

# Bilinear Z-變換을 사용한 能動SC

## 濾波器 設計에 關한 研究

### (A Study on the Design of Active SC Filters Using Bilinear Z- Transform)

李文秀\*, 李相高\*\*, 楊仁應\*\*\*

(Lee, Mun Soo Lee, Sang Seol and Young, In Eung)

#### 要 約

能動RC濾波器回路內의 모든 抵抗은 SC로 代替할 수 있다. SC는 抵抗에 比해 溫度特性 및 線型特性이 좋고 실리콘 面積이 훨씬 적게 所要된다.

本 論文에서는 Bilinear Z-變換을 使用해서 能動RC濾波器로부터 能動SC濾波기를 實現할 수 있는 一般의 方法이 提示되었다.

Bilinear Z-變換을 使用한 SC濾波法은 既存 方法으로 實現이 困難했던 FDNR濾波器나 Gyrator濾波器도 實現할 수 있으며 使用 周波數가 높아진다.

實驗結果를 통해 能動RC濾波器的 應答特性和 能動SC濾波器的 應答特性이 비슷함을 確認하였다.

#### Abstract

All the resistors in the active RC filter networks can be replaced by the switched capacitors. The switched capacitor is much better than a resistor in temperature and linearity characteristics, and the former can be fabricated on the much smaller silicon area than the latter.

In this paper, it is given the generalized design method of the active SC filter from the active RC filter using Bilinear Z-transformation.

SC filtering techniques using Bilinear Z-transform enable us to realize the FDNR and Gyrator filters which could not be realized by the existing designs, and to utilize the processing of signals at much higher frequencies than the conventional design method.

Experiments show that the response of the active SC filter is similiar to that of its prototype active RC filter.

#### 1. 序 論

能動RC濾波器回路內의 모든 抵抗은 SC(Switched Capacitor)로 代替할 수 있다. 近來에 와서 MOS 技術의 發達로 良質의 Op Amp, 커패시터, 스위치 등을 MOS化 할 수 있게 되었다. MOSIC內에서 SC는 抵抗보다 溫度 및 線型特性이 좋고 실리콘 面積이 적게 所要되는 利點이 있다.

本 論文에서는 G. C. Temes가 開發한 Bilinear Z-變換을 適用할 수 있는 SC回路를 利用해서 Low-

\* 正會員, 동양공업전문대학 통신과  
(Dept. of Electronics Dong - Yang Tech. J. College)  
\*\* 正會員, 한양대학교 공과대학 전자통신공학과  
(Dept. of Electronic Communication Engineering Han-Yang Univ.)  
\*\*\* 正會員, 연세대학교 공과대학 전자공학과  
(Dept. of Electronics Eng., Yonsei Univ.)  
接受日字: 1980年 3月 18日

Pass Third-Order FDNR(Frequency Dependent Negative Resistance) 能動 SC 濾波器를 設計試作하여 그 特性을 能動 RC 濾波器的 特性과 比較하여 考察한다.

2. SC 回路의 原理

能動 RC 濾波器를 MOS 技法으로 完全 IC 化 하지 못한 理由는 抵抗-容量積을 正確히 定할 必要性 때문이다. 더우기 擴散法에 依해 製造된 抵抗은 溫度 및 線型特性이 不良할 뿐 아니라 실리콘 面積을 크게 해야 하는 短點이 있다.

그림 1 (a)는 SC가 抵抗機能을 갖도록 하는 回路이다.

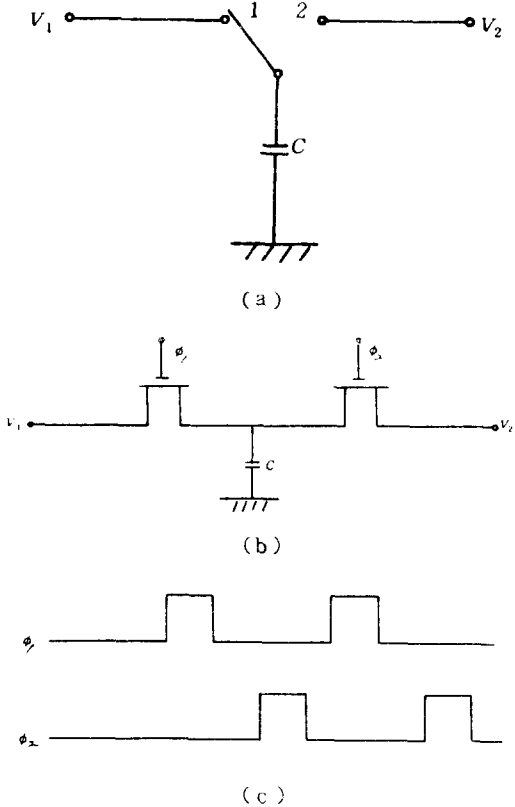


그림 1. (a) Switched 커패시터  
(b) MOS 실현  
(c) 클럭

Fig. 1. (a) Switched Capacitor  
(b) MOS implementation  
(c) Clock

그림 1 (a)에서 初期에 스위치가 node 1의 位置에 있다고 할때 커패시터 C는 電壓  $v_1$ 까지 充電되고 다음에 스위치가 node 2의 位置로 轉換되면 커패시터 C는 充電(또는 放電)되어  $v_2$  電壓으로 올라간다. 여기서 C에 依해 流入 또는 流出되는 電荷量 Q는

$$Q = C (v_2 - v_1) \dots\dots\dots (1)$$

이므로 스위치를 每  $T_C$  秒마다 左, 右로 轉換하면 node 2에 흐르는 平均電流  $i$ 는

$$i = \frac{C (v_2 - v_1)}{T_C} \dots\dots\dots (2)$$

으로 된다. 따라서 이 回路과 同一한 機能을 갖는 等價抵抗  $R_{eq}$ 는

$$R_{eq} = \frac{T_C}{C} \dots\dots\dots (3)$$

로 된다. Switching Rate  $f_c = \frac{1}{T_C}$  이 信號周波數보다 훨씬 높으면 이 回路에서 發生되는 time sampling을 無視할 수 있으므로 SC는 抵抗作用을 하게 된다. 그러나 switching rate와 信號周波數가 거의 비슷하여 sampled-data technique가 必要할 때는 一般的인 sampled-data system에서와 같이 入力信號周波數를 sampling 定理에 依해  $\frac{f_c}{2}$  以下로 帶域制限 시켜야 한다.

그림 1 (a)의 SC를 MOS 技法으로 構成하면 그림 1 (b)와 같고 두개의 MOSFET는 周波數  $f_c$ 인 Clock pulse  $\phi_1$ 과  $\phi_2$ 로 스위치 作用을 한다. 여기서  $\phi_1$ 과  $\phi_2$ 는 phase-overlap이 되지 않아야 한다.

等價抵抗  $R_{eq}$ 는 擴散法에 依해 製造된 抵抗보다 安定하고 線型特性이 良好하다고 알려져 있다. 이것은 MOS 커패시터의 絕緣體가 거의 理想的 特性을 갖기 때문이다. 이 SCR(Switched Capacitor Resistor)의 또 하나의 利點은 SC 回路의 時定數 確度가 높은 點이다. 그 이유는 switching rate  $f_c$ 로 開, 閉되는 커패시터  $C_1$ 이 커패시터  $C_2$ 에 連結되었을 때 時定數  $\tau_{RC}$ 는

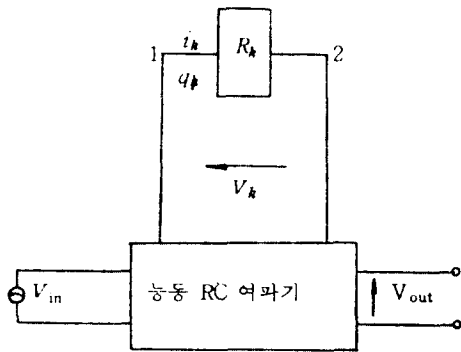
$$\tau_{RC} = \left( \frac{1}{f_c C_1} \right) C_2 = \frac{1}{f_c} \left( \frac{C_2}{C_1} \right) \dots\dots (4)$$

이므로 時定數가 容量比에 依해 決定되기 때문이다.

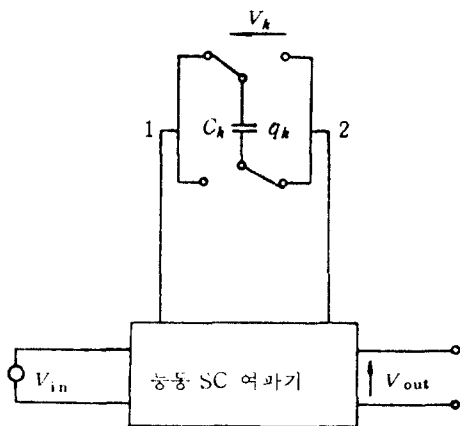
3. 能動SC 濾波器 回路

3-1. Bilinear Z-變換을 實現하는 SC 回路

能動RC 濾波器 回路內的 抵抗은 接地된 SC 로 代替될 수 있다.<sup>[1, 2, 3]</sup> 여기서 抵抗을 接地된 SC 로 代替한 것은 能動RC 濾波器的 周波數 S 와 能動SC 濾波器的 Sampled-Data 周波數 Z 間에 直接 Z 變換한 것과 같다.<sup>[4]</sup> 그러나 이 경우에는 switching rate 가 最高信號 周波數보다 훨씬 높을 때만 抵抗과 SC 間의 等價性이 成立되고 SC 積分器<sup>[5]</sup> 에서는 位相誤差가 隨伴되는 短點이 있어 이를 改善하기 爲해 그림 2 와 같이 Bilinear Z-變換을 利用한 SC 回路가 濾波器에 使用될 수 있다.



(a)



(b)

그림 2. (a) 能動RC 여파기의  $R_k$  枝路  
 (b) 能動SC 여파기의 SC 枝路  
**Fig. 2.** (a)  $R_k$  Branch in an active RC filter.  
 (b) SC Branch in an active SC filter.

그림 2 (a) 에서  $t \leq nT$  되는 期間에 抵抗  $R_k$  에 흐르는 電荷를  $q_k(nT)$  라 하면

$(n-1)T \leq t \leq nT$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 되는 동안에 抵抗  $R_k$  에 흐르는 電荷量은

$$q_k(nT) - q_k(nT-T) = \int_{(n-1)T}^{nT} i_k(t) dt = G_k \int_{(n-1)T}^{nT} v_k(t) dt \quad \dots \dots \dots (5)$$

이다. 여기서  $G_k = \frac{1}{R_k}$ ,  $i_k(t)$  는  $R_k$  에 흐르는 電流,  $v_k(t)$  는  $R_k$  兩端의 電壓이다.

式(5)의 積分을 사다리꼴 近似法에 依하여 計算하면

$$q_k(nT) - q_k(nT-T) = \frac{G_k T}{2} [v_k(nT-T) + v_k(nT)] \quad \dots \dots \dots (6)$$

로 된다.

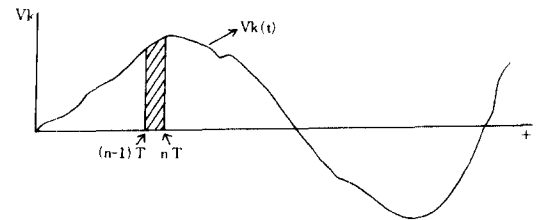


그림 3.  $R_k$  양단의 전압  
**Fig. 3.** Voltage waveform across the resistor  $R_k$ .

그림 3 은  $(n-1)T \leq t \leq nT$  동안에  $R_k$  兩端에 걸린 電壓의 크기를 表示한 것이다.

式(6)을 Z-變換하면

$$Q_k(Z) = \frac{G_k T}{2} \frac{Z+1}{Z-1} v_k(Z) = \frac{G_k v_k(Z)}{F(Z)} \quad \dots \dots \dots (7)$$

로 된다. 여기서 Z 는 sampled-data 周波數이고

$$F(Z) \text{ 는 } F(Z) = \frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1} \text{ 이다.}$$

時間  $(n-1)T \leq t \leq nT$  동안에 式(6)에 주어진 電荷를 通過시킬 수 있는 SC Branch가 그림 2 (b)에 表示되어 있다. 그림 2 (b)에서 커패시터  $C_k$  는  $t = (n-1)T$  에서  $-C_k v_k(nT-T)$  의 電荷로 充電되고  $t = nT$  에서는  $C_k v_k(nT)$  로 再充電된다. 이때  $C_k$  를 통해  $(n-1)T \leq t \leq nT$  동안에

node 1에서 node 2로 傳達된 電荷는

$$q_k(nT) - q_k(nT-T) = C_k v_k(nT) + C_k v_k(nT-T) \dots\dots\dots (8)$$

이다. 식(8)을 Z-變換하면

$$Q_k(Z) = C_k \frac{Z+1}{Z-1} v_k(Z) \dots\dots\dots (9)$$

로 되고 식(9)에서  $C_k = \frac{G_k T}{2}$ 로 定해 주면 식(9)는 식(7)과 같다. 따라서 그림 2(a)의 抵抗 Branch는  $C_k$ 를  $\frac{G_k T}{2}$ 로 定해 줄때 그림 2(b)와 같은 SC Branch로 代替될 수 있다.

한편 그림 2(a)에서 抵抗  $R_k$ 를 通過한 總電荷  $q_k(t)$ 는

$$q_k(t) = \int_{-\infty}^t i_k(\tau) d\tau = G_k \int_{-\infty}^t v_k(\tau) d\tau \dots\dots (10)$$

이다. 식(10)을 Laplace 變換하면

$$Q_k(S) = \frac{G_k}{S} v_k(S) \dots\dots\dots (11)$$

로 된다.

그림 2(a) 回路와 그림 2(b) 回路는 같은 configuration이고 모든 抵抗  $R_k$ 가  $\frac{T}{2R_k} = C_k$ 의 關係를 갖는 SC와 等價이므로 두 回路에 對하여

$$\begin{aligned} Aq &= 0 & (\text{KCL}) \\ v &= A^T e & (\text{KVL}) \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

가 成立된다. 여기서 A는 Branch와 node間的 接續行列, q는 Branch 電荷벡터, v는 Branch 電壓, e는 node 電壓이다.

RC 回路에는 Laplace 變換, SC 回路에는 Z-變換을 行하면

$$\begin{aligned} AQ &= 0 & (\text{KCL}) \\ v &= A^T E & (\text{KVL}) \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

가 된다. 能動素子인 OP Amp.는 理想的 特性을 갖는다고 假定한다. 能動 RC 回路의 커패시터 Branch에서  $Q = CV$ 의 關係는 能動SC 回路의 該當 커패시터 Branch에도 適用된다. 抵抗 Branch에 對하여는 식(11)로, SC Branch에 對하여는 식(9)로 주어진다.

따라서 식(9), (11), (13)으로부터 RC 濾波器 回路의  $E_m(S)$ ,  $v_k(S)$ ,  $Q_k(S)$ 에 對應되는 SC 濾波器 回路의  $E_m(Z)$ ,  $v_k(Z)$ ,  $Q_k(Z)$ 를 求할 수 있다.  $C_k$ 는  $\frac{G_k T}{2}$ 이므로 식(9)와 식(11)로부터 抵抗  $R_k$ 를  $C_k$ 로 代替할 수 있으며, 위의 過程으로부터  $R_k$ 를  $C_k$ 로 代替했을 때 이는 다음과 같은 周波數 Mapping에 該當된다.

$$S \longleftrightarrow \frac{2}{T} \frac{Z-1}{Z+1} \dots\dots\dots (14)$$

여기서 S는 analog 周波數, Z는 sampled-data 周波數이다. 식(14)로 주어지는 變換에서 S 領域의 左半平面은 Z 領域의 單位圓內에 mapping 되므로 安定한 能動RC 回路는 安定한 sampled-data 能動SC 回路로 變換된다.

### 3-2. Sample/Hold 回路의 必要性

그림 4와 같은 SC 回路에서 스위치가 sampling time에 만 接續된다고 하면  $t = (n-1)T$ 에서  $C_k$ 는  $C_k v_k(nT-T)$ 로 充電되었다가  $t = nT$ 에서  $C_k$ 는 放電하여 다시  $C_k v_k(nT)$ 로 再充電된다. 따라서  $(n-1)T < t \leq nT$  동안에  $C_k$ 를 通過하는 電荷는

$$q_k(nT) - q_k(nT-T) = C_k [v_k(nT) + v_k(nT-T)] \dots\dots\dots (15)$$

이다.

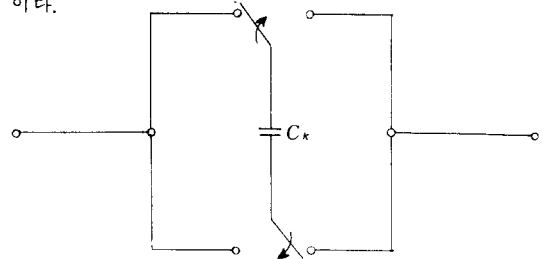


그림 4. Bilinear Z-變換을 實現하는 SC 回路

Fig. 4. SC circuit realizing Bilinear Z-transform.

여기서 모든 스위치는 每  $T_c$  秒마다 兩번 바뀌므로 sampling 區間 T는

$$T = \frac{T_c}{2} = \frac{1}{2f_c} \dots\dots\dots (16)$$

로 된다.

스위치가  $t = nT$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ ) 에만 開放되고 다른 時間에는 接續되어 있다고 하면 그림 5 (b)에서와 같이  $t_n = nT - \tau$  ( $\tau \ll T$ )에서 다음 關係가 成立된다.

$$q_k(t_n) - q_k(t_{n-1}) = C_k \left[ v_k(nT - T) - v_k(t_{n-1}) + 2v_k(nT - T) + v_k(t_n) - v_k(nT - T) \right] \\ \approx C_k \left[ v_k(t_n) + v_k(t_{n-1}) \right] \dots \dots \dots (17)$$

式(17)은 式(15)와 一致함을 알 수 있다. 그러나 그림 5로부터 連續波形間에는  $U(t)$ 를 單位階段函數라 할때

$$q_k(t) = C_k v_k(t) + 2C_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_k(nT) U(t - nT) \dots \dots \dots (18)$$

의 關係가 成立하여  $C_k v_k$ 에 該當하는 不必要한 漏洩電流가 흘러 SC濾波器的 歪曲을 크게 하고 減衰帶域의 減衰를 減小시키는 原因이 된다.

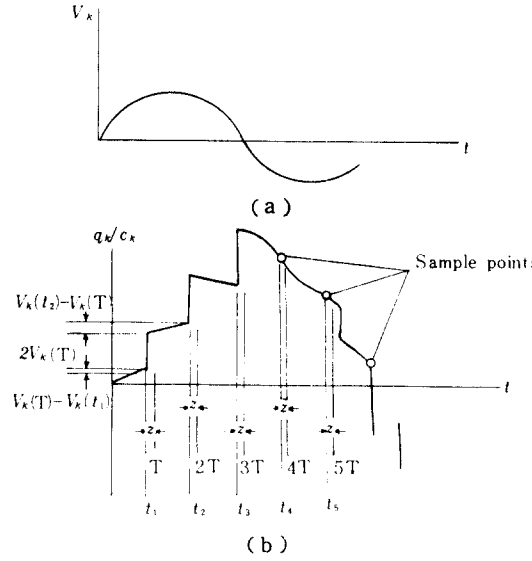


그림 5. (a) SC의 電荷波形  
(b) SC兩端의 電壓波形  
Fig. 5. (a) Charge waveform in the SC.  
(b) Voltage waveform across the SC.

따라서 SC濾波器 前段에 Sample/Hold 回路를 設置하여 이 漏洩效果를 除去해야 한다.

4. 能動SC濾波器的 設計

그림 6과 같이 通過帶域이  $0 \leq \Omega_p \leq 1$ , 減衰帶

域은  $2.79 \leq \Omega_s < \infty$ , 反射係數  $\rho$ 는 10[%], 通過帶域內 減衰  $\alpha_p$ 는 0.044 [dB], 減衰帶域內 減衰  $\alpha_s$ 는 30[dB]인 Low-Pass Third-Order FDNR 能動SC濾波器를 設計하고자 한다.

그림 6과 같은 特性을 갖는 LC濾波器는 그림 7과 같다. [6]

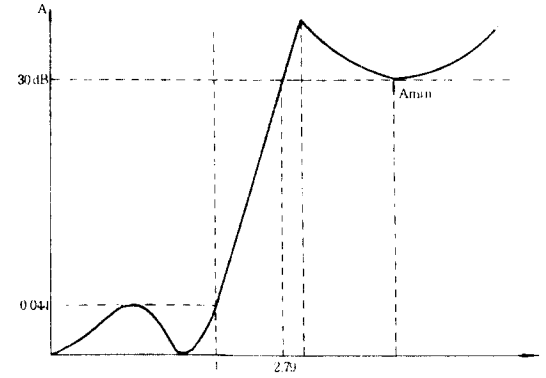


그림 6. 設計하고자 하는 濾波器 特性  
Fig. 6. Filter response to be designed.

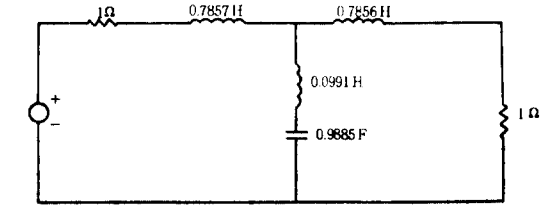


그림 7. LC濾波器  
Fig. 7. LC Filter.

그림 7의 回路網 素子를 Denormalization 하면 그림 8과 같고 그림 8의 各 素子를 다시  $\frac{1}{S}$ 變換하면 그림 9와 같다.

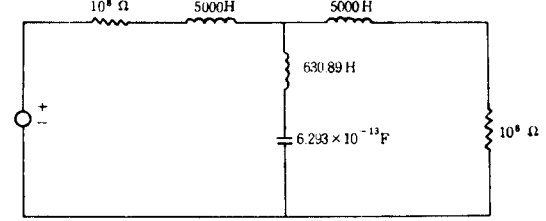


그림 8. 그림 7를 denormalization한 回路  
Fig. 8. Circuit denormalized from Fig. 7.

그림 9의 FDNR은 一般 回路素子(R,L,C)로 構成할 수 없으므로 그림 10에서와 같이 GIC法에 依해 構成한다. 그림 10에서  $Z_i$ 는 [7]

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \dots \dots \dots (19)$$

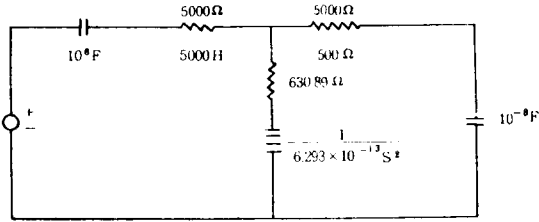


그림 9. 그림 8을  $\frac{1}{S}$  변환한 회로

Fig. 9. Circuit  $\frac{1}{S}$  transformed from Fig. 8.

이므로 그림 9의 FDNR  $\left[ \frac{1}{6.293 \times 10^{-13} S^2} \right]$  을  
 滿足하는 회로는 그림 11 과 같다.

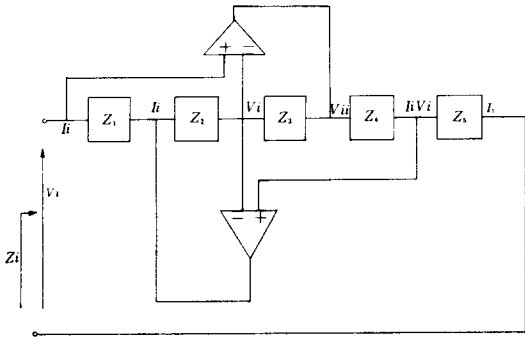


그림 10. GIC 法에 의한 FDNR 素子の 構成  
 Fig.10. Design of FDNR element by the GIC Method.

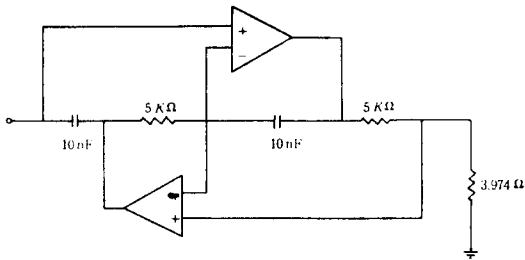


그림 11. FDNR 素子  
 Fig.11. FDNR element.

따라서 그림 7의 LC 濾波器는 그림 12와 같은 能  
 動 RC 濾波器로 變換되며 그림 12의 各 抵抗  $C_k =$   
 $\frac{1}{4 f_c R_k}$  變換에 依해 SC로 代替하면 그림 13과 같  
 은 能動SC 濾波器가 된다.

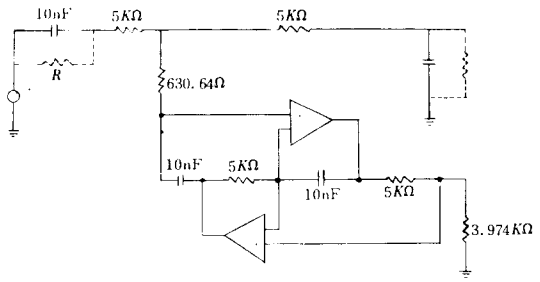


그림 12. 能動 RC 여파기 회로  
 Fig.12. Active RC filter circuit.

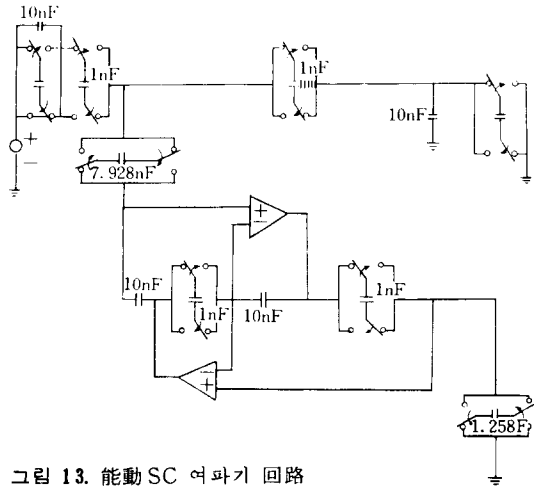


그림 13. 能動 SC 여파기 회로  
 Fig.13. Active SC filter circuit.

5. 實驗 및 考察

5-1. 濾波器的 製作

그림 13의 能動SC 濾波器的 特性을 測定하기 위  
 해 그림 14와 같은 회로를 構成하였다. 濾波器內의  
 各 SC는 CD 4053 BE를 커패시터와 組合하여 構成  
 하였고 濾波器內의 OP Amp는 LF 356 N型을 사용  
 했다.

5-2. 實驗 方法

NE 555를 使用한 Astable Multivibrator 로  
 pulse 발생기를 構成하고 時定數를 調節하여 Duty  
 cycle 이 1:10인 100 [KHz] negative pulse  
 를 만들어 이를 S/H 회로의 clock 入力으로 加한  
 다. 한편 100 [KHz] negative pulse를 反轉  
 시켜 JK Flip-flop (F 4027使用)에 加하여 50  
 [KHz]의 矩形波를 만들어 濾波器內의 모든 SC를  
 스위칭 시킨다.

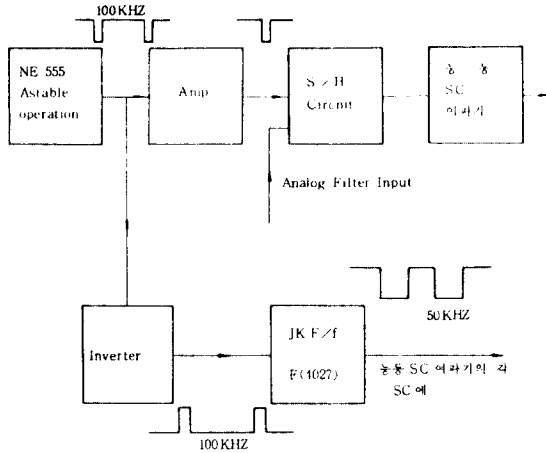


그림 14. 실험회로 계통도  
 Fig. 14. Block diagram for experiment.

5-3. 實驗 結果

그림 13의 能動RC 濾波器和 그림 14의 能動 SC 濾波器的 特性을 測定한 結果는 그림 15 와 같다. 測定結果에서 減衰帶域內의 減衰는 能動RC 濾波器가 能動 SC 濾波器에 比해 다소 작은 것으로 나타났다. 本 實驗에서 出力波形이 좀 더 滿足스럽지 못한은 濾波器回路를 discrete 한 IC로 構成한 때문인 것으로 생각된다.

濾波器 全體를 MOSIC化 하면 더욱 좋은 出力波形과 特性이 얻어질 것으로 期待된다.

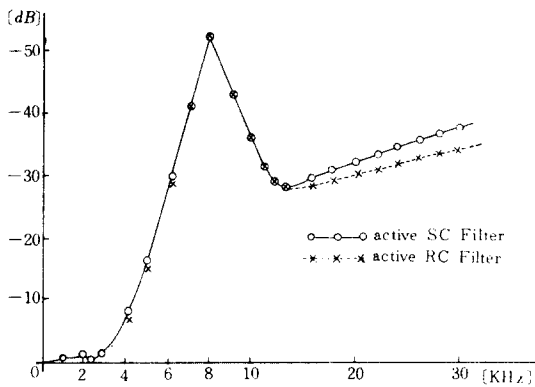


그림 15. 濾波器 特性  
 Fig. 15. Filter response (Measured).

6. 結 論

Bilinear Z-變換을 實現할 수 있는 SC 回路를

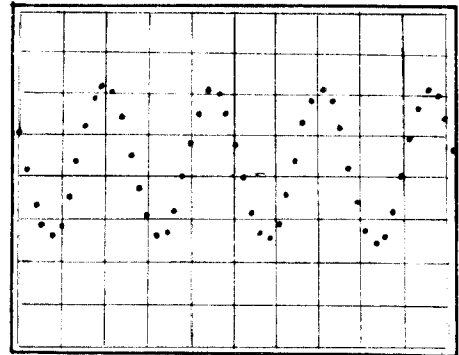


그림 16. 濾波器 出力波形  
 Fig. 16. Filter output waveform.

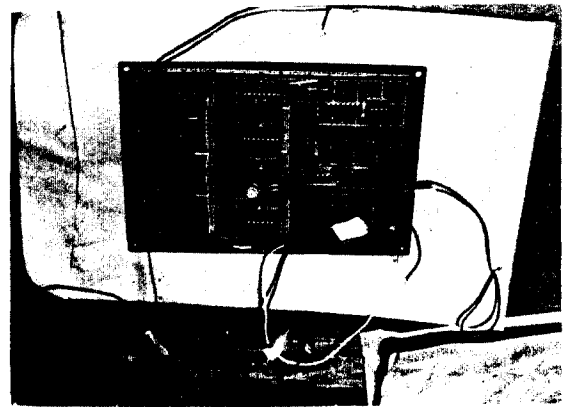


그림 17. 製作된 濾波器  
 Fig. 17. Filter.

利用하여 能動RC 濾波器를 能動SC 濾波器로 變換할 수 있는 設計法이 提示 되었다. 이 方法은 SC 積分器를 使用한 濾波器的 位相誤差性도 避할 수 있고 從前의 設計法에서 不可能했던 FDNR濾波器나 Gyra-tor 濾波器에도 適用될 수 있다.

그리고 analog 周波數와 sampled-data 周波數間의 Mapping이 完全하고 sampling rate가 倍로 增加하기 때문에 既存 設計法에 比해 同一 clock rate에 對해 濾波器的 使用周波數範圍가 倍로 넓어진다. 또한 能動SC 濾波器에서는 抵抗대신 SC를 使用하기 때문에 溫度特性 및 線型特性이 改善되며 SC 濾波器를 完全 MOSIC化 할때 濾波器的 小型化 및 量産性이 期待된다.

實驗을 通해 能動RC 濾波器와 이를 變換시킨 能動SC 濾波器的 特性은 近似함이 確認되었다.

參 考 文 獻

1. D. L. Fried, "Analog Sampled-data filters",

- IEEE J. Solid State Circuits, Vol. SC-7, pp. 302-304 Aug. 1972.
2. B. J. Hosticka, R. W. Brodersen, and P. R. Gray "Mos Sampled Data Recursive Filters Using Switched Capacitor Integrators", IEEE J. Solid State Circuits, Vol. SC-12 No. 6, pp. 600-601, Dec. 1977.
  3. J. T. Caves, M. A. Copeland, and C. F. Rahim "Sampled Analog Filtering Using Switched capacitors as Resistor Equivalents". IEEE J. Solid State Circuits, Vol. SC-12, No. 6, pp. 592-593 Dec. 1977.
  4. G. C. Temes, "The derivation of Switched-Capacitor filters from active-RC prototypes", Electron Lett., Vol. 14, No. 12, pp. 361-362, June. 8, 1978.
  5. G. C. Temes and I. A. Young, "An improved Switched-Capacitor Integrator", Electron, Lett., Vol. 14, No. 19, pp. 287-288, Apr. 27, 1978.
  6. Anatol I, Zverv., "Handbook of Filter Synthesis", John Wiley and Sons Inc. pp. 175, 1967.
  7. G. C. Temes and J. W. Lapatra, "Circuit Synthesis and Design", McGraw-Hill, Inc. pp. 269 - 276, 1977.

