論文 80-17-3-7

First-Order Gauss-Markov信号에 対한 Delta 変調方式의 信号対 雜音比에 関한 研究

(A Study on Signal-to-Noise Ratio of Delta Modulation for a First-Order Gauss-Markov Signal)

文 相 在*, 孫 鉉**
(Moon, Sang Jae and Son, Hyun)

要 約

First-order Gauss-Markov 信號가 delta變調器에 即加되어 granular雜音이 發生될 경우에 信號對雜音化의 表示式을 구하고, 또한 近似式에 關하여 考察하였다. 入力信號의 adjacent correlation 값과 local decoder의 prediction coefficient 값間의 差에 比하여 adjacent correlation값이 클 경우에는, 入力信號와 誤差信號間의 cross covariance값이 微小하므로 간단한 近似式으로 나타내었다. 이 경우에 任意의 adjacent correlation 값에 대하여 適用될 수 있는 近似式을 나타내었다.

Abstract

The Signal-to-Noise Ratio of delta modulation for a first-order Gauss-Markov signal is derived and an approximate expreession of SNR is discussed, in the case that only granular noise arises. Cross covariance of input and error signals are negligible when the adjacent correlation of input signal is larger than the difference between the adjacent correlation and the prediction coefficient of local decoder. The approximately derived SNR is available for any value of adjacent correlation.

I. 序 論

Delta變調器의 local decoder출력신호가 입력신호를 充分히 追跡할 때, delta變調器의 출력비트符號가 번갈아 나타난다.

이때 發生되는 雜音이 delta modulation (DM)의 granular雜音이다. 이러한 DM의 granular雜音解析에 PCM의 granular雜音解析理論을 직접 적용할 수 없다. Delta變調器에서는, 豫測하여 追跡하는 local decoder출력신호가 雜音을 포함해서 입력측에 歸還되기 때문이다.

音聲 혹은 影像信號를 Nyguist rate보다 높게 셈플링한 變數를 first-order Markov 信號로 表示하면 信號對雜音比(SNR)는 adjacent corelation, local decoder의 prediction coefficient 및 入力과 誤差信號間의 cross covariance의 함수로 표시된다.[1,2] 이 함수식가운데 1-bit量子器의 SNR와 入力과 誤差信號間의 cross covariance를 正確히 계산하기 어렵기 때문에 여러 假定을 둔다. N. S. Jayant[1]는 prediction coefficient와 adjacent correlation이 1에 근사한 값으로 假定하여 近似式을 誘導하였고, P. Cummiskey[2]는 prediction coefficient가 1인 경우에 최적 SNR를 해석하였다.

本 論文에서는 first-order Gauss-Markov 信號가 입력되어 發生하는 granular 雜音에 대하여 SNR 式을 유도하고, 任意의 adjacent correlation 값에 적용될 수 있는 近似式에 關하여 考察한다.

*, ** 正會員, 慶北大學校 工科大學 電子工學科
(Dept. of Electronics, Kyungpook National Univ.)

接受日字: 1980年 2月1日

II. 信號對雜音比(SNR)의 유도

Delta變調器의 입력단에서 一般的으로 Nyguist rate보다 높게 입력되는 신호 $x(t)$를 셈플링한다. 셈플링한 變數를 $\{x_i\}$라 두면, 입력되는 신호에 따라 x_i의 確率的 特性이 결정된다. 여기서는 確率的

平均이 零인 Gaussian信號에 대해서 考察한다. 셈플링한 adjacent correlation를 C라 두면 x_i의 first-order Markov 信號는 다음과 같다.

$$x_i = c\,x_{i-1} + s_i \qquad \cdots\cdots(1)$$

여기서

$$c = \frac{E(x_i \cdot x_{i-1})}{E(x_i^2)} \quad : \text{adjacent correlation}$$

이다. 입력되는 신호를 셈플링하는 주파수가 높을수록 $E(x_i \cdot x_{i-1})$이 커져 c값은 1에 접근하게 된다. 실제로 音聲信號를 상당히 높은 주파수로 셈플링하는 경우에 c는 거의 1에 근사한 값이 된다. 그리고 $E(x_i) = 0$이므로 (1)식에서 $E(s_i) = E(x_i \cdot s_i) = 0$이 되고, S_i의 variance는 $E(s_i^2) = (1-c^2) \cdot E(x_i^2)$이 된다.

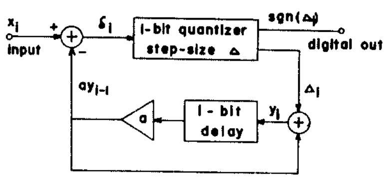

그림 1. Delta 變調器의 블록圖

Fig. 1. Block diagram of a delta modulator.

x_i가 그림 1과 같은 delta變調器에 입력되었을 때 入力 및 誤差信號는 다음과 같다.

$$s_i = x_i - ay_{i-1} \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$e_i = y_i - x_i \qquad \cdots\cdots(3)$$

여기서 a는 prediction coefficient이다. Local decoder의 출력이 입력신호를 적절히 追跡하기 위해서 c값에 近似하도록 a값을 결정해야 한다. 위의 두식에서 y를 소거하고, x_i 대신에 (1)식의 $x_{i-1} + s_i$를 대입하면

$$\delta_i = s_i + (c-a)\,x_{i-1} - a\,e_{i-1} \qquad \cdots\cdots(4)$$

이다. First-order Markov 信號의 特性에 의하여 s_i는 과거의 x_{i-1} 및 e_{i-1}에 독립적이므로 $E(s_i \cdot x_{i-1}) = E(s_i \cdot e_{i-1}) = 0$이고, 또한 x_i가 stationary이므로 $E(s_i^2)$은 다음과 같다.

$$E(\delta_i^2) = E(s_i^2) + (c-a)^2 E(x_i^2) + a^2 E(e_i^2) - 2a(c-a)\,E(x_i \cdot e_i) \qquad \cdots\cdots(5)$$

信號對雜音比 (SNR)는

$$SNR = \frac{E(x_i^2)}{E(e_i^2)} = \frac{E(x_i^2)}{E(\delta_i^2)} \cdot \frac{E(\delta_i^2)}{E(e_i^2)} = \frac{E(x_i^2)}{E(\delta_i^2)} \cdot SNR|_q \qquad \cdots\cdots(6)$$

$$SNR|_q = \frac{E(s_i^2)}{E(e_i^2)}$$: 1-bit 量子器의 信號對雜音比

이므로, (5)식을 사용하면 SNR表示式은

$$SNR = \frac{SNR|_q - a^2}{1 + a^2 - 2ac + 2a(a-c)\dfrac{E(x_i \cdot e_i)}{E(x_i^2)}} \qquad \cdots\cdots(7)$$

이다. SNR를 구하기 위해서 $SNR|_q$ 및 $E(x_i \cdot e_i)/E(x_i^2)$을 考察해야 한다. 1-bit 量子器의 $SNR|_q$는 step-size에 따라 變化하며, e_i는 x_i와 y_i에 有關하므로 $E(x_i \cdot e_i) \neq 0$이다. 受信端에서 y_i를 低域通過濾波器에 통과시키면, 帶域밖의 雜音이 억압되므로 信號對雜音比는 改善된다. 改善比는 $f_s/2f_0$이다. 여기서 f_s는 셈플링 주파수이다. (7)식의 SNR는 濾波器를 通過하기 前의 信號對雜音比이다.

Ⅲ. 1-Bit 量子器의 信號對雜音比 : $SNR|_q$

그림 1에서

$$\Delta_i = y_i - a\,y_{i-1} \qquad \cdots\cdots(8)$$

이다. 그리고 (2) 및 (3)식에서 $y_i - ay_{i-1} = \delta_i + e_i$가 되므로, (8)식으로 부터 1-bit 量子器에 대한 誤差信號를 구하면 다음과 같다.

$$e_i = \mathrm{sgn}(\delta_i)\,|\Delta_i| - \delta_i \qquad \cdots\cdots(9)$$

여기서

$$\mathrm{sgn}(\delta_i) = \mathrm{sgn}(\delta_{i-1}),\ \text{if } |\Delta_i| > |\Delta_{i-1}|$$

$$\mathrm{sgn}(\delta_i) \neq \mathrm{sgn}(\delta_{i-1}),\ \text{if } |\Delta_i| < |\Delta_{i-1}|$$

이다. (9)식에서 誤差信號의 電力을 구하면 $e_i^2 = \Delta_i^2 + \delta_i^2 - 2\,\mathrm{sgn}(\delta_i)\,|\Delta_i|\,\delta_i$ 이다. 여기서 step-size의 實効値를 Δ라 두면, 즉

$$\Delta = \sqrt{E(\Delta_i^2)} \qquad \cdots\cdots(10)$$

라 하면 다음과 같이 둘 수 있다.

$$e_i^2 = \Delta^2 + \delta_i^2 - 2\Delta\,\mathrm{sgn}(\delta_i)\,\delta_i \qquad \cdots\cdots(11)$$

또한 1-bit 量子器의 入力信號 δ_i의 確率函數를 $P(\delta_i)$라 두고 Δ_0을 다음과 같이 定義하여 사용한다.

$$\Delta_0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\delta_i|\,p(\delta_i) \qquad \cdots\cdots(12)$$

(11)식에서 $\mathrm{sgn}(\delta_i)\delta_i$의 부호는 陽이므로, $E(e_i^2)$을 구하면

$$E(\sigma_i^2) = \Delta^2 + E(\delta_i^2) - 2\,\Delta \cdot \Delta_0 \qquad \cdots\cdots(13)$$

이다. $SNR|_q = \dfrac{E(\delta_i^2)}{E(e_i^2)}$ 이므로 (13)식을 變形시키면 $E(\sigma_i^2)/E(\delta_i^2) = (\Delta^2 + \Delta_0^2 - 2\Delta \cdot \Delta_0)/E(\delta^2) + 1 - \Delta_0^2/E(\delta_i^2)$이다. 다음과 같이 $\sqrt{E(\delta_i^2)}$에 대하여 Δ 및 Δ_0를 규준화시켜

$$\bar{\triangle}=\triangle \,/\sqrt{E(\delta_i^2)} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\bar{\triangle}_0 = \triangle_0 \,/\sqrt{E(\delta_i^2)} \quad \cdots\cdots (15)$$

대입하면 $SNR|_q$는 다음과 같다.

$$SNR|_q = \frac{1}{(\bar{\triangle}-\bar{\triangle}_0)^2 + (1-\bar{\triangle}_0^2)} \quad \cdots\cdots (16)$$

(16) 식에서 $\triangle=\triangle_0$ 일때 $\bar{\triangle}$에 대한 $SNR|_q$의 微分値가 零이되므로, 實効 step-size의 크기가 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}|\delta_i|\,p(\delta_i)$ 일때 $SNR|_q$가 최대이다. $p(\delta_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{\delta_i^2}{2})$인 경우 최소 mean square error 법에 의하면 $\bar{\triangle}=\bar{\triangle}_0=\sqrt{2/\pi}$ 일때 최대 $SNR|_q$는 2.75이다.[3]

Ⅳ. 入力信號와 誤差信號間의 Cross Covariance

David J. Goodman[4]은 $p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$, 단 $\sigma^2=E(x_i^2)$인 Gaussiar x_i가 입력될 경우에 $E(x_i\cdot y_i)$를 계산하였다. 즉 $(k-1)\triangle \leq x_i < (k+1)\triangle$에 대한 manginal probalility 함수를

$$P_r\{x_i=u,\ y_i=k\triangle\}=\frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)\cdot du \ \text{for}\ (k-1)\triangle \leq u < (k+1)\triangle$$
$$= 0 \ \text{for other values of } u \quad \cdots\cdots (17)$$

두고 $E(x_i\cdot y_i)$를 계산하면

$$E(x_i\cdot y_i)=\frac{\triangle}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}k\int_{(k-1)\triangle}^{(k+1)\triangle}u\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)$$

이다. 여기서

$$\beta=\frac{\triangle}{\sigma}$$

$$=\frac{\triangle}{\sqrt{E(x_i^2)}} \quad \cdots\cdots (18)$$

라 두고 $v=\frac{u}{\sigma}$로 치환시키면

$$E(x_i\ y_i)=\frac{\triangle\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}k\int_{(k-1)\beta}^{(k+1)\beta}v\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv$$

$$=\frac{\triangle\sigma}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}k\left\{\exp\left[-\frac{\beta^2}{2}(k-1)^2\right]-\exp\left[-\frac{\beta^2}{2}(k+1)^2\right]\right\}$$

$$=\frac{\triangle\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}k^2\right) \quad \cdots\cdots (19)$$

이다. Theta 함수를 利用하므로써 다음과 같이 둘 수 있다[4]

$$E(x_i\ y_i)=\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{2\pi^2k^2}{\beta^2}\right)\right]E(x_i^2) \quad \cdots\cdots (20)$$

여기서 $E(x_i\ y_i)$가 $E(x_i^2)$에 比例함을 알 수 있다.

First-order Markov 信號 x_i도 Gaussian이므로 이 比例係數를 使用하여 入力 및 誤差信號間의 cross covariance $E(x_i\cdot e_i)/E(x_i^2)$를 유도해 본다. 우선 slope over load 雜音을 無視할 수 있는 조건을 考察하기 위하여 $x(t)$의 實効 기울기 $\sqrt{E[x'(t)^2]}$을 구한다. $\{x_i\}$의 increment인 x_i-x_{i-1}의 second moment α^2은

$$\alpha^2 = E(x_i-x_{i-1})^2$$
$$= 2R_{XX}(0)-2R_{XX}(1) \quad \cdots\cdots (21)$$

이다. 여기서 $R_{XX}(0)=E(x_i\cdot x_i)$이다. $R_{XX}(1)$을 Taylor 급수로 전개하면

$$R_{XX}(1)=R_{XX}(0)+\frac{R'_{XX}(0)}{f_S}+\frac{R''_{XX}(0)}{2!f_S^2}+\frac{R'''_{XX}(0)}{3!f_S^3}+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots (22)$$

이다. 그러므로

$$\alpha^2=-2\left[\frac{R'_{XX}(0)}{f_S}+\frac{R''_{XX}(0)}{2!f_S^2}+\frac{R'''_{XX}(0)}{3!f_S^3}+\cdots\cdots\right] \quad \cdots\cdots (23)$$

이다. $x_i=Cx_{i-1}+s_i$에 대한 increment의 second moment는

$$\alpha^2=E\{[(c-1)x_{i-1}+s_i]^2\}$$
$$=2(1-c)E(x_i^2) \quad \cdots\cdots (24)$$

이고, $R_{XX}(n)$가 우함수이므로

$$R'_{XX}(0)=0 \quad \cdots\cdots (25)$$

이다. (24) 및 (25) 식을 (23) 식에 대입하고 $\frac{R'''_{XX}(0)}{3!f_S^3}$ 以上의 項을 無視하면 다음과 같이 근사적으로 둘 수 있다.

$$\sqrt{\frac{E[x'(t)^2]}{E(x_i^2)}}=f_S\sqrt{2(1-c)} \quad \cdots\cdots (26)$$

그러므로 slope overload 雜音을 무시하기 위해서 $f_S\triangle > \sqrt{E[x'(t)^2]}$로 두면, (18) 및 (26) 식에서 $\beta > \sqrt{2(1-c)}$가 된다. 비례계수 R를 도입하면

$$\beta = R\sqrt{2(1-c)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (27)$$

이다.

또한 (3)식에서 $y_i = x_i + e_i$ 이므로 $x_i\, y_i = x_i^2 + x_i \cdot e_i$ 에서 $E(x_i \cdot y_i)$와 $E(x_i \cdot e_i)$間의 關係式을 구하면

$$E(x_i\, y_i) = E(x_i^2) + E(x_i \cdot e_i) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

이다. (20)식을 (28)식에 대입하고 (27)식을 이용하면 入力信號와 誤差信號間의 cross covariance는 다음과 같다.

$$\frac{E(x_i \cdot e_i)}{E(x_i^2)} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2 k^2}{(1-c)R^2}\right] \cdots\cdots (29)$$

여기서 R는 (27)식에서 정리하면

$$R = \frac{\beta}{\sqrt{2(1-c)}} = \frac{f_S \triangle}{\sqrt{E[x'(t)^2]}} \quad \cdots\cdots (30)$$

이므로, R값은 local decoder의 출력신호가 입력신호를 追跡하는 程度를 나타낸다. R값이 1보다 큰 경우에는 量子化雜音의 大部分이 granular 雜音임을 뜻하며, 1보다 작은 경우에는 大部分이 slope overload 雜音임을 意味한다. 그러므로 本 硏究에서는 R값이 1보다 커야 한다.

V. SNR近似式에 關한 考察

위에서 고찰한 1-bit 量子器의 $SNR|_g$ 및 入力信號와 誤差信號間의 cross covariance $E(x_i \cdot e_i)/E(x_i^2)$을 (7)식에 대입하면

$$SNR = \frac{\dfrac{1}{(\overline{\triangle}-\overline{\triangle}_0)^2 + (1+\overline{\triangle}^2)} - a^2}{1+a^2-2ac+4a(a-c)\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \exp\left[-\frac{\pi^2 k^2}{(1-c)R^2}\right]}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (31)$$

이다. 위의 식을 다음과 같이 變形시킨다.

$$SNR = \frac{\dfrac{1}{(\overline{\triangle}-\overline{\triangle}_0)^2 + (1-\overline{\triangle}^2)} - a^2}{(1+a^2-2ac)[1-K(c)]} \cdots\cdots\cdots (32)$$

여기서

$$K(c) = \frac{2a(c-a)}{1+a^2-2ac} \cdot \frac{E(x_i \cdot e_i)}{E(x_i^2)}$$
$$= \frac{4a(c-a)}{1+a^2-2ac} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2 k^2}{(1-c)R^2}\right] \cdots (33)$$

이다. C값에 따른 K(c)의 變化를 알아본다. 먼저 adjacent correlation과 prediction coefficient 間의 關係係數 $\in$를 다음과 같이 둔다. $\in$를 K(c)에 대입하여 정리하면

$$\in = c - a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (34)$$

(35)식과 같다.

$$K(c) = \frac{4\in \cdot c\left(1-\dfrac{\in}{c}\right)}{1-c^2\left[-\left(\dfrac{\in}{c}\right)^2\right]} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi^2 k^2}{(1-c)R^2}\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (35)$$

실제로 $\in$는 1 및 C에 비해서 微小하다. 그러므로 $\frac{\in}{c} \ll 1$인 경우에 C값에 따른 K(c)의 값은 그림 2와 같다. R> 1이여야 하므로 그림 2에서는 R=4로 하였다. R=4이면 slope overload 영향을 거의 無視할 수 있다[4]

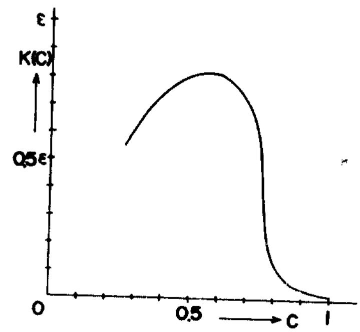

그림 2. K(c)와 adjacent correlation c와의 관계

Fig. 2. K(c) vs adjacent correlation, C.

그림 2에서 알 수 있듯이,

i) $\in$값이 1에 비하여 무시할 수 있을 경우, $K(c) < \in \ll 1$이므로 SNR式을 다음과 같이 近似시킬 수 있다. 즉,

$$SNR_{approx(1)} = \frac{SNR|_g - a^2}{1+a^2-2ac} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (36)$$

여기서 $SNR|_g = \dfrac{1}{(\overline{\triangle}-\overline{\triangle}_0)^2 + (1-\overline{\triangle}_0^2)}$

이다. 또한,

ii) $\in$값이 1에 비하여 무시 할 수 없을 경우, $\in$값에 따라 $K(c) \ll 1$이 성립되지 않으므로 K(c)값을 고려해야 된다. (32)식에서

$$SNR = \frac{SNR_{approx(1)}}{1-K(c)}$$
$$= SNR_{approx(1)} \cdot [1+K(c)+K^2(c)+K^3(c) + \cdots \cdots\cdots\cdots] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

이다. 실제로 prediction coefficient를 C값에 近似시키므로, $K(c) < \in < 1$이 되어 $K^2(c)$항以上을 무시 한 수 있다. 그러므로 近似式은

$$SNR_{approx(2)} = \frac{SNR|_q - a^2}{1+a^2-2ac}\left[1+K(c)\right] \cdots (38)$$

이다. 만약 ∈가 1에 비례 무시할 수 없더라도 그림 2에서 K(c) ≈ 0.1 ∈이므로 (38)식의 값은 (36)식의 값과 거의같게 된다. 그러나 c < 0.8인 경우에는 (38)식에서 보다 정확한 값을 얻을 수 있다.

위의 (36) 및 (38)식은 임의의 c값에 따라서 적용될 수 있는 SNR近似式이며, 따라서 이들을 사용하므로 거의 정확한 SNR값을 쉽게 구 할 수 있다.

Ⅵ. 結 論

Adjacent correlation이 c인 first-order Gauss-Markov信號가 prediction coefficient a를 가진 detta變調器에 印加될 때, 信號對雜音比는

$$SNR = \frac{SNR|_q - a^2}{1+a^2-2ac+4a(a-c)\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\pi^2 k^2}{(1-c)R^2}\right]}$$

이다.

여기서 R는 local decoder의 出力信號가 入力信號를 追跡하는 程度를 나타내는 값으로 1보다 커야 한다. 여기서 (c-a)/c값이 1에 비하여 무시할 수 있을 경우에는 $SNR_{approx(1)} = \frac{SNR|_q - a^2}{1+a^2-2ac}$로 近似시킬 수 있다. 그러나 (c-a)/c 값이 1에 비하여 무시할 수 없더라도 c>> 0.8이면 역시 적용될 수 있다. 반면에 0.8보다 c값이 낮을 경우에는 수정되어

$$SNR_{approx(2)} = \frac{SNR|_q - a^2}{1+a^2-2ac}\left[1+K(c)\right]$$

이다. (여기서 K(c)값은 본문의 그림 2에 표시되어 있음). 이들 近似式은 임의의 c값에 따라서 적용될 수 있는 SNR 近似式들이며, 이들을 사용하므로써 거의 정확한 SNR 값을 쉽게 구할 수 있다.

參 考 文 獻

1. N. S. Jayant, "On the Delta modulation of a First-Order Gauss-Markov Signal", IEEE Trans. Commun., Vol. COM-26, No. 1, pp. 150-155, January 1978.
2. P. Cummiskey, "Single-Integration, Adaptive Delta modulation", BSTJ, Vol. 54, No. 8, pp. 1463 1474, October, 1975.
3. Joel max, "Quantizing for minimum Distortion", IRE Trans. Information Theory, Vol. IT-6, pp. 7-12, March 1960.
4. David J. Goodman, "Delta modulation Granular Quantizing noise", BSTJ, Vol. 48, pp. 1197-1218, May-June 1969.