여 보요소나 평판요소로써 薄板보를 解析해 왔다. [9], [10], [11], [12], [15].

本 論文에서는 補剛板을 有效幅槪念을 使用하여 Grillage로 치환하고[Fig. 1], 假想일의 原理를 適用하여 단면의 기하학적 특성을 고려한 任意의 斷面보의 構成方程式을 유도하였고, 代表的인 非對稱斷面材로서 L-型材를 대하여 有限要素法을 使用하여 단면 내의 應力

接受日字：1980年 2月 21日
*正會員：서울大工大

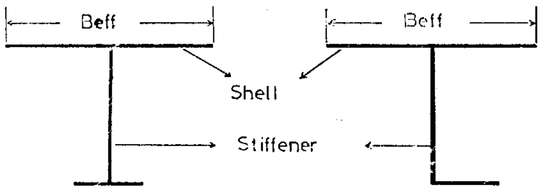

Fig. 1. Idealization of Ship's Structure.

分布를 구하고, 그것으로부터 許容荷重을 구함으로써, 같은 斷面積을 갖는 對稱斷面材의 그것과 比較해서 非對稱性과 强度사이의 관계를 규명하였다.

2. 任意의 斷面을 갖는 薄板보 理論과 有限要素法의 定式化

2-1. 假定

薄板보를 1次元 部材로 解析하는데 있어서 다음과 같은 假定을 한다.

〔假定 1〕 薄板構造物이므로 板의 面에 垂直한 方向으로의 變形度와 應力成分은 無視한다.

〔假定 2〕 보의 縱軸에 垂直한 기하학적 형상은 變形後에도 變하지 않는다.

〔假定 3〕 板의 中央面에서의 전단변형도 성분 역시 무시한다.

2-2. 座標系

Fig. 2와 같이 단면중심을 원점으로 하는 Cartesian Coordinate: 〔x, y, z〕와 Orthogonal Curvilinear Coordinate: 〔x, s, n〕을 使用한다.

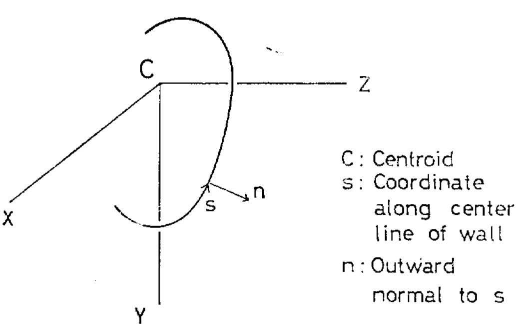

Fig. 2. Coordinate System.

2-3. 變形度成分과 應力成分

假定 1에 依해서 ε_{xn}, ε_{sn}, ε_{nn}과 假定 2에 의해서 ε_{ss}는 0이다. 假定 3에 의해서

$$\varepsilon_{xs}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\simeq 0 \tag{1}$$

이다. 따라서, 變形은 ε_{xx}에 의해서만 나타나며, $v=v(x)$, $w=w(x)$, $\phi=\phi(x)$ 및 $u=u(x,s)$가 된다.

假定들로부터 결국 任意의 點에서의 變形은 단면의 y, z軸 方向으로의 移動과 단면의 비틂中心(本 論文에서는 剪斷中心)에 대한 回轉으로 나눌 수 있다.

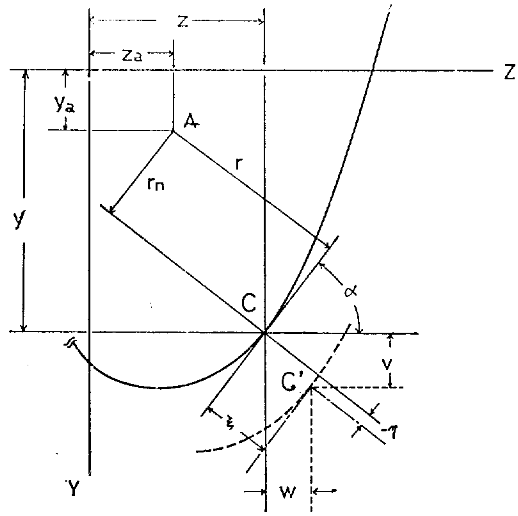

Fig. 3. Normal and Tangential Components of Displacement.

Fig. 3에서 단면이 비틂중심 A를 중심으로 $\phi(x)$만큼 회전했을 때 任意의 點 C에서의 變位 η를 A點의 變位 v_a, w_a로 表現하면

$$\eta=-v_a\sin\alpha+w_a\cos\alpha+r\phi=v_a\frac{dy}{ds}+w_a\frac{dz}{ds}+r\phi \tag{2}$$

가 된다. (1)式으로 부터

$$\frac{\partial u}{\partial s}=-\frac{dv_a}{dx}\cdot\frac{dy}{ds}-\frac{dw_a}{dx}\cdot\frac{dz}{ds}-r\frac{d\phi}{dx} \tag{3}$$

이고, 積分을 하면

$$u=u_o-y\frac{dv_a}{dx}-z\frac{dw_a}{dx}-2w\frac{d\phi}{dx} \tag{4}$$

가 된다. 여기서 u_o는 $s=o$에서의 變位 u이고, $2w=\int_s r ds$로 定義되는 Sectorial Area Coordinate이다. 〔12〕, 〔14〕.

따라서 變形度成分과 應力成分은 각각

$$\varepsilon_{xx}=\frac{du_o}{dx}-y\frac{d^2v_a}{dx^2}-z\frac{d^2w_a}{dx^2}-2w\frac{d^2\phi}{dx^2} \tag{5}$$

$$\tau_{xx}=E\left(\frac{du_o}{dx}-y\frac{d^2v_a}{dx^2}-z\frac{d^2w_a}{dx^2}-2w\frac{d^2\phi}{dx^2}\right) \tag{6}$$

이 된다.

2-4. 有限要素法의 定式化

本 節에서는 에너지법 중 假想일의 原理를 適用하여 7自由度問題로 定式化하였다[4], [5], [6].

2-4.1. 假想일의 原理

假想일의 原理는 일반적으로

$$\delta W=\delta U-\delta V=0 \tag{7}$$

라 쓸 수 있다. 여기서 δU는 假想變形度에너지, δV는 外力에 의한 假想일이다. St. Venant의 단순비틂을 고려하면

$$\delta V=\int_v \tau_{xx}\,\delta\varepsilon_{xx}\,dv+\int_v(\tau_{xs})_T\left(\frac{d\phi}{dx}\right)dv \tag{8}$$

이다. $(\tau_{xs})_T$는 St. Venant의 비틂전단응력이다.

(5)式과 (6)式을 變形하면 假想變形度와 應力은

$$\delta\varepsilon_{xx}=\frac{d\delta u_o}{dx}-2w_o\frac{d^2\delta\phi}{dx^2}-y\frac{d^2\delta v_a}{dx^2}-z\frac{d^2\delta w_a}{dx^2}+(2w_o-2w)\frac{d^2\delta\phi}{dx^2} \tag{9}$$

$$\tau_{xx}=E\left\{\frac{du_o}{dx}-2w_o\frac{d^2\phi}{dx^2}-y\frac{d^2v_a}{dx^2}-z\frac{d^2w_a}{dx^2}+(2w_o-2w)\frac{d^2\phi}{dx^2}\right\} \tag{10}$$

이다. 여기에서, $2w_o=\int_s 2wr\,ds/A=Sw/A$로 定義되는 값이고, A는 斷面積이다.

(9)式과 (10)式을 (8)式에 代入하여 積分하면

$$\begin{aligned}\delta u=&EA\int\left(\frac{du_o}{dx}\right)\left(\frac{d\delta u_o}{dx}\right)dx-ES_w\int\left\{\left(\frac{du_o}{dx}\right)\left(\frac{d^2\delta\phi}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\left(\frac{d\delta u_o}{dx}\right)\right\}dx+EI_z\int\frac{d^2v_a}{dx^2}\left(\frac{d^2\delta_a}{dx^2}\right)dx\\&+EI_y\int\left(\frac{d^2w_a}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\delta w_a}{dx^2}\right)dx\\&+EI_{yz}\int\left\{\left(\frac{d^2w_a}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\delta v_a}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2v_a}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\delta w_a}{dx^2}\right)\right\}dx\\&+\{E\Gamma+EA(2w_o)^2\}\int\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\delta\phi}{dx^2}\right)dx\\&+GJ\int\left(\frac{d\phi}{dx}\right)\left(\frac{d\delta\phi}{dx}\right)dx\end{aligned} \tag{11}$$

이 된다. 여기서 I_y, I_z 및 I_{yz}는 二次모우먼트 및 相乘모우먼트이고, $\Gamma=\int_A(2w_o-2w)^2dA$로 定義되는 warping constant이다.

Body force를 무시하고 Fig. 4의 荷重이 作用할 때 外力에 依한 假想일은

$$\delta V=\int_A p_y\delta v_a dA+\int_A p_z\delta w_a dA+\int_A m_t\delta\phi dA \tag{12}$$

이 된다. (11)式과 (12)式을 (7)式에 代入하여 Green theorem을 適用하고, 假想變位 δu_o, δv_a, δw_a, $\delta\phi$가 任意의 값임을 고려하면

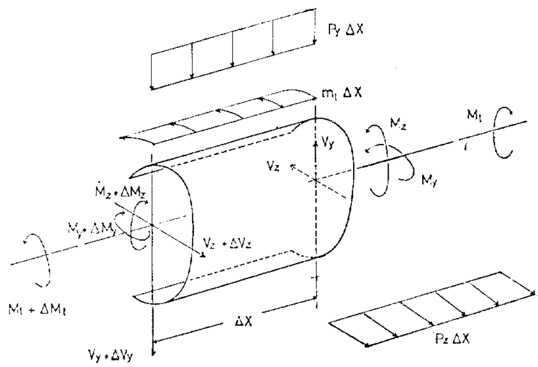

Fig. 4. General system of load and stress resultant.

$$-EA\frac{d^2u_o}{dx^2}+ES_w\frac{d^3\tau}{dx^3}=0 \tag{13.a}$$

$$EI_z\frac{d^4v_a}{dx^4}+EI_{yz}\frac{d^4w_a}{dx^4}=p_y \tag{13.b}$$

$$EI_{yz}\frac{d^4v_a}{dx^4}+EI_y\frac{d^4w_a}{dx^4}=p_z \tag{13.c}$$

$$E\frac{d^4\phi}{dx^4}-GJ\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{S_w}{A}\left\{-EA\frac{d^3u_o}{dx^3}+ES_w\frac{d^4\phi}{dx^4}\right\}=m_t \tag{13.d}$$

를 求할 수 있다.

(13.a)式으로 부터, 軸力을 N_x라 하면

$$\frac{du_o}{dx}=\frac{N_x}{A}+2w_o\frac{d^2\phi}{dx^2} \tag{14.a}$$

(13.b), (13.c)式으로부터

$$E\frac{d^4v_a}{dx^4}=\frac{P_yI_y-P_zI_{yz}}{I_yI_z-I_{yz}^2} \tag{14.b}$$

$$E\frac{d^4w_a}{dx^4}=\frac{P_zI_z-P_yI_{yz}}{I_yI_z-I_{yz}^2} \tag{14.c}$$

이 되고, 또 (13.a)式과 (13.d)式에서

$$E\Gamma\frac{d^4\phi}{dx^4}-GJ\frac{d^2\phi}{dx^2}=m_t \tag{14.d}$$

를 얻는다.

(14)式은 (7)式의 Euler-Lagrangian equation으로서 任意의 薄板보의 構成方程式이다.

2-4.2. 剛性方程式

變位 u_o, v_o, w_a, ϕ를 Fig. 5의 節點 i, j에서의 節點變位로 表現하면

$$\begin{Bmatrix}u_o(x)\\v_a(x)\\w_a(x)\\\phi(x)\end{Bmatrix}=\Big[\,[N_a],[N_{b1}],[N_{b2}],[N_{b3}]\,\Big]\begin{Bmatrix}\{u_a\}\\\{u_{b1}\}\\\{u_{b2}\}\\\{u_{b3}\}\end{Bmatrix} \tag{15}$$

이다.

여기에서, $[[N_a],[N_{b1}],[N_{a2}],[N_{b3}]]$는 보요소의 形狀函數로서 (4×14)매트릭스이고,

$\{u_a\}=[u_i, u_j]^T$

$\{u_{b1}\}=[\bar{v}_i, \bar{\theta}_{zi}, \bar{v}_j, \bar{\theta}_{zj}]^T$

$\{u_{b2}\}=[\bar{w}_i, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{yi}]^T$

$\{u_{bs}\}=[\phi_i, \phi_{xi}, \phi_j, \phi_{xj}]^T$

等이다. bar(—)는 전단중심에서의 節點變位임을 表示한다.

(15)式을 (11)式에 代入하여 積分하면

$$\begin{aligned}\delta U=&\delta\{u_a\}^T[k_a]\{u_a\}+\delta\{u_a\}^T[k_{ab3}]\{u_{b3}\}\\&+\delta\{u_{b3}\}^T[k_{ab3}]^T\{u_a\}+\delta\{u_{b1}\}^T[k_{b1}]\{u^b{}_1\}\\&+\delta\{u_{b2}\}^T[k_2]\{u_{b2}\}+\delta\{u_{b1}\}^T[k_{b12}]\{u_{b2}\}\\&+\delta\{u_{b2}\}^T[k_{b12}]^T\{{}_bu_{b1}\}+\delta\{u_{b3}\}^T[k_{b3}]\{u_{b3}\}\\=&\delta\{\bar{q}\}^T[\bar{k}]\{\bar{q}\}\end{aligned} \tag{16}$$

를 얻는다. 여기에서 $[k_a]=EA\int[N_{ax}]^T[N_{ax}]dx$, $[k_{ab3}]=-ES_w\int[N_{ax}]^T[N_{b3xx}]dx\cdots$等이고,

$[N_{ax}]=\frac{d}{dx}[N_a]$, $[N_{b3xx}]=\frac{d^2}{dx^2}[N_{b3}]\cdots$임을 나타내며, $\{\bar{q}\}=[\{u_a\}], \{u_{b1}\}, \{u_{b2}\}, \{u_{b3}\}]^T$이다.

節點力을 $\{\bar{f}\}$라 하면 外力에 의한 假想일은

$$\delta V=\int\{\bar{q}\}^T\{\bar{f}\} \tag{17}$$

假想일의 原理로부터

$[\bar{k}]\{\bar{q}\}=\{\bar{f}\}$

가 된다. 단면중심과 전단중심 사이의 轉換行列을 $[t]$라 하고, $\{q^c\}$, $\{f^c\}$를 단면중심에서의 변위와 절점력이라고 하면

$$\{f^c\}=[t^{-1}]^T[\bar{k}][t^{-1}]\{q^c\}=[k^c]\{q^c\} \tag{18}$$

가 된다. 여기에서 $[k^c]$는 단면중심에서 定義되는 강성행렬이다.

(18)式을 全體構造物에 대해서 중첩하면 전체구조물의 剛性方程式을 얻을 수 있다.

2-4.3. 法線應力과 剪斷應力

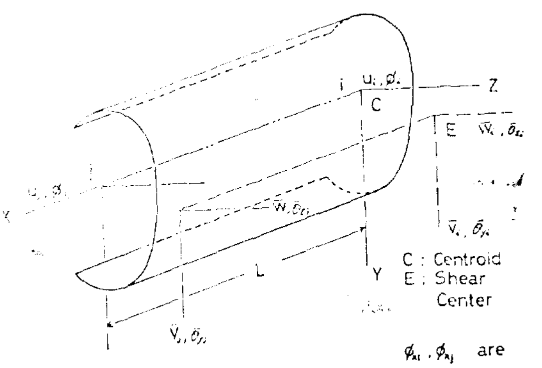

Fig. 5. Nodal displacement.

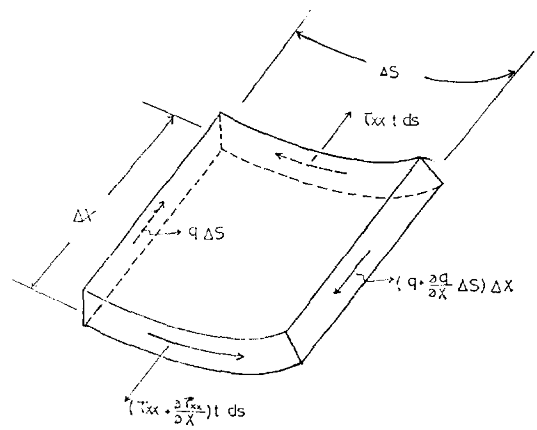

Fig. 6. Forces on a typical wall element of a Thin-Walled Beam.

(14.b)式과 (14.c)式을 굽힘모우먼트 M_y, M_z로 나타내어, (14.a)式 (14.d)式과 함께 (6)式에 代入하면,

$$\tau_{xx}=\frac{N_x}{A}+\frac{M_zI_y-M_yI_{yz}}{I_yI_z-I_{yz}{}^2}y+\frac{M_yI_z-M_zI_{yz}}{I_yI_z-I_{yz}}z+(2w_o-2w)\frac{w_w}{\Gamma} \tag{19}$$

를 구할 수 있다. 여기에서 $w_w=E\Gamma\frac{d^2\phi}{dx_2}$으로 定義되는 Bimoment이다[1], [7], [12], [13].

Fig. 6에서 x軸方向의 平衡으로부터

$$\frac{\partial q}{\partial s}=-t\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}.$$

(19)式을 代入하고 自由端에서 $q=0$임을 고려하여, 積分하면, 剪斷流는

$$q=-\frac{I_yQ_z-I_{yz}Q_y}{I_yI_z-I_{yz}{}^2}V_y-\frac{I_zQ_y-I_{yz}Q_z}{I_yI_z-I_{yz}{}^2}V_z-\frac{Q_w}{\Gamma}V_w \tag{20}$$

이 된다. Q_y, Q_z는 각각 y, z軸에 관한 1次모우먼트이고, $Q_w=\int_A(2w_o-2w)dA$로 되는 first sectorial moment이다.

V_y, V_z 및 V_w는 전단력 및 warping shear이다.

剪剪流에 依한 應力과 St. Venant의 비틈에 依한 應力을 중첩하면, 任意의 點에서의 全剪斷應力은

$$\tau_{xs}=2G\frac{d\phi}{dx}\cdot n-\frac{I_yQ_z-I_{yz}Q_y}{t(I_yI_z-I_{yz}{}^2)}V_y\cdot-\frac{I_zQ_y-I_{yz}Q_z}{t(I_yI_z-I_{yz}{}^2)}V_z-\frac{Q_w}{t\Gamma}V_w \tag{21}$$

로서 얻어진다. t는 板의 두께이다.

(19)式과 (20)式은 任意의 斷面에 對해서 成立하는 式으로 各 式의 마지막항은 warping 現象의 구속효과를 나타낸다.

3. 數値解析 및 考察

프로그램을 使用하여 Fig. 7의 Model에 對해서 理

$$\text{Allowable Load} = \frac{\text{Yielding Stress}}{\text{Maximum Stress}} \times \text{Applied Load}$$

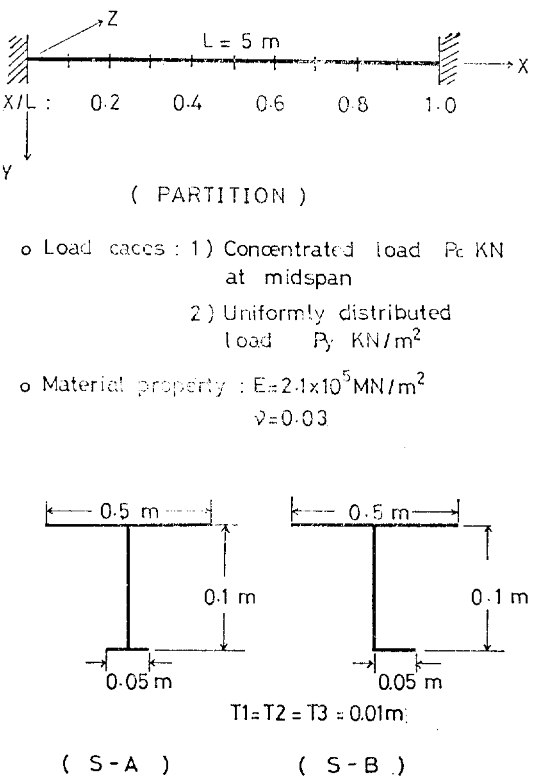

Fig. 7. Model

論式과 比較하여 解析精度를 알아보았고, 同一 斷面積을 갖는 非對稱斷面材와 對稱斷面材사이의 變位, 應力 및 許容荷重을 比較하였다.

許容荷重은 線型理論에 의거하여 最大應力과 材料의 降伏應力과의 比로써 決定하였다.

表1은 變位 v의 理論式의 結果와 프로그램의 結果와의 比較인데, 그 精度가 좋음을 보여준다. 이를 Fig. 8에 圖示하였다. 斷面 B의 斷面-A에 對한 最大値의 比는 分布荷重의 경우 약 1.047, 集中荷重의 경우 약 1.046으로 斷面-B가 크며, 斷面-B는 단면중심과 전단중심과의 偏心으로 變位 w와 ϕ가 생긴다(Fig. 9).

應力分布는 分布荷重에 對해서만 $X/L=0$단면에서 對稱斷面은 Fig. 10과 Fig. 11에 非對稱斷面은 Fig. 12~Fig. 15에 圖示하였다.

Fig. 10과 Fig. 12의 法線應力 分布를 比較해 보면,

〈表 1〉 變 位 v

x/L	分布荷重($\times 10^{-3}$ Pym) 理論式	分布荷重($\times 10^{-3}$ Pym) F.E.M.	集中荷重($\times 10^{-3}$ Pcm) 理論式	集中荷重($\times 10^{-3}$ Pcm) F.E.M.
〈Section-A〉				
0.1	0.0773	0.0773	0.0496	0.0496
0.2	0.2444	0.2444	0.1680	0.1680
0.3	0.4211	0.4211	0.3093	0.3093
0.4	0.5500	0.5500	0.4278	0.4278
0.5	0.5968	0.5968	0.4774	0.4774
〈Section-B〉				
0.1	0.0839	0.0846	0.0528	0.0530
0.2	0.2601	0.2603	0.1762	0.1765
0.3	0.4430	0.4434	0.3225	0.3229
0.4	0.5758	0.5762	044458	0.4463
0.5	0.6237	0.6242	0.4982	0.4994

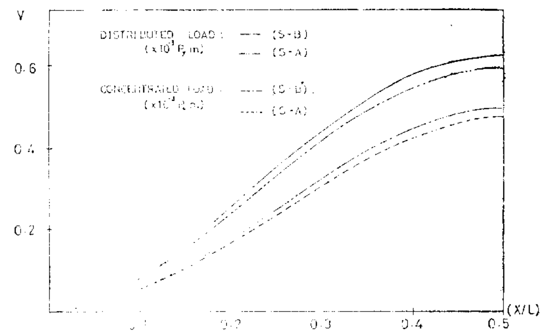

Fig. 8. Displacement v of (S-A) and (S-B)

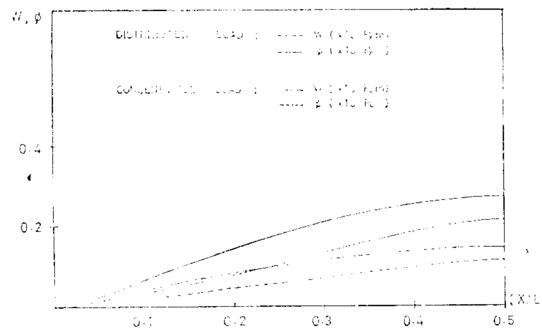

Fig. 9. Displacement w and ϕ of (S-B)

(*S-B*)는 M_z에 依한 응력분포가 Flange에서 균일하지 않고 線型的으로 分布하고, 偏心의 영향으로 M_y에 의한 굽힘응력과 warping現象의 구속으로 Bimoment w_w와 그로 인한 warping stress도 나타난다. 剪斷應力의 分布도 Fig. 11과 Fig. 14를 비교해 보면, (*S-B*)는 V_y

에 依한 전단응력의 分佈가 (*S-A*)의 그것과 다르며, warping現象의 구속으로 warping shear V_w와 그로인한 warping stress도 나타나고 있음을 보여준다. 그림에서 화살표는 剪斷流의 方向을 表示한다.

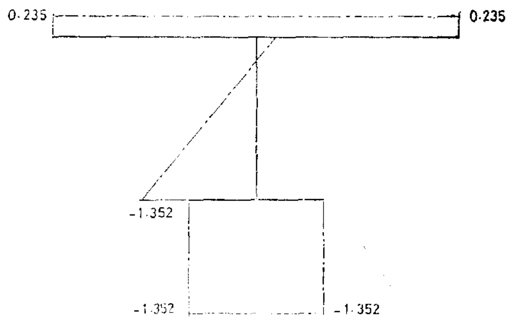

Fig. 10. τ_{xz} at x/L=0 of (S-A)

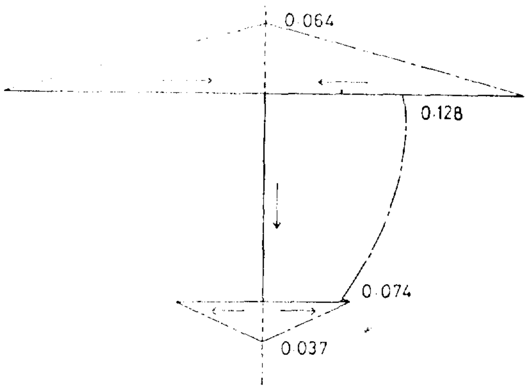

Fig. 11. τ_{xs} at x/L=0 of (S A)

Fig. 12와 Fig. 14로부터 非對稱斷面(*S-B*)의 全法線應力과 全剪斷應力을 求하여 各各을 Fig. 13과 Fig. 15에 圖示하였다.

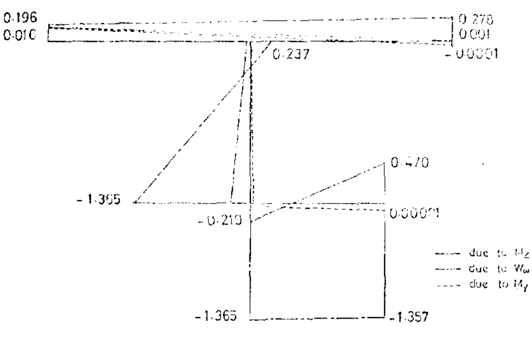

Fig. 12. τ_{xx} at x/L=0 of (S B)

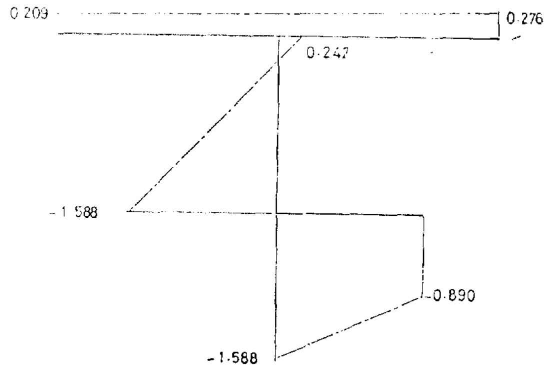

Fig. 13. Total normal stress of (S-B)

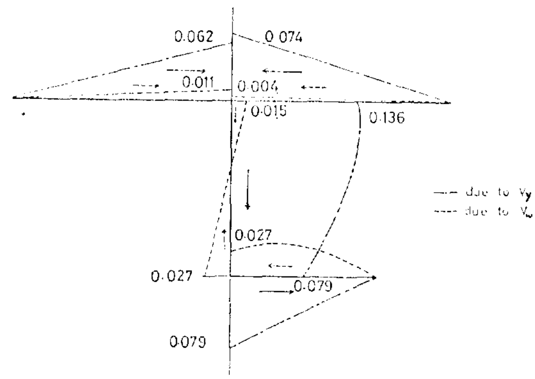

Fig. 14. τ_{xs} at x/L=0 of (S-B)

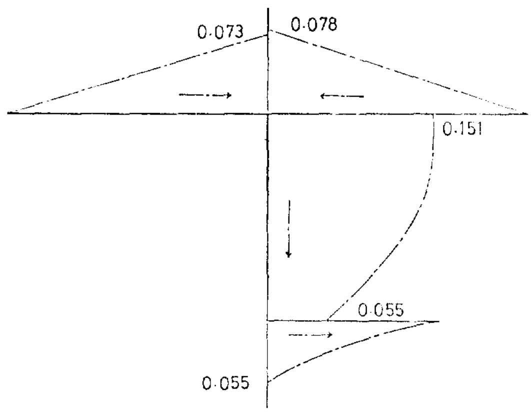

Fig. 15. Total shear stress of (S-B)

特히 lower flange에서 法線應力은 상당한 구배를 갖고 線型的으로 分佈하며, 剪斷應力도 非線型的으로 分佈하여 對稱斷面(*S-A*)에서의 分佈와는 많은 차이를 보여준다. 이는 非對稱斷面에서 非對稱效果 및 그에 따른 warping現象의 구속효과가 크게 나타나고 있음을 說明해 준다.

두 斷面의 法線應力 τ_{xx}와 剪斷應力 τ_{xs}의 最大値의 比를 Fig. 10, Fig. 11, Fig. 13과 Fig. 15에서 求하면

$(\tau_{xx})_{S-B}/(\tau_{xx})_{S-A}=1.178.$

$(\tau_{xs})_{S-B}/(\tau_{xs})_{S-A}=1.174.$

로서 非對稱斷面材의 各各의 應力의 最大値가 약 17% 정도 크다.

앞서 記述한 方法으로 許容荷重을 구하면 (S-A)는 0.0198MN/m^2, (S-B)는 0.0168 MN/m^2으로 非對稱斷面材가 對稱斷面材에 比해 17%정도 작다. 단, 이때의 재료의 降伏應力은 275MN/m^2이다.

以上의 結果로부터 同一 斷面積을 갖는 對稱, 非對稱斷面材를 比較할 때 强度面에서 非對稱斷面材가 不利하다고 할 수 있다.

4. 結 言

補剛板을 有効幅槪念을 利用하여 grillage로 置換하고, 薄板보의 特性때문에 7自由度 問題로써 有限要素法으로 解析하였다.

等價應力은 剪斷應力을 고려한 $\sigma_{eq}=\sqrt{\tau_{xx}^2+3\tau_{xs}^2}$을 使用하였다. 그 結果를 要約하면 다음과 같다.

(1) 非對稱斷面材으로 補剛된 平板은 對稱 斷面材로 補剛된 平板과는 달리 斷面中心과 剪斷中心과의 偏心으로 비틂과 warping이 일어나고, warping現象의 구속으로 Bimoment, warping shear等이 생겨서 應力分布가 對稱斷面材의 그것과는 상당한 차이를 보이며, 最大應力도 對稱斷面材 보다 크다. 따라서 許容荷重이 對稱斷面材의 경우보다 낮다(分布荷重의 경우 약 17% 정도)

(2) 本 論文의 프로그램을 利用하여 任意의 斷面材에 對한 應力解析 및 許容荷重을 求할 수 있다.

(3) 本 論文에서는 板의 두께가 다른 치수에 比해서 상당히 작다는 假定 下에서 構成方程式을 誘導하였는데, 좀 더 正確한 解析을 위해서는 變形度와 應力의 板의 두께方向으로의 變化를 考慮해야 할 것이다.

後 記

本 硏究는 現代group이 서울大學校 工科大學 造船工學科에 기증한 教授硏究 活動 基金의 뒷바침으로 이루어진 것임을 밝히는 바이다.

參 考 文 獻

1. S.P. Timoshenko and J.M. Gere; "*Theory of Elastic stability*," McGraw-Hill Pub. Co., 1961.
2. S.P. Timoshenko and J.M. Gere; "*Mechanics of Materials*," Litton Educational Pub. Inc., 1972.
3. M.S. Troitsky; "*Stiffened Plate: Bending, Stability and Vibrations*," Elsevier Scientific Pub. Co., Amsterdam, 1976.
4. O.C. Zienkiewicz; "*The Finite Element Methods in Engineering Science*," McGraw-Hill Pub. Co., 1977.
5. Y.C. Fung; "*Foundation of Solid Mechanics*," Pientice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1966.
6. C.L. Dym and I.H. Shames; "*Solid Mechanics, a Variational Approach*," McGraw-Hill Pub. Co., 1973.
7. J.T. Oden; "*Mechanics of Elaslic Structures*," McGraw-Hill, Pub. Co., 1967.
8. 任尙鐭, 鄭紀台; "補剛材가 붙은 平板의 解析", 工學碩士學位論文, 서울대학교, 1977.
9. G. Powell and R. Klinger; "Elastic Laterial Buckling of Steel Beams," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 96, No. ST9, pp. 1919-1932, 1970.
10. C.P. Johnson and K.M. Will; "Beam Buckling by Finite Element Procedure," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*. Vol. 100, No. ST3, pp. 669-684, 1974.
11. R.J. Reilly; "Stiffness Analysis of Grids Including Warping," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 98, No. ST7, pp. 1511-1523, 1972.
12. Zdenêk P. Bazânt and Mahjoub El Nimeiri; "Large Deflection Spatial Buckling of Thin-Walled Beams and Frames," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*. Vol. 99, No. EM 6, pp. 1259-1281, 1973.
13. Klas Lundgren; "Vlasov Torsion of Elastic Ideally-Plastic Beams of Thin-Walled Open Cross Section," *International Journal of Mechanical Sciences* Vol. 18, pp. 105-109.
14. Klas Lundgren; "The Sectorial Coordinate of Non-linearly Elastic Beams of Three Thin-Walled open Cross Sections," *International Journal of Mechanical Sciences* Vol. 18, pp. 413-416.
15. R. Barsoum and R.H. Gallagher; "Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems," *International Journal of*

Numerical Method for Engineers Vol. 2, No. 3, pp. 335-352, 1970.

16. Zdenêk P. Bazânt; "*Nonuniform Torsion of Thin-Walled Bars of Variable Cross Sections,*" International Association for Bridge and Structural Engineering Pub., Vol. 25, pp. 245-267, 1965.