다입력－다출력 시스템의 가제어성 정준형에 관한 연구

(A Study on Controllable Canonical Forms for Multi-Input Multi-Output Systems)

오 세 호*, 변 증 남**
(Oh, Seho and Bien, Zeungnam)

요 약

상태 방정식으로 기술되는 다입력－다출력 시스템에 대해 상태 궤환을 이용하여 전 시스템의 극(pole)을 s-평면의 지정하는 곳으로 이동시킬 수 있다. 본 논문에서는 극배정(pole assingnment)을 위한 상태 궤환 이득 행열을 효과적으로 구할 수 있는 정준형(canonical form)에 대하여 논의하였으며 이러한 정준형이 주어진 경우 극을 원하는 곳에 배정하는 상태 궤환 이득 행열의 계산 방법에 대하여 논의하였다.

Abstract

On the multivariable systems described by state equations, it is well known that the poles of the system can be arbitrarily assigned in the S-plane by some state feedback. In this paper, it is discussed that a canonical form by which the state feedback gain matrix for pole assignment may be easily obtained is studied and also an algorithm to find the state feedback gain matrix is presented.

1. 서 론

주어진 시불변의 (time invariant) 시스템이 상태방정식(state equation)으로 기술되는 경우, 상태변수(state variable)를 어떻게 선택하느냐에 따라 여러 가지의 다른 수학적 형태로 기술될 수 있으며, 상태변수의 선택방법이 무한히 많이 존재하기 때문에 무한히 많은 서로 다른 형태의 상태방정식이 존재한다. 상태변수의 선택 방법은 사용 목적에 따라 몇가지 편리한 형태가 있어 이를 시스템의 정준형(canonical form)이라 부른다. (부록 1 참조)

시스템의 정준형은 단일 변수 시스템에 대해서는 가제어성 정준형(controllable canonical form), 가관측성 정준형 (observable canonical form), Jordan 정준형등이 있으며[1], 다변수 시스템에서는 미정의 계수 (nonfixed parameter)가 적은 Luenberger의 정준형을 들 수 있으나, 시스템의 극을 계산하기가 힘들고 따라서 상태궤환시에 극을 원하는 곳으로 배정하는 상태궤환 행열을 구하기 힘들다[2]-[6]. 그외에 prime 정준형등 여러 가지 정준형이 존재한다[7][8]

본 논문에서는, 시스템의 극(pole)이 모두 다른 경우 시스템의 극이 s-평면의 지정하는 곳에 있게 하는 상태궤환 행열을 효과적으로 구할 수 있는 정준형을 제시하고, 이 정준형에 대하여 상태궤환 행열을 구하는 방법에 대하여 논의 하고자 한다.

본 논문은 2장에서는 새로운 가제어성 정준형을 유도하고, 3장에서 상태궤환 행열을 구하는 법에 대하여 논의하며, 4장에서는 예를, 그리고 참고문헌과 부록(주)으로 구성되어 있다.

2. 새로운 가제어성 정준형의 유도

시스템의 상태방정식이 다음과 같이 주어졌다고 하자.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \cdots\cdots (1)$$

단, x는 nxl 벡터, u는 mxl 벡터,

*準會員, **正會員 韓國科學院 電気 및 電子工學科
(Dept. of Electrical Science, KAIS)
接受日字 : 1980年 4月 25日

A는 nxn 행열, B는 nxm 행열이다.

이 시스템에 대하여 임의의 비특이 행열 P를 취하여

$$\bar{x} = Px \quad \cdots\cdots (2)$$

로 되는 상태 변수의 변환을 행하면 상태방정식이 다음과 같이 변한다.

$$x = Ax + Bu \quad \cdots\cdots (3)$$

(단, $\bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{B} = PB$ 이다)

이 장의 목적은 적당한 등 가변환 P가 있어서 $\bar{A}$, $\bar{B}$가 다음과 같은 형을 갖는 정준형이 존재함을 보여 주고자 하는 데 있다. 즉,

$$\bar{A} = \text{block diag}\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_s\} \cdots (4)$$

$$\bar{B} = [B_{ij}]$$

(단, $A_1 \cdots\cdots, A_s$는 가제어형 companion 행열, B_{ii}의 첫째열 벡터가 $[0\ 0 \cdots\cdots 1]'$ 이며 $B_{ij} = 0\ (i > j)$ 이다.)

2-1. 고유치와 그에 대응하는 선형 연산자 및 기호에 대하여

상태 궤환 전의 시스템의 극은 행열A의 고유치와 동일하므로 시스템의 극에 대한 기술 대신에 행열 A의 고유치에 대하여 기술하여도 마찬가지의 결과를 가질 수 있다.

행열A의 고유치의 집합Λ와 고유 벡터의 집합 E가 다음과 같다고 하자.

즉,

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n\} \cdots\cdots (5, a)$$

$$E = \{e_1, e_2, \cdots\cdots, e_n\} \cdots\cdots (5, b)$$

이때 집합 Λ의 원소 λ_i와 집합E의 원소 e_i 사이에 다음과 같은 관계가 있다고 가정하자. 즉,

$$Ae_i = \lambda_i e_i \cdots\cdots (6)$$

(6)식과 같은 관계를 만족하면 λ_i와 e_i는 서로 대응한다고 하고, 또한 모든 i 에 대하여 (6)식이 만족되면 Λ와 E가 대응한다고 정의한다. 일반적으로 t 에 대한 멱급수(polynomial) $l(t)$와 t를 A로 대치한 선형 연산자 $L(A)$ 사이에

$L(A)e_i = l(\lambda_i)e_i$, (단, 집합 Λ의 원소 λ_i에 대하여 집합E의 원소 e_i가 있어서 그 사이에 $Ae_i = \lambda_i e_i$의 관계가 만족된다)

의 관계가 성립할 때식(7)을 만족하는 $L(A)$와 $l(t)$를 서로 대응된다고 정의한다. 집합Λ의 power set $P(\Lambda)$를 생각하면 $P(\Lambda)$의 임의의 원소인 $\Lambda_k (k = 1, 2, \cdots\cdots, 2^n)$에 대하여 멱급수 $l_k(t)$가 존재하여

$$\Lambda_k = \{t \mid l_k(t) = 0\} = \{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots \lambda_{n(k)}^k \mid \lambda_i^k e \Lambda\} \cdots\cdots (8)$$

(단, $n(k) \triangleq$ cardinal number of Λ_k)

와 같은 관계가 성립한다. 그러면 $l_k(t)$와 이에 대응하는 선형연산자 $L_k(A)$는 다음과 같이 쓰여진다. 즉,

$$L_k(A) = (A - \lambda_1^k I)(A - \lambda_2^k I) \cdots (A - \lambda_{n(k)}^k) \cdots (9)$$

$$l_k(t) = (t - \lambda_1^k)(t - \lambda_2^k) \cdots\cdots (t - \lambda_{n(k)}^k) \cdots\cdots (10)$$

또한 $L_k(A)$와 $l_k(t)$의 표현에서 i 번째항 $(A - \lambda_i^k I)$ 및 $(t - \lambda_i^k)$가 빠진 것을 각각 $L_k^i(A)$ 및 $l_k^i(t)$라 하자. 즉,

$$L_k^i(A) = (A - \lambda_1^k I) \cdots (A - \lambda_{i-1}^k I)(A - \lambda_{i+1}^k I) \cdots\cdots (A - \lambda_{n(k)}^k I) \cdots\cdots (11)$$

$$l_k^i(t) = (t - \lambda_1^k) \cdots (t - \lambda_{i-1}^k)(t - \lambda_{i+1}^k) \cdots (t - \lambda_{n(k)}^k) \cdots\cdots (12)$$

그러면 $L_k^i(A)$와 $l_k^i(t)$는 서로 대응됨을 쉽게 보일 수 있다.

이제 $P(\Lambda)$의 원소인 $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots\cdots, \Lambda_k$에 대하여 $\bar{\Lambda}_k$를 다음과 같이 정의하자 즉,

$$\bar{\Lambda}_k = \Lambda_k - \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \Lambda_i\right) \quad \bar{\Lambda}_1 = \Lambda_1 \cdots\cdots (13)$$

(단, $\Lambda_i \in P(\Lambda)$, $A - B = A \cap B^c$ 이다)

이와 같이 정의하면 다음과 같은 등식을 얻는다. 즉

$$\bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i = \bigcup_{i=1}^{k} \bar{\Lambda}_i \cdots\cdots (14)$$

$$\bar{\Lambda}_k \cap \bar{\Lambda}_m = \bar{\Lambda}_k \cap \Lambda_m = \phi \ (k > m) \cdots\cdots (15)$$

식 (6), (7), (8)을 만족하고 식 (13)에 의하면 표기된 Λ_j에 대하여 다음절에 쓰여질 각 기호는 표1과 같다.

표 1. 기 호 표

집 합	Λ_k	$\bar{\Lambda}_j$	$\bar{\Lambda}_j \quad \Lambda_k$	$\bar{\Lambda}_j - \Lambda_k$	ϕ
멱 급 수	$\bar{l}_k(t)$	$l_j(t)$	$\bar{G}_j l_k(t)$	$\bar{D}_j l_k(t)$	
선형연산자	$L_k(A)$	$\bar{L}_j(A)$	$\bar{G}_j L_k(A)$	$\bar{D}_j L_k(t)$	I
고 유 치	λ_i^k	$\bar{\lambda}_i^j$	$\bar{G}_j \lambda_i^k$	$\bar{D}_j \lambda_i^k$	—
고 유 벡 터	e_i^k	$\bar{e}_i^j$	$\bar{G}_j e^k$	$\bar{D}_j e_i^k$	—
원 소 의 수	$n(k)$	$\bar{n}(j)$	$\bar{G}_n(j, k)$	$\bar{D}_j n(j, k)$	0
i 번째항이 빠진 경우	$l_k^i(t)$	$\bar{l}_j^i(t)$	$\bar{G}_j l_k^i(t)$	$\bar{D}_j l_k^i(t)$	—
	$L_k^i(A)$	$\bar{L}_j^i(A)$	$\bar{G}_j L_k^i(A)$	$\bar{D}_j L_k^i(A)$	—

위의 표에서 멱급수(예, $l_k(t)$)는 집합 (Λ_k)의 원소로서 구성되므로 멱급수 사이의 관계는 집합사이의 관계로 대치될 수 있다.(부록 2 참조)

2-2. 새로운 가제어성 정준형의 존재에 대한 증명

이 절에서는 주어진 다변수 시스템에 대해서 가제어성 정준형을 새로이 유도하였다. 이 결과를 보이기 위하여 몇개의 준정리를 먼저 제시한다.

(준정리 1)

선형 연산자 L_k 와 L_k^i 에 대하여 nxl 열 벡터 b_k가 존재하여

$$L_k b_k = 0, \qquad L_k^i b_k \neq 0 \quad \cdots\cdots (16)$$

를 만족하면

$$b_k = \sum_{m=1}^{n(k)} \alpha_m \cdot e_m^k \quad \cdots\cdots (17)$$

이고 $\alpha_i \neq 0$ 이다.

이의 증명은 간단하므로 생략하겠으며, 이의 준정리로 부터 다음과 같은 준정리를 얻을 수 있다.

(준정리 2)

$$L_i b_i = 0 \ (i=1, 2, \cdots\cdots, k) \quad \cdots\cdots (18)$$

$$\overline{L}_j \overline{b}_j = 0 \ (j=1, 2, \cdots\cdots, k) \quad \cdots\cdots (19)$$

를 만족하는 b_i, $\overline{b}_j$ 에 대하여

$$\overline{b}_k = b_k + \sum_{j=1}^{k-1}\left[\sum_{i=1}^{\overline{G}_{n(j,k)}} \alpha_{ij}^k \cdot (\overline{G}_j L_k^i) \cdot (\overline{D}_j L_k) \cdot \overline{b}_j\right] \quad \cdots\cdots (20)$$

가 되는 α_{ij}^k 가 존재한다.

이의 증명은 부록 3에 있다.

(준정리 3) 등식

$$\sum_{r=0}^{\overline{n}(j)-1} \alpha_r \cdot [A]^r \cdot \overline{b}_j = \sum_{p=1}^{\overline{n}(j)} \beta_p \cdot \overline{L}_j^p \cdot \overline{b}_j \quad \cdots\cdots (21)$$

이 성립하기 위한 필요 충분 조건은

$$\sum_{r=0}^{\overline{n}(j)-1} \alpha_r \cdot (\overline{\lambda}_p^j)^r = \beta_p \cdot \overline{l}_j^p (\overline{\lambda}_p^j) \quad \cdots\cdots (22)$$

$$(\text{단, } p=1, 2, \cdots\cdots, \overline{n}(j))$$

이다.

이에 대한 증명은 간단하므로 생략하겠으며, 준정리 2와 합하여 다음과 같은 정리를 얻는다.

정리 1)

행열 M을

$$M = [\overline{b}_1 A\overline{b}_1 \cdots A^{\overline{n}(1)-1}\overline{b}_1 \vdots \overline{b}_2 \cdots \vdots \overline{b}_s \cdots A^{\overline{n}(s)-1}\overline{b}_s] \quad \cdots\cdots (23)$$

이라 하면 행열 M은 비특이적 (nonsingular)이다.

$$(\text{단, } n(1) + \cdots + n(s) = n)$$

이의 증명은 부록 4에 있으며, 정리 1과 식(14)는 M의 각 열벡터의 선형조합이 행렬 A의 특성치를 모두 가지고 있음을 말한다. 또한 식(15)는 b_j 와 b_i로 이루어진 열 벡터들이 서로 무관련 (decoupling)되어 있음을 의미한다. 다음의 정리 2는 새로운 정준형이 유도됨을 보이고 있다.

정리 2)

가제어성 시스템의 상태방정식

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \cdots\cdots (1)$$

는 등가변환 p 가 존재하여

$$\overline{x} = Px \quad \cdots\cdots (2)$$

의 등가변환을 하면

$$\dot{\overline{x}} = \overline{A}\overline{x} + \overline{B}u \quad \cdots\cdots (3)$$

의 상태방정식이 되며 여기서 $\overline{A}$, $\overline{B}$는 다음과 같은형이다. 즉,

$$\overline{A} = \text{block diag}\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_s\} \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\overline{B} = [B_{ij}]$$

(단, $A_1, \cdots\cdots, A_s$ 는 가제어형 companion 행열이며, B_{ii} 의 첫째 열벡터가 $[0\ 0 \cdots 1]'$ 이고 $B_{ij} = 0$ $[i > j]$ 이다)

증명)

등가 변환 행열 p 에 대하여

$$Q \triangleq P^{-1}$$

이라 하고 Q를 열벡터의 나열로 생각하자. 즉,

$$Q = [q_1^1, q_1^2, \cdots, q_1^{\overline{n}(1)} \vdots q_2^1, \cdots \vdots q_s^1, q_s^1, \cdots, q_s^{\overline{n}(s)}] \quad \cdots\cdots (24)$$

또한 멱급수 $\overline{l}_i(t)$를

$$\overline{l}_i(t) = t^{\overline{n}(i)} + \alpha_i^1 t^{\overline{n}(i)-1} + \cdots + \alpha_i^{\overline{n}(i)} \quad \cdots\cdots (25)$$

라 하자. 이때 $q_i^1, q_i^2, \cdots, q_i^{\overline{n}(i)}$ 를 다음과 같이 잡고

$$q_i^{\overline{n}(i)} \triangleq \overline{b}_i$$

$$q_i^{\overline{n}(i)-1} \triangleq Aq_i^{\overline{n}(i)} + \alpha_i^1 q_i^{\overline{n}(i)} \quad \cdots\cdots (26)$$

$$\vdots$$

$$q_i^1 \triangleq Aq_i^2 + \alpha_i^{\overline{n}(i)-1} q_i^{\overline{n}(i)}$$

Cayley-Hamilton 정리를 사용하면 [1]

$$Aq_i^1 = -\alpha_i^{\overline{n}(i)} q_i^{\overline{n}(i)}$$

$$Aq_i^2 = q_i^1 - \alpha_i^{\bar{n}(i)-1} q_i^{\bar{n}(i)} \quad \cdots\cdots (27)$$

$$\vdots$$

$$Aq_i^{\bar{n}(i)} = q_i^{\bar{n}(i)-1} - \alpha_i^1 q_i^{\bar{n}(i)}$$

가 된다. 이를 행열 방정식으로 바꾸면

$$AQ = Q\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & A_s \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (28)$$

이 되고 따라서

$$\bar{A} = PAP^{-1} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & A_s \end{bmatrix} \cdots (29)$$

가 된다.

이제 행열 B에 대한 변환을 생각하자.

$$\bar{L}_j \bar{b}_j = O$$

에서 $(A)^k \cdot \bar{b}_j \ (k > \bar{n}(j))$는 $(A)^k \cdot \bar{b}_j \ (k < \bar{n}(j)-1)$의 선형조합으로 표시된다.

준정리 2와 준정리 3에서

$$b_i = b_i + \sum_{j=1}^{i-1}\left[\sum_{r=0}^{\bar{n}(j)-1} \eta_{rj}^i \cdot (A)^r \cdot \bar{b}_j\right] \cdots\cdots (30)$$

이므로 b_i는

$$b_i = \bar{b}_i + \sum_{j=1}^{i-1}\left[\sum_{r=0}^{\bar{n}(j)-1} (-n_{rj}^i) \cdot (A)^r \cdot \bar{b}_j\right] \cdots\cdots (31)$$

여기서 $\Lambda_i = \phi$이면 $\bar{b}_i = 0$이므로 (31)식을 Q의 열벡터로 바꾸면

$$b_i = q_i^{\bar{n}(i)} + \sum_{j=1}^{i-1}\left[\sum_{u=1}^{\bar{n}(j)} \theta_{uj}^i q_j^u\right], \text{ for } \Lambda_i \neq \phi$$

$$\cdots\cdots (32)$$

$$b_i = \sum_{j=1}^{i-1}\left[\sum_{u=1}^{\bar{n}(j)} \theta_{uj}^i q_j^u\right], \text{ for } \Lambda_i = \phi$$

식 (32)를 행열 방정식으로 바꾸면

$$B = Q\begin{bmatrix} B_1 & B_{12} \cdots\cdots & B_{1s} \\ 0 & B_2 \cdots\cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots & B_s \end{bmatrix}$$

가 되고 따라서 $\bar{B}$는

$$\bar{B} = PB = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} \cdots\cdots & B_{1s} \\ 0 & B_2 \cdots\cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & B_s \end{bmatrix} \cdots\cdots (33)$$

그런데 식(29)와 식(33)은 식(4)와 동일하다.

이상에 의하여 새로운 정준형의 존재는 증명되었다.

이상에서 보인 유도과정에서 변환 행열Q와 식(22)로 표시된 행열M사이에는 다음과 같은 관계식을 만족함을 첨언한다. 즉,

$$M_i = [\bar{b}_i, A\bar{b}_i, \cdots, A^{\bar{n}(i)-1}\bar{b}_i] \ (i = 1, 2, \cdots, s)$$

$$\cdots\cdots (34)$$

이라 하면,

$$M = [M_1 : M_2 : \cdots : M_s] \quad \cdots\cdots (35)$$

이다. 또한

$$U_i = \begin{bmatrix} \alpha_i^{\bar{n}(i)-1} & \alpha_i^{\bar{n}(i)-2} \cdots\cdots \alpha_i^1 & 1 \\ \alpha_i^{\bar{n}(i)-1} & \alpha_i^{\bar{n}(i)-3} \cdots\cdots 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_i^1 & 1 \cdots\cdots 0 & 0 \\ 1 & 0 \cdots\cdots 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots (36)$$

라 하고

$$U = \text{block diag}\{U_1, U_2, \cdots, U_s\} \cdots\cdots (37)$$

라 하면

$$Q = MU \cdots\cdots (38)$$

가 된다. 행열M과 U는 비특이적이므로 따라서 Q도 역시 비특이 적이다.

2-3. 제안된 정준형을 구하는 Algorithm

이절에서는 2-1 절 및 2-2 절을 통하여 제안된정준형을 구하는 방법을 다음과 같이 체계화 하여 제시한다.

Step 1,

행열B를

$$B = [b_1, b_2, \cdots; b_m] (\text{단}, b_i \ \ n \times l \ \text{vector})$$

라 할때, 행열

$$[b_1, Ab_1, \cdots, A^{n(1)}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, b_m, Ab_m, \cdots, A^{n(m)}b_m]$$

를 구한다. 단, $i = 1, 2, \cdots, m$에 대하여 $b_i, Ab_i, \cdots, A^{n(i)-1}b_i$는 일차독립이고 $b_i, Ab_i, \cdots, A^{n(i)} b_i$는 일차 종속이다.

Step 2,

$1(t)$를

$$1(t) \triangleq \det[tI - A]$$

라 하고 각각의 $i = 1, \cdots, m$에 대하여

$$N_i = \left[A^{n(i)-1}b_i,\ A^{n(i)-2}b_i,\ \cdots,\ I\right]$$

라 하자. 이때 행열

$$D_i = -(N_i'N_i)^{-1}N_i'A^{n(i)}b_i = \left[d_1^i,\ d_2^i,\ \cdots,\ d_{n(i)}^i\right]$$

로 표시하고 각각의 d_j^i를 이용하여 $l_i(t)$를 다음과 같이 정의한다. 즉,

$$l_i(t) = t^{n(i)} + d_1^i t^{n(i)-1} + \cdots + d_{n(i)}^i.$$

Step 3,

$l_i(t)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$를 정의하되

$$\bar{l}_1(t) \triangleq l_1(t)$$

$$\bar{l}_i(t) \triangleq G.C.D.\left\{1(t),\ \frac{1(t)}{\prod_{j=1}^{i-1}\bar{l}_j(t)}\right\} \quad (i = 2, \cdots, m)$$

로 한다.

Step 4,

$\bar{l}_i(t)$에 t 대신 A를 대치한 선형연산자 $\bar{L}_i(A)$를 구하여 〔식(30) 참조〕

$$\bar{L}_i(A)b_i + \sum_{j=1}^{i-1}\left[\sum_{r=0}^{\bar{n}(j)-1}\eta_{rj}^i \cdot \bar{L}_i(A)\cdot[A]^r \cdot \bar{b}_j\right] = 0$$

가 되는 η_{rj}^i를 구하면, $\bar{b}_i$는 식(30)에 의하여 구해진다.

Step 5,

멱급수 $l_i(t)$의 계수를 이용하여 $\bar{l}_i(t)$에 대한 companion 행열을 구한 다음 이를 A_i $(i = 1, 2, \cdots, s)$라 하면,

$$\bar{A} = \text{block diag}\{A_1, A_2, \cdots, A_s\}$$

가 된다.

Step 6,

$$H_j = \left[\eta_{0j}^i,\ \eta_{1j}^i,\ \cdots,\ \eta_{\bar{n}(j)-1j}^i\right]$$

$$\theta_j^i = \left[\theta_{1j}^i,\ \cdots,\ \theta_{n(j)j}^i\right]$$

라고 하면

$$\theta_j^i = U_j^{-1}(-H_j)$$

와 같은 관계식을 갖는다. 이때,

i) $\bar{l}_i(t) = 1$인 경우에는 $\bar{b}_i$를

$$\bar{b}_i = \left[\theta_1^{i\prime} \vdots \theta_2^{i\prime} \vdots \cdots \vdots \theta_{i-1}^{i\prime} \vdots 0 \vdots 0 \vdots \cdots \vdots 0\right]'$$

라 하고

ii) $\bar{l}_i(t)$가 t에 관하여 1차 이상의 멱급수 인 경우에는 $\bar{b}_i$를

$$\bar{b}_i = \left[\theta_1^{i\prime} \vdots \theta_2^{i\prime} \vdots \cdots \vdots \theta_{i-1}^{i\prime} \vdots 0, 0, \cdots, 1 \vdots 0 \vdots 0 \vdots \cdots \vdots 0\right]'$$

이라 하여 구하고자 하는 $\bar{B}$를

$$\bar{B} = [\bar{b}_1,\ \bar{b}_2,\ \cdots,\ \bar{b}_m]$$

로 부터 얻는다.

3. 상태 궤환 행열에 대하여

상태 방정식 식(1)에서 상태 궤환 시킬때의 상태 궤환 이득 행열을 k라 하면, 시스템의 입력 u는

$$u = Kx + v \quad \cdots\cdots (39)$$

가 되며, 따라서 상태궤환 후의 상태방정식은

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv \quad \cdots\cdots (40)$$

가 된다. 여기서 등가변환 P를 생각하여

$$\bar{x} = Px,\quad \bar{K} = KP^{-1}$$

라 두면 식(35)는 등가변환에 의하여

$$\dot{\bar{x}} = A^*\bar{x} + \bar{B}v \quad \cdots\cdots (41)$$

이며,

$$A^* = \bar{A} + \bar{B}\bar{K} \quad \cdots\cdots (42)$$

이다.

우리가 원하는 극치를

$$\{\bar{\lambda}_1^1, \cdots, \bar{\lambda}_1^{\bar{n}(1)} : \bar{\lambda}_2^1, \cdots : \bar{\lambda}_s^1, \cdots, \bar{\lambda}_s^{\bar{n}(s)}\}$$

라 하고, 상태궤환 전의 시스템의 극치를

$$\{\lambda_1^1, \cdots, \lambda_1^{\bar{n}(1)} \lambda_2^1, \cdots : \lambda_s^1, \cdots, \lambda_s^{\bar{n}(s)}\}$$

하자. 이때 $\bar{K}$를

$$\bar{K} = \text{block diag}\{K_1, k_2, \cdots, k_s\} \cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

라 하면 식(38)에서 A^*는

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1+B_1K_1 & B_{12}K_2 & \cdots & B_{1s}K_s \\ 0 & A_2+B_2K_2 & \cdots & B_{2s}K_s \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & A_s+B_sK_s \end{bmatrix} \cdots (44)$$

이 된다. 이때 상태궤환 후의 시스템의 극치는

$$\det[tI - A^*] = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

의 해가 된다.
그런데

$$\det[tI - A^*] = \prod_{i=1}^{s} \det[tI_i - A_i - B_i K_i] \cdots (46)$$

이므로 궤환후의 극치의 집합은 행렬 $(A_i + B_i K_i)$의 고유치 집합의 합집합과 같다. 이때

$$(t-\bar{\lambda}_i^1)(t-\bar{\lambda}_i^2)\cdots(t-\bar{\lambda}_i^{\bar{n}(i)}) = t^{\bar{n}(i)} + \bar{\alpha}_i^1 t^{\bar{n}(i)-1} + \cdots + \bar{\alpha}_i^{\bar{n}(i)} \cdots\cdots\cdots\cdots (47)$$

이라 하면

$$K_i = \begin{bmatrix} \alpha_i^{\bar{n}(i)} - \bar{\alpha}_i^{\bar{n}(i)} & \cdots & \alpha_i^1 - \bar{\alpha}_i^1 \\ 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (48)$$

라 놓으므로써 원하는 극치를 얻을 수 있다.

4. 예 제

시스템이 (1)식과 같이 표현되고 (1)식에서 행렬A, B 다음과 같다고 하자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (49)$$

이때 b_1, b_2를

$$b_1 = [\,1\,3\,0\,0\,0\,]', \quad b_2 = [\,-1\,0\,2\,3\,2\,]'$$

라 하여 $[b_1\ Ab_1\ A^2b_1\ A^3b_1 : b_2\ Ab_2\ A^2b_2\ A^3b_2]$를 구하면,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & : & -1 & -5 & -7 & -17 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & : & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -17 & : & 2 & 5 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 3 & 9 & 15 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (50)$$

행열 (50)에서 다음과 같은 관계식이 나온다.

$$A^3b_1 + A^2b_1 - 2Ab_1 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (51)$$

$$A^3b_2 - A^2b_2 - 2Ab_2 = 0$$

이를 멱급수로 바꾸면

$$l_1(t) = \bar{l}_1(t) = t^3 + t^2 - 2t$$

$$l_2(t) = t^3 - t^2 - 2t \cdots\cdots\cdots\cdots (52)$$

따라서는 $\bar{l}_2(t)$는

$$\bar{l}_2(t) = t^2 - t - 2$$

이때

$$\bar{L}_2(A) = A^2 - A - 2I$$

이므로

$$(A^2 - A - 2I)\cdot b_2 + \sum_{r=0}^{2} \eta_r (A^2 - A - 2I)$$

$$A^r \cdot b_1 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (53)$$

식(51)을 이용하면

$$(A^2b_2 - Ab_2 - 2b_2) + \eta_0(A^2b_1 - Ab_1 - 2b_1)$$

$$-2\eta_1(A^2b_1) - 2\eta_2(A^3b_1) = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (54)$$

이식을 풀면

$$\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 = 0$$

$$3\eta_0 + 2\eta_1 + 2\eta_2 = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (55)$$

$$6\eta_0 - 7\eta_1 + 17\eta_2 = 1$$

이 되어
식(55)를 풀면

$$\eta_0 = 1, \ \eta_1 = \eta_2 = -\frac{1}{2}$$

이다. 따라서

$\bar{b}_2 = [-1\ 1\ 1\ 3\ 2]'$, $\bar{b}_1 = [1\ 3\ 0\ 0\ 0]'$

이며 따라서 $Q = p^{-1}$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdots\cdots (56)$$

이 되어

$$\theta_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore b_2 = b_2 + \tfrac{1}{2}q^1 = q^5 + \tfrac{1}{2}q^1 \cdots\cdots (57)$$

이므로 식(3)에서 $\bar{A}$, $\bar{B}$는

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots\cdots (58)$$

이다. 이제 우리가 원하는 극치를 { -4, 3, 0, -1, 2 } 라 하고 극치의 변화를 b_1에 의하여만 택한다면

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots (59)$$

이 되고

$$k = \bar{k}p = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & 5 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots (60)$$

가 된다.

참 고 문 헌

1. C. T. Chen, Introduction to linear system theory, HRW series in electrical engineering electronics, and system
2. D. G. Luemberger, "Canonical forms for Linear Multivariable System," IEEE Trans. on Automatic Contrnl (short paper), Vol. AC-12, pp. 290-293, June 1967.
3. W. A. Wolovich and P. L. Falb, "On the Structure of Multivariable Systems", J.SIAM on Control, Vol. 7, No. 3, pp. 437-451, August 1969.
4. K. B. Datta, "An Algorithm to Compute canonical forms in Multivarible Control Systems," IEEE Trans. on Automatic Control (correspondence), Vol. AC-22, pp. 129-132, February 1977.
5. D. G. Denry, "Comments on Luenberger's Canonical from Revisited," IEEE Trans. on Automatic Control (correspondence), Vol AC-20 pp. 444-445, June 1975.
6. K. B. Datta, "Canonical form of Reduced Nonfixed Parameters," IEEE Trans. on Automatic Control (correspondence), Vol. AC-21, pp. 412-413, June 1976.
7. S. H. Wang and E. J. Davison, "Canonical forms of Linear Multivariable Systems," J. SIAM on Control and Optimization, Vol. 14, No. 2, pp. 236-250, February 1976.
8. M. Heymann and J. A. Thorpe, "Transfer equivalence of Linear Dynamical Systems," J. SIAM on Control, Vol. 8, No. 1, pp. 19-40, February 1970.

부 록

1. 시스템의 정준형에 관한 정의

X를 집합이라하고, E를 X에서의 equivalent relation 이라 할 때 다음 조건을 만족하는 map ϕ : X→X를 X에서의 canonical map이라 부른다.

i) $xE\phi(x)$, $\forall x \epsilon x$

ii) $xEy \longleftrightarrow \phi(x) = \phi(y)$, $\forall x, y \epsilon x$

이때 ϕ의 image를 Im ϕ라 표시하고 이를 x 에서의 E에 대한 정준형의 집합이라 부른다.

2. 멱급수 $l_k(t)$와 집합 Λ_k 사이의 관계

3개의 멱급수 $l(t)$, $l_k(t)$, $l_n(t)$와 이에 대응되는 집합

Λ, Λ_k, Λ_n 사이에 다음과 같은 연산이 대응된다.

i) G.C.D. $\{l_k(t), l_n(t)\}$는 집합 $\Lambda_k \cap \Lambda_n$에 대응한다.

ii) L.C.M. $\{l_k(t), l_n(t)\}$는 집합 $\Lambda_k \cup \Lambda_n$에 대응한다.

iii) $l(t) / l_k(t)$는 집합 Λ_k^c에 대응한다.

(증명) i) 하나만 증명하면

식(8)에 의하여

$$\Lambda_k \cap \Lambda_m = \{t \mid l_k(t) = 0 \text{ and } l_n(t) = 0\}$$

그런데 G.C.D.의 정의에 의하여

$$\Lambda_k \cap \Lambda_n = \{t \mid G.C.D.\{l_k(t),\ l_n(t)\}=0\}$$

$\therefore$ G.C.D.$\{l_k(t), l_n(t)\}$는 집합 $\Lambda_k \cap \Lambda_n$에 대응된다.

i, ii도 같은 방법으로 증명될 수 있다.

3. 준정리 2의 증명

준정리 1에서

$$b_k = \sum_{r=1}^{\bar{n}(k)} \gamma_r^k \cdot \bar{e}_r^k + \sum_{j=1}^{k-1}\left[\sum_{q=1}^{\bar{G}n(j,k)} \gamma_{qj}^k \cdot (\bar{G}_j e_q^k)\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A.1)$$

$$\bar{b}_j = \sum_{p=1}^{\bar{D}n(j,k)} \beta_{pj}^k \cdot (\bar{D}_j e_p^k) + \sum_{q=1}^{\bar{G}n(j,k)} \Phi_{qj}^k \cdot (\bar{G}_j e_q^k) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A.2)$$

여기서 특히

$$\gamma_{qj}^k \neq 0,\quad \beta_{qj}^k \neq 0 \quad \text{(for all } j, q)$$

이며, 식(20)에서

$$\bar{L}_k \cdot b_k + \sum_{j=1}^{k-1}\left[\sum_{i=1}^{\bar{G}n(j,k)} \alpha_{ij}^k \cdot (\bar{L}_k)\cdot(\bar{G}_j L_k^i)\cdot(\bar{D}_j L_k)\ \bar{b}_j\right] = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A.3)$$

식 (A. 1), (A. 2)에서

$$\bar{L}_k\left[\sum_{r=1}^{\bar{n}(k)} \gamma_r^k \cdot \bar{e}_r^k\right] = \sum_{r=1}^{\bar{n}(k)} \gamma_r^k \cdot \bar{L}_k \cdot \bar{e}_r^k = 0 \cdots (A.4)$$

$$(\bar{D}_j L_k)\cdot\left[\sum_{p=1}^{\bar{D}n(j,k)} \beta_{pj}^k \cdot (\bar{D}_j e_p^k)\right] = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (A.5)$$

또한

$$\sum_{q=1}^{\bar{G}n(j,k)} \beta_{qj}^k\ (\bar{G}_j L_k^i)\ (\bar{D}_j L_k)\ (\bar{G}_j e_q^k) = \delta_{ij}^k \cdot (\bar{G}_j e_i^k) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A.6)$$

$$(\text{단},\ \delta_{ij}^k = \beta_{ij}^k\{\bar{G}_j l_k^i(\bar{G}_j \lambda_i^k)\}\ \{\bar{D}_j l_k(\bar{G}_i \lambda_i^k)\})$$

여기서 (A. 1), (A. 2), (A. 4), (A. 5), (A. 6)를 (A. 3)에 대입하면

$$\sum_{j=1}^{k-1}\left[\sum_{i=1}^{\bar{G}n(j,k)} \{\gamma_{ij}^k + \alpha_{ij}^k \delta_{ij}^k\}\ (\bar{l}_k(\bar{G}_j \lambda_i^k)\ (\bar{G}_j e_i^k)\right] = 0$$

여기서 $\bar{G}_j e_i^k \left[i = 1, 2, \cdots, \bar{G}n(j,k);\ j = 1, 2, \cdots, k-1\right]$ 1차 독립인 벡터이므로

$$\alpha_{ij}^k = -\frac{\gamma_{ij}^k}{\delta_{ij}^k}\ \text{〔왜냐하면 } \bar{l}_k(\bar{G}_j \lambda_i^k) \neq 0\text{〕} \cdots\cdots (A.7)$$

이다. Q.E.D.

4. 정리 1의 증명

행열 M이 비특이임을 증명하기 위해 행열 M을 이루는 열벡터가 1차 독립임을 증명하자.

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{r=0}^{\bar{n}(j)-1} \alpha_{rj} \cdot [A]^r \cdot \bar{b}_j\right] = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A.8)$$

을 생각하면 준정리 3에 의하여

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{p=1}^{\bar{n}(j)} \beta_{pj} \cdot \bar{L}_j^p\ \bar{b}_j\right] = 0$$

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{p=1}^{\bar{n}(j)} \beta_{pj} \cdot \bar{L}_j^p \cdot \{\sum_{q=1}^{\bar{n}(j)} \gamma_{qj} \cdot \bar{e}_q^j\}\right] = 0$$

이는 다시

$$\sum_{j=1}^{s}\left[\sum_{p=1}^{\bar{n}(j)} \beta_{pj}\ \gamma_{pj}\ \bar{l}_j^p(\bar{\lambda}_p^j)\ \bar{e}_p^j\right] = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (A.9)$$

가 되고 여기서 식(15)를 적용하면 $\bar{e}_p^j$는 1차 독립이므로

$$\beta_{pj} = 0$$

즉,

$$\alpha_{rj} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A.10)$$

따라서 $[A]^r \cdot \bar{b}_j$는 1차 독립이다.