

# 信号處理(Ⅲ) — System의 Modelling, ARMA Process Wiener의 Filtering과 Kalman-Bucy Algorithm

Signal Processing(Ⅲ) — Modelling of Systems, ARMA Process,  
Wiener Filtering and Kalman-Busy Algorithm

安 秀 桔\*  
(ANN, Souguil)

(※第17卷1号의 繼續)

電子工學分野와 關聯分野(一般力學, 物理 및 數學등) 사이의 用語의 差異를 解消하기 위한 努力을 繼續하였고 統計學의 碩學 Box 氏와 Jenkins 氏의 time series analysis의 入門을 위한 주변설명과 用語紹介를 疎하였다. 끝으로 Wiener의 filter와 Kalman-Bucy의 Algorithm을 說明하고 Hadamard를 爲始한 變換技術의 有利點을 整理하여 보았다.

### Abstract

For an ordinary engineer or researcher, there are too diversified branches or even disciplines which have their own jargon to complicate an easy access, Nevertheless in many cases an isomorphism or even identity of notions exist to escape our grasp when expressed in different discipline or context. In this paper the masterwork of Box and Jenkins is introduced to accustom a few terms of statisticiens, to be followed by the technique of smoothing filtering of Wiener and Kalman-Bucy.

The advantages of a transform (for example Hadamard) technique are explained as well as authors personal philosophical views.

### 1. 序 論

그물을 받는 것은 소리가 울리는 것과도 같아서 遠近幽深은 勿論하고 드디어 未來를 안다(周易繫辭)

Norbert Wiener는 "Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, with Engineering Applications"라는 題目의 그의 論文에 要約되는 研究에서 飛行中인 敵飛行機를 高射砲로서 砲擊할 때 砲彈이 높이 올라갈수록 速度가 急減하는 것이기 때문에 敵機高度에 到達할때까지 時間이 相當히 經過하여 어느 程度 航路上 앞地點을 照準하여 보아도 砲彈은 敵機가 지나버린 地點에서 爆發하기 때문에 "어디를 照準할 것인가"를 研究하였는데 그論文은 難解함과 表紙 밑갈래해서 "黃禍 - yellow

peril"라고 불리웠을 程度 어려웠지만 그 要點은 結局 누구나가 當然히 짐작하였을 바 "現速度를 維持할 것으로 假定하고 砲彈이 그 高度에 達하였을때 그 飛行機가 와 있게 될 그러한 位置"를 照準하여야 한다는 單純한 것이었다.<sup>[2]</sup> 但 이때 그러한 forecasting의 信賴度는 飛機의 慣性이 크면(system 出力信號의 瞬間值가 急變하지 않고 rise time 등이 크고 따라서 出力 variable의 帶域이 낮으면) 크고 戰鬪機의 경우와 같이 慣性이 적으면 信賴度는 적어지나 그렇다고 다른 더 有利한 forecasting value가 있다는 것은 아니다. 역시 같은 값으로 extrapolation 할 수 밖에 없는 것이다. 過去의 航路로부터 그 力學 system(飛機)의 system dynamics를 把握하고 그러한 system에 random한 入力(飛行士의 措處)이 있을 때 어떠한 出力變數值를 forecast 하는 問題는 統計學에서 많이 發達하고 있어서 비록 single value로 限定되기는 하지만 Box & Jenkins<sup>[1]</sup>의 方法은 우리에게 크게 活用될 만한 것이다. N Wiener의 extrapolation도 같은 立場이지만 人工衛星의 control 問題와 같이 많은

\* 正會員, 서울大學校 工科大學 電子工學科

(Dept. of Electronics Engineering, Seoul National Univ.)

接受日字: 1980年 3月 26日

變數를 즉각 즉각 up to date 해나가야 하는 立場<sup>[2]</sup>以外에서는 이 理論의 아름다움을 否認할 수가 없다. 計算組織을 통한 많은 變數의 高速 up date에는 Kalman filtering의 Algorithm이 使用되나 그 前後事情을 모르는 機械的인 使用은 危險하기 때문에 이러한 段階는 꼭 거쳐야 한다.

이러한 forecasting technique의 德分으로 우리가 活用할 수 있는 일로서 linear prediction of speech 등이 있는데 이는 過去의 觀察值群으로부터 通信側 受信側에서 다음 瞬間의 값을 推定하여 그러한 予期值(system의 dynamics가 주는)와 現實值와의 差만을 communicate하여 줌으로서 通信量을 激減시킬 수 있다. voice를 위한 sampling rate 8khz에 比하면 사람의 發聲機關의 dynamics는 둔한 것이고 느린 것이기 때문에 한 sampled value의 다음 value가 想像할 수 없는 位置에 와있는 것은 例外的인 것이다. 따라서 PCM代身에 differential PCM을 採擇한다는 것은 같은 quantization의 quantum(單位階段電壓)을 使用할 때 傳達하여야 할 數字 range가 激減하는 것으로서 通信路의 occupancy가 激減되는 것이다. 飛機의 경우에서 보았을때 현위치의 후방을 겨냥하거나 그 飛機의 最高速度로서도 到達할 수 없는 곳을 照準하는 일이 있어서는 안된다는 常識的인 結論이(數學을 통하여) 얻어진 것이다.

**2. Linear constant - coefficient difference equation (差分方程式)**

Analyse 할 對象 system이 linear shift-invariant system이면 入力 $x(n)$ 와 出力 $y(n)$ 이 다음과 같은 線型常係數 差分方程式을 滿足시킨다.

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \dots\dots\dots (3-1)$$

또는  $a_0 = 1$ 로 하고

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) \dots\dots(3-2)$$

B를 backward shift operator<sup>[1]</sup>라고 하면 이는  $y(n)$  등에 作用할때 그바로 前時點에서의 값  $y(n-1)$ 을 주는 operator 이니까  $By(n) = y(n-1)$  또는  $B^2x(n) = Bx(n-1) = x(n-2)$  등으로 活用할 수가 있어서 (3-1) 式은  $(\sum_{k=0}^N a_k B^k) y(n) = (\sum_{r=0}^M b_r B^r) x(n)$

$$\text{즉 } y(n) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r B^r}{\sum_{k=0}^N a_k B^k} x(n) \dots(3-3)$$

이다.  $\delta(B) = \sum_{k=0}^N a_k B^k$ ,  $\Omega(B) = \sum_{r=0}^M b_r B^r$  로 表記

하면

$$\delta(B) y(n) = \Omega(B) x(n)$$

$$y(n) = \delta^{-1}(B) \Omega(B) x(n) \dots\dots\dots(3-4)$$

$\psi(B) \triangleq \delta^{-1}(B) \Omega(B)$ 로 놓으면

$$y(n) = \psi(B) x(n) \dots\dots\dots(3-5)$$

이러한 表記法에서  $\psi(B)$ 가 有限個數의 項을 가질 때도 있지만 (例를 들어 M 有限,  $\delta(B) = \text{const}$ 일때),  $\delta^{-1}(B)$ 가 無限個의 項으로 될 경우에  $\delta^{-1}(B)$ 가 發散하지 않아야 하며 따라서  $\delta(B) = 0$ 의 根이 無限數列

$\delta^{-1}(B)$ 의 收斂條件을 滿足시켜야 한다. (invertibility) 有限數列의 경우를 finite impulse response (FIR)라 하고 無限일때를 infinite impulse response (IIR)라고 하며<sup>[2]</sup> unit pulse가 入力되어도 前者는 M個의 pulse 以上 持續될 수가 없음에 比하여 後者は 出力이 다시 入力으로 使用되기 때문에 이러한 制限이 없다. 前者를 nonrecursive system 後者를 recursive system이라 말한다.

**3. 한 system이 white noise 入力에 주는 影響, matrix의 rank<sup>[6]</sup>**

White noise를 實函數  $e(t)$ 로 나타낼 때 두時刻에 있어서의 값  $e(t_1)$ 과  $e(t_2)$  사이의 關聯性을 알기 위해서  $e(t_1)$ ,  $e(t_2)$ 相乘積의 expectation value를 求하였을때 (이들 各各의 平均値는 零이라 假定)

$$\langle e(t_1) e(t_2) \rangle = 2D\delta(t_2 - t_1) \dots\dots\dots(3-6)$$

이라하면 이것은 white noise의 covariance function으로서  $t_1$ 과  $t_2$ 가 一致할때 以外에는 correlation이 없음을 即 바로 前後의 값사이에도 關聯이 없어서 한 瞬間의 값으로부터 바로 다음 瞬間의 값도 짐작할 수가 없음을 나타낸다.<sup>[9]</sup> (第一回分 27a式)

White noise가 바로 隣接된 信號사이에도 correlation이 없음에 比해 한 white noise driven system에서 나오는 出力信號는 隣接時間의 信號間(또는 제법 떨어진 信號間)에 correlation을 갖게 된다. 따라서 入力이 white noise인 system의 出力을 보면 그 system의 特性을 알 수 있다.<sup>[9]</sup> 한 system이 energy conserving elements를 (그 自由度를 保存하는 形態로) 갖고 있다면 이를 memory를 갖는 system이라고 하며 그때는 짧은 入力도 긴 出力波形을 주며 各時點間에 correlation을 갖게 된다. 이는 system의 通過可能 帶域幅의 限定 때문에 일어나는 것으로서 帶域幅이 좁을수록 長時間 사이 信號들간에

correlation 이 생기고 이波及時間과 帶域幅은 서로 逆比例한다.[22][31]

System에 따라서는 入力信號의 自由度가 保存되는 限度의 影響을 주는데에 그치는 경우도 있고 이것이 保存되지 않을 程度로 심한 毀損을 주는 경우도 있다.

前者는 inverse operator로 原形을 찾을 수 있지만 後者는 (linear operator로 限定하여서 말한다면 operation의 機能을 나타내는 matrix의 rank가 充分치 못해서) singular matrix가 되며 다시 原信號를 찾아 내지 못한다.

4. Random process의 modelling, forecasting

社會現象을 包含해서 어떠한 random process에서 그러한 出力을 내고 있는 機構 또는 system을 數學的解析의 도마 위에 올려 놓을 수 있기 爲해서 (一般적으로 그 機構構造에서 찾아낼 수 없으나) 같은 舉動을 하는 model을 設定한다. 한 機構 또는 system의 出力值를 繼續觀察하여 이로부터 modelling을 할 수 있다.

이 model은 實觀察data를 通하여 얻어낸 바 그 date를 發生하고 있는 機構를 代行할 수 있고 따라서 data의 累積에 따라 더 確實한 形態를 드러내며 이것을 通하여 未來의 어떤 時點의 값도 forecast 할 수 있다.[1]

흔히 error를 noise로 간주해서 取扱하되 digital로서 取扱할때에는 noise도 digital信號로서 完全히 random한 digital noise는 만들기가 어렵지만 段數가 큰 shift register入力を feed back 또는 feed forward하여 pseudo random signal은 흔히 合成하여 使用하고 있다.

Random한 出力을 觀察하여 그 system을 modelling 하면 이는

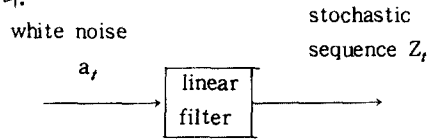
- ① System의 nature을 알려준다.
- ② Optimal한 forecast를 하여 준다. (future value等)
- ③ 두개以上の discrete sequences間的 transfer function을 estimate하여 준다.
- ④ Optimal control scheme을 연계하여 준다.
- ⑤ 이 model을 通하여 feed forward, feed back control scheme을 design할 수 있다.

— 한時點 t에서의 觀察值를  $Z_t$ 라고 나타내면  $Z_{t+l}$ 은 그 時點으로부터 時間 quantum의 l 배만큼 떨어진 後의 觀察量이다. Discrete의 경우이기 때문에  $Z_t$ 로부터 l번째의 觀察量으로서 l을 lead time이라고 한다.

— t時點에 있어서 l(時間)單位後의 觀察值를 forecast 하면 그 값을  $Z_t(l)$ 라고 表記하고 이를 forecast function이라고 한다. l이 클수록 實際 일어날 값  $Z_{t+l}$ 와 사이의 離脫이 심해지기 쉽다. 이 離脫이 forecast의 error이다.

— Stochastic model에 있어서 그 system의 入力으로서 white noise를 쓰는데 이는 一連의 shock로서 이 sequence를  $a_t$ 로 나타낸다면 이는 平均値零, variance  $\sigma_a^2$ 인 normal distribution (Gaussian)로부터 random drawing에 依해 얻어진 것이다.

— white noise에 作用하여 system 出力(觀察量  $Z_t$ 等)을 만들어 주는 operation의 physical realization을 filter라고 생각하면 다음 그림과 같이 된다.



— 한 system의 出力이 그 時點 以前에 들어오는 random shock  $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$  등의 weighted sum으로 나타날때와 그 以前의 觀察值  $Z_{t-1}, Z_{t-2}, Z_{t-3}, \dots$  등의 weighted sum 또는 兩者의 sum으로 이루어질때가 있다.

— 先行 入力만의 weighted sum으로 나타나는 경우에 있어서는

$$Z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots$$

$$= \mu + \psi(B) a_t \dots \dots \dots (3-7)$$

但  $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots \dots \dots$

이때  $\mu$ 는 觀察된 값이 그것을 中心으로 變動하는 平均値 (level이라 부름)이고  $\psi(B)$ 는 그 system의 transfer function이다.  $\psi_1, \psi_2, \dots$ 는 無限數列일 수 있는데 이들이 有限이거나 또는 無限이면서 收斂할때 이 linear filter는 安定하다고 말한다.

— Autoregressive model은 自己回歸形이라고 말할 수 있어서 前에 나온 出力이 다음 出力에 關與한다.

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t$$

$$\dots \dots \dots (3-8)$$

但  $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$

이때 이러한 process를 autoregressive process of order p라고 한다. 다음과 같이 order p의 autoregressive operator를 定義하면

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \dots \dots$$

原式(3-8)은  $\phi(B) \tilde{Z}_t = a_t \dots \dots \dots (3-9)$

가 되며 이 식은  $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_a^2$  등  $p+2$  개의 未知數를 data로 부터 推定하여야 한다.

— **Moving average models** 한 system에서 다음 식이 成立한다면 이것을 moving average of order  $q$  라고 한다.

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3-10a)$$

moving average operator of order  $q$  를

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \quad (3-10b)$$

와 같이 定義하면 原式은

$$\tilde{Z}_t = \theta(B) a_t \quad (3-11)$$

이 되며  $\mu, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma_a^2$  등  $q+2$  개의 parameter 를 data로부터 推定하여야 한다.

— **Mixed autoregressive - moving average models** 한 system에서 다음 식이 成立한다면

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3-12a)$$

이것을 mixed autoregressive - moving average process 라고 한다.

이때 原式은

$$\phi(B) \tilde{Z}_t = \theta(B) a_t \quad (3-12b)$$

가 되며 data로부터  $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma_a^2$  등  $p+q+2$  개의 parameter 를 推定하면 modelling 이 完成된다.

**5. ARMA process의 orders 및 係數, yule - walker 方程式**

한 system의 dynamic behavior 를 代行하기 爲해서 ARMA (Auto Regressive and Moving Average) model의 order  $p$  와  $q$  는 크게 잡을수록 正確한 것으로 생각되기 쉬우나 주어진 data가 限定되어 (예를 들어 50개) 있을 경우에 있어서 이들을 너무 넉넉하게 잡으면 오히려 計算된 係數 — (3-12a) 식等 —의 正確度가 떨어진다. 一般의 order 設定等에 있어서 最小限 꼭 必要한 個數로 限定하여야 한다. (parsimony의 原理)<sup>[1]</sup>

한 process의 ARMA 係數  $\phi$  들과  $\theta$  들은 data 들間의 autocorrelation functions  $\rho_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 에만 오로지 依存하게 된다. discrete data 에 對한 autocorrelation coefficient  $r_k$  는 data가 有限個인 경

우는 理想值  $\rho_k$  (lead time  $k$ )와 같을수가 없기 (때로는 相等히 다를 수도 있음) 때문에 Autocovariance 도 理想值 (眞值) 를  $r_k$ , 有限個 data로 부터의 推定值를  $c_k$  라고 하면,  $r_k, c_k$  는 다음 식으로 求해진다.

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad (3-13)$$

$$\text{但 } c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z}), \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \ll N \quad (3-14)$$

이곳에서 lead time  $k$ 를 零으로 부터 ( $k=0$  때는  $c_0$ 가 variance의 거친 近似值)增加시키면서  $r_k$ 를 살펴보면 어느 段階에서 急激히 消滅하는 것을 보는데 그것이 moving average項의 order  $q$ 를 나타내기 때문에  $q$ 를 쉽게 求할 수 있다.

Autoregressive process의 order數  $p$ 는 다음 節에서 求하기로 하고 AR process의 係數  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_p$  등을 求하기 위해서는 (3-8)식의 兩邊에  $Z_{t-k}$ 를 곱하되  $Z_t$ 를 zero mean process로 생각하여  $\tilde{Z}_t$  등을  $Z_t$  등으로 表示하면

$$Z_{t-k} Z_t = \phi_1 Z_{t-k} Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-k} Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-k} Z_{t-p} + Z_{t-k} a_t \quad (3-16)$$

따라서 式의 兩側의 expectation을 計算하면

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k > 0 \quad (3-17)$$

但  $r_k = \text{cov}[Z_t, Z_{t+k}] = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]$   $\rho_k = \frac{r_k}{\sigma^2}$  로서 이들은 (1-27a), (1-19)의 digital counterpart 이고  $r_0$ 는 sequence  $Z_t$ 의 variance이다. (3-16)식 計算에 있어서 末項은  $t$ 時에 들어온 random input 와  $t-k$ 에 있어서의 觀察值  $Z_{t-k}$ 와 사이에는 correlation이 全無하기 때문에 (3-17)식으로 될 때 爽이 된다.

이 式에서  $k$ 를 1로부터  $p$ 까지 變해 가면서 얻는  $p$ 次 聯立方程式은  $\rho_k$  들로부터  $\phi_k$  들을 計算可能케 하여준다.

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ &\vdots \\ \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{aligned} \quad (3-18)$$

이 式을 yule-walker equation이라 한다. 實際에는 有限個數 data이기 때문에  $\rho_i$  등으로  $r_i$  등으로 表示한다.  $\rho_i$  들을 알면 이 式을 풀어서  $\phi_1$  들을 計算할 수 있다.

**6. Partial autocorrelation, AR process의 order p<sup>[33]</sup>**

Order k의 autoregressive process에 있어서의 j번째  $\phi$  係數를  $\phi_{kj}$ 라고 表示하면 (3-17)式은

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk}(k-1) \rho_{j-k+1} + \phi_{kk}\rho_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3-19)$$

이는 yule-walker 方程式이고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

$\phi_{kj}$ 들은 Cramer의 方法에 依해서 容易하게 求할 수 있는데 그중  $\phi_{kk}$ 를 lag k인 partial autocorrelation function이라 부르고 特異한 立場에 있으며 이들이 AR process의 order를 算出하는데 쓰인다.

한 AR process의 order를 求하려면 k를 1로부터 增加시켜 가면서  $\phi_{kk}$ 를 求하여서 이것이 어느 限界에 가면 거의 零이 되는데 그때의 k의 값이 p가 된다. 이때에도 有限個의 data로부터 計算되기 때문에  $\rho_i$ 等 代身  $r_i$ 等을 使用하여 近似值를 쓰게 되어  $\phi_{kk}$ 의 消滅이 顯著하지 않을 수도 있다. 그러나 熟達하면 쉽게 AR이 order p를 求할 수 있다. MA process의 係數  $\theta_i$ ; 들도 data間的 correlation  $\rho_i$ 들로부터 算出될 수 있다.<sup>[1]</sup>

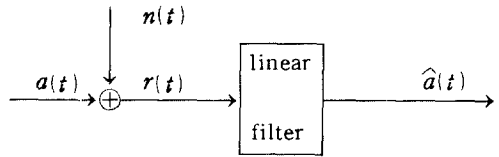
Speech analysis에서도 發聲機構의 dynamic behavior를 代身할 수 있는 model을 求하면 AR process (all pole model)로 歸結시킬 수 있고  $\phi_i$  parameter들을 주면 再現 內至 推定할 수 있어서 그것으로부터 離脫이 크지 않다. 이 離脫部分이 error이면 서도 그 機構에서 予見 못한 眞正한 情報로서 將次에는 human speech 등 limited bandwidth의 information은 이 parameters와 error 만을 傳達하면 되게 되어서 communication capacity나 memory capacity를 크게 節約하게 된다.<sup>[23]</sup>

$i-1$ , 번째 data까지 알고  $i$ 번째 入力 data를 推定한 것을  $x_i | i-1$ , noise를 포함하여 관찰된 出力을  $y_i$ , 그間 system의 transfer 機構를 나타내는 operator를 H로 表示할 때  $\epsilon_i = y_i - H x_i | i-1$ 를 innovation process라 하고  $r_i = y_i - H x_i | i$ 를 residual 이라고 한다.

**7. Optimum linear filter (II)**

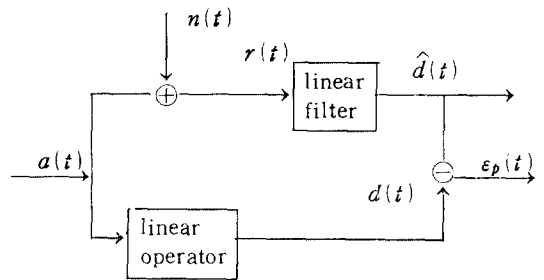
Non linear filter가 더 나은 結果를 주는 경우도 있지만 얻을 수 있는 filter中에서 linear filter가 가장 有利하고 optimum임을 證明할 수 있는 경우도 있다.

아래 그림과 같이 additive gaussian noise  $n(t)$ 에 依하여 汚染된  $r(t)$ 라는 形態의 信號밖에 入手 못하



는 狀況에서 한 linear filter를 通하여 原信號  $a(t)$ 를 推定하여  $\hat{a}(t)$ 를 얻었다고 하고 이것이 주어진 criterion에 對해서 가장 optimum하다면 이는 error의 期待值가 가장 적음을 말한다.

이 경우를 더 一般化하여  $a(t)$ 를 推定하는 것이 아니고 어떠한 (이변에는 noise가 介入하지 않는) linear 變換을 하여 얻어진  $d(t)$ 라는 信號를 推定한다면 이는 前者의 경우까지 包含하게 된다.<sup>[5]</sup>



求하고자 하는 (推定用) linear filter의 impulse response가  $h(t, u)$  (time invariant 할 때에는  $h(t-u)$ ) 일때

$$r(t) = a(t) + n(t) \quad (3-21)$$

$$d(t) = \int_{T_i}^{T_f} h(t, u) r(u) du \quad (3-22)$$

이때 point estimation error

$$\epsilon_p(t) = E\{[d(t) - \int_{T_i}^{T_f} h(t, u) r(u) du]^2\} \quad (3-23)$$

를 minimize 하는  $h(t, u)$ 를  $h_o(t, u)$ 라 하고 또한 이 式을 滿足시키는 class의 impulse response를  $h_e(t, u)$ ,  $\epsilon$ 를 實數라고 하면  $h_e(t, u)$ 는 無數히 많을 수 있는데  $h_o(t, u)$ 가 error를 最少로 하는 것이니까<sup>[4]</sup>

$$h(t, u) = h_o(t, u) + \epsilon h_e(t, u) \quad (3-24)$$

인 어떠한  $h(t, u)$ 도  $h_o(t, u)$ 에 比하면 error가 크다. 即  $\epsilon$ 가 正이건 負이건 error가 커가고  $\epsilon = 0$  일때만 error가 最少임을 證明할 수 있다. 그리고 (24)式을 (23)에 代入하고  $\epsilon$ 의 正負에 無關하게 恒常 error가 增加함을 利用하면 다음 式의 成立이

必要함을 보일 수 있다.<sup>[5]</sup>

$$K_{dr}(t, u) = \int_{T_i}^{T_f} h_o(t, v) K_r(u, v) dv, T_i < u < T_f$$

..... (3-25)

Noise가 white noise 일 때는 따라서  $K_r(u, v)$  도 singular function인 delta function을 포함하고 있기 때문에 impulse나 switching 등을 많이 활용하고 있는 工學에서는 取扱하는 函數가 (well behaved function)로 限定되지 않고 distributions (Schwartz의 뜻에 있어서의 generalized function)으로 擴張되어야 한다는 것은 再三 認識되어야 한다.<sup>[19]</sup>

이때 noise가 信號  $a(t)$ 와 相關關係가 없다면<sup>[4]</sup>

$$K_r(t, u) = K_a(t, u) + \frac{N_o}{2} \delta(t - u) \dots\dots (3-26)$$

(25)式에서의  $K_a$  등은 第一回 차項과 第二回(24)式附近에 紹介하였고  $K_{dr}(t, u)$ 는 오염된 信號  $r(t)$ 와 推定對象  $d(t)$ 와 사이의 cross covariance function으로써 (1-27c)式을 利用하여

$$K_{dr}(t, u) = E\{[d(t) - \overline{d(t)}][r(u) - \overline{r(u)}]\}$$

..... (3-27)

이다. 但 ergodic 한 경우이다. (26)式에 依하여 (25)式은 다음과 같이 된다.

$$\frac{N_o}{2} h_o(t, u) + \int_{T_i}^{T_f} h(t, v) K_a(u, v) dv = K_a(t, u),$$

$T_i < u < T_f$  ..... (3-28)

이式을 滿足시키는  $h_o(t, u)$ 가 optimal linear filter의 impulse response가 된다.<sup>[27]</sup>

一般的으로

$$\int K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \dots\dots(3-29a)$$

$$\varphi(x) - \int K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \dots\dots(3-29b)$$

$$A(x) \varphi(x) - \int K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \dots\dots(3-29c)$$

와 같은 積分方程式을 各各 Fredholm의 第一, 第二, 第三種의 積分方程式이라 부른다. 많은 경우에 있어서 第三種積分方程式은 第二種으로 誘導해 나갈 수가 있고 第三種積分方程式에 關해서는 많은 study가 行하여졌다. (28)式은 Fredholm의 2nd kind integral equation으로 整理된다. 그리고  $T_f < t, T_f = t, T_f > t$ 에 따라서 各各 predicted estimate, filtered estimate, 그리고 smoothed estimate로 되며 image restoration 등에 있어서 smoothed estimate는 흔히 使用되기 때문에 (28)式의 解를 더 究明하기로 한다.

한편 (29)의 諸式과 비슷하지만

$$\int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \dots\dots(3-30a)$$

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \dots\dots(3-30b)$$

$$A(x) \varphi(x) - \int_a^x K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \dots\dots(3-30c)$$

와 같이 積分上限이 觀察時間으로 限定되어 causal한 system 即

$$K(x, y) = 0 \quad x < y \dots\dots(3-31)$$

이라면 이들을 各各 Volterra의 第一, 第二, 第三種의 積分方程式이라하여 Fredholm積方의 경우와 性質이 다르고 풀기가 더욱 어렵다.

### 8. Causality를 要求하지 않을 경우의 Fredholm積方解

(25)式을 time invariant한 경우로 限定하면  $h(t, u)$  등은  $h(t-u)$  등으로 되기 때문에 簡單한 translation을 통해서 다음式으로 된다. 但 積分의 上限을 無限大로 하여 觀察時間  $t$ 以後의 信號도 미리 活用하고 있어서 causality가 無視되고 있다.

$$K_{dr}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_o(\tau) K_r(t-\tau) d\tau \dots\dots(3-32)$$

이는 convolution計算에 不過하기 때문에 fourier transform上에 있어서는  $h_o(t)$ 와  $K_r(t)$ 의 變換  $H_o(j\omega)$ 와  $S_r(\omega)$ 의 相乘積이 된다. 따라서

$$S_{dr}(\omega) = H_o(j\omega) \cdot S_r(\omega) \dots\dots(3-33)$$

이다. 特殊한 경우로  $a(t) = d(t)$ 라면  $K_d(t, u) = K_a(t, u), K_{dr}(t, u) = K_{ar}(t, u) = K_a(t, u)$  (但 noise와  $a(t)$ 는 無相關)이니 (26)式과 함께  $S_{dr}(\omega) = S_a(\omega), S_r(\omega) = S_a(\omega) + S_n(\omega)$ <sup>[28]</sup>

$$H_o(j\omega) = \frac{S_a(\omega)}{S_a(\omega) + S_n(\omega)} \dots\dots(3-35)$$

即 optimal filter의 特性  $H_o(j\omega)$ 는  $r(t)$ 의 spectrum에 作用하여 noise의 影響을  $\frac{S_a(\omega)}{S_a(\omega) + S_n(\omega)}$ 로써 輕減하는 그러한 것이 要求된다는 當然한 結論을 준다.

### 9. Wiener-Hopf方程式과 Causal filtering<sup>[6][9]</sup>

(25)式을 Volterra equation의 條件과 같이 causality를 살리고  $T_i$ 를  $-\infty$ 로 하지만  $T_f$ 를  $t$ 와 一致시키고 變數變換을 行하면

$$K_{dr}(t) = \int_0^{\infty} h_o(\tau) K_r(\tau - t) d\tau \dots\dots(3-36)$$

를 얻는다. 이式을 Wiener-Hopf 方程式이라하며 이

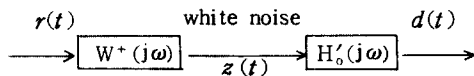
경우에는 fourier 變換을 使用하지 못하고 Wiener-Hopf spectral factorization technique [2][3][4][5] 을 使用한다. 그 結果는 다음과 같다.

우선 當該 linear filter에 들어오는 信號  $r(t)$ 의 power spectral density  $S_r(\omega) = K_r(t, u)$ 의 fourier 變換)가 有理式인 경우로 制限한다. 이는 모든 實際問題에 있어서 入力信號를 이러한 경우로 無限히 近似시킬 수가 있기 때문에 別로 큰 制限이 아니다. 다음에 whitening mechanism(傳達函數  $W(j\omega)$ 를 생각하되 다음式이 成立하게끔 한다.

$$S_r(\omega) |W(j\omega)|^2 = 1 \dots\dots\dots (3-37)$$

이러한 whitening filter에  $S_r(\omega)$ 이 印加되면 出力信號는 white noise가 되겠는데  $S_r(\omega)$ 는  $K_r(t, u)$ 의 positive semidefiniteness로 보아 quadrantal하다. 即  $a + jb$ 가 한 pole (또는 zero)이라면  $\pm a \pm jb$ 가 모두 pole (또는 zero)이며 따라서  $\sigma$  軸과  $j\omega$  軸에 對하여 鏡像의 位置를 찾아한다. 따라서 realizable한 filter를 만들려면  $|W(j\omega)|^2 = \frac{1}{S_r(\omega)}$  인 pole-zero 點中에서 回路網理論에서 말하는 p.r. 即 positive realness를 滿足시키는 半 (pole, zero 兩쪽다  $j\omega + p_i, j\omega + z_i$  等 factor 들)만을 거두어  $W(j\omega)$ 로 擇하여야 하고 이를  $W^+(j\omega)$ 라고 表記한다. 이때 나머지 半은  $(W^+(j\omega))^*$ 로 表記된다. 但 asterix記號 \*는 共軌數의 記號이다. 따라서  $-j\omega + p_i, -j\omega + z_i$  等이며  $W(j\omega) [W^+(j\omega)]^* = \frac{1}{S_r(\omega)}$ 가 된다. [29]

$H_o(j\omega)$ 에서 이러한 部分을 獨立시키면 當該 linear filter는 二分되어  $H_o(j\omega) = W^+(j\omega) \cdot H'_o(j\omega)$ 가 된다.



white noise  $z(t)$ 로부터  $d(t)$ 를 만들어 주는 右側 ( $H'_o(j\omega)$ ) system은 (36)式에 準해서 다음 式을 滿足시킬 것이다.

$$K_{dz}(t) = \int_0^\infty h'_o(\tau) K_z(t-\tau) d\tau, 0 < \tau < \infty \dots\dots\dots (3-38)$$

$Z(t)$ 는 white noise 이기 때문에 그 spectrum은 uniform 하며 따라서 出力이 直接 右側 system의 impulse response가 된다. 即  $h'_o(\tau) = K_{dz}(\tau) \tau > 0$

$$\text{한편 } K_{dz}(\tau) \triangleq E\{d(t)z(t-\tau)\} = E\{d(t) \int_{-\infty}^\infty \omega^+(\omega) r(t-\tau-\nu) d\nu\} = \int_{-\infty}^\infty \omega^+(\nu) K_{dr}(\tau+\nu) d\nu = \int_{-\infty}^\infty \omega^+(-\beta)$$

$K_{dr}(\tau-\beta) d\beta$  但  $\omega^+(-t) \leftrightarrow [W^+(j\omega)]^*$ ;  $K_{dr}(t) \leftrightarrow S_{dr}(j\omega)$  이니까 이는  $S_{dz}(j\omega) = [W^+(j\omega)]^* S_{dr}(j\omega)$ 가 된다. 이는 또 다시 non realizable한 部分을 包含하고 있기 때문에 實際  $K_{dz}(t)$ 를 求함에 있어서는  $S_{dz}(j\omega)$ 中 p.r. 條件을 滿足시키는 部分만을 擇한다. 이는  $S_{dz}(j\omega)$ 의 poles, zeros에서 左側만을 擇함을 뜻한다. 따라서 optimal linear filter의 傳達函數는 다음 式으로 나타난다.

$$H_o(j\omega) = W^+(j\omega) \{ [W^+(j\omega)]^* S_{dr}(j\omega) \}^+ \dots\dots\dots (3-39)$$

이는 cascade된 두 system의 impulse response들 (全體system의 impulse response를 形成하는데 있어서) 서로서로의 convolution 計算을 하여야 함에 反하여 傳達函數는 各各의 傳達函數를 서로 곱하면 되기 때문이다. (39)式을 變形하여  $\frac{1}{W^+(j\omega)} \triangleq G^+(j\omega)$ 를 써서 다음과 같이 表示할때가 많다.

$$H_o(j\omega) = \left[ \frac{1}{G^+(j\omega)} \right] \left[ \frac{S_{dr}(j\omega)}{G^+(j\omega)^*} \right]^+ \dots\dots\dots (3-40)$$

一般的으로  $\frac{1}{\omega^2 + k^2}$  (但  $k$ 는 正實數)의 poles는  $j\omega = \pm k$ 로서 그 逆變換은  $e^{-kt}u(t)$ 와  $e^{-kt}u(-t)$ 인데 上記式들에 있어서의 superscript는 前者를 擇하라는 뜻이다.

그리고  $S_r(\omega) = S_a(\omega) + \frac{N_o}{2}$  일때에는

$$H_o(j\omega) = 1 - \frac{\sqrt{N_o/2}}{[S_a(j\omega) + \frac{N_o}{2}]^+} \dots\dots\dots (3-41)$$

이다.

### 10. Kalman-Bucy filtering [3][8][9][10][11][12][13][14][17]

一般的으로 積分方程式을 풀려면 이를 微分하여 微方으로 이끌게 되는데 linear filtering의 경우에 있어서도 微方の 一種인 state equation을 通하여 推定等 filtering을 할 수 있다. 이것이 Kalman filtering인데 外觀上 discrete signal의 경우와 continuous signal의 경우 그 式들 間에 相當한 差가 있다. 前者는 Kalman이 [10][11] 그리고 後者は Kalman과 Bucy [12]가 發表한 것으로서 Wiener의 경우와 다음과 같은 差異點을 갖고 있다. [30]

(1) 積方の 경우에는 解法이 複雜하고 大部分의 경우 補助微分 또는 其他의 方程式을 풀어야 하는 경우가 많은데 比하여 state equation의 경우는 state만 把握하면 된다.

(2) 一般的으로 time varying 한 impulse response  $h_o(t, u)$ 를 把握하는 것보다 -階微方인 state equation을 update 하는 것이 쉽다.

(3) 人工衛星을 control 하여야 하는 space age에서 把握하여야 하는 states 가 많기 때문에 vector取扱이 可能的 後者가 有利하다.

(4) 微方の 係數들은 當該 process의 統計에 依해서 決定되고 電算機에 依해서 處理되며 심지어는 微方을 풀지 못해도 brute force 的으로 計算해 낼 수 있다.

— 먼저 한 system의 數式表現에는 두가지 方法이 있는데 하나는 state equation에 依한 表現이고 또 하나는 入力와 出力信號間의 關係를 다루는 傳達函數 (또는 impulse response)이다. 兩者間에는 다음 關係가 있다.

第一回 次項(1-39)式에서 第一項은  $t_0$ 에 있어서의 state  $X^0$ 로서 表現되고 初期條件(또는 stored energy)의 時刻  $t$ 에 있어서의 殘留成分으로서 dissipative system 이라면 (即 p. r. 條件이 滿足되는 system 이라면)  $t_0 \rightarrow -\infty$ 에 따라 事實上 無視되므로 第二項만 남고 이를 (1-34b)에 代入하면

$$Y(t) = C \int_{-\infty}^t \Phi(t, \tau) G(\tau) U(\tau) d\tau \dots (3-42)$$

system 이 time invariant 하지 않다면 state 및 output equation (1-33式, 1-34a式)은

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t) X(t) + G(t) U(t) \dots (3-43a)$$

$$Y(t) = C(t) X(t) \dots (3-43b)$$

와 같이 matrix  $F(t)$ ,  $G(t)$  및  $C(t)$  등이 時間의 函數가 되기 때문에 (42)式的  $C$ 를  $C(t)$ 로 하여

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t G(t) \Phi(t, \tau) G(\tau) U(\tau) d\tau \int_{-\infty}^t H(t, \tau) U(\tau) d\tau \dots (3-44)$$

가 된다. 따라서 causal system 이라면

$$h(t, \tau) = \begin{cases} C(t) \Phi(t, \tau) G(\tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases} \dots (3-45)$$

이다. 이것은 state equation의 係數로서 그 system의 傳達函數가 表現된 것이다.

反對로 傳達函數를 出發點으로 하여 state equation을 求하는 方法도 있다.<sup>[5][6]</sup>

— Random process를 取扱할 경우에는 初期條件等도 random variable 이기 때문에 state 및 output equation 以外에  $K_x(t_0, t_0) \triangleq E\{X(t_0) X^t(t_0)\}$  등의 covariance를 알아야 한다.

$t$  時點에 있어서의 covariance matrix를  $\Lambda_x(t)$

$\triangleq E\{X(t) X^t(t)\}$ 라하면  $\dot{X}(t) = F(t) X(t) + G(t) U(t)$ 를 滿足시키는 state vector  $X(t)$ 의 variance matrix는 다음 微方을 滿足시킨다.<sup>[5][7]</sup>

$$\dot{\Lambda}_x(t) = F(t) \Lambda_x(t) + \Lambda_x(t) F^t(t) + G(t) Q G^t(t) \dots (3-47)$$

但  $E\{U(t) U^t(t)\} = Q \delta(t - \tau)$ 이다.

— (1-34a)式的  $BU$ 項은 input to output direct coupling 成分을 주나  $U(t)$ 가 廣帶域이됨에 따라 實際 system 出力이 亦時 無限히 廣帶域이 되는 것이 아니기 때문에 realize 할 수가 없어서  $B = 0$ 로 놓으나 實際에 있어서 觀察量(出力)  $Y(t)$ 를 얻음에 있어서 noise가 介入하기 때문에

$$Y(t) = C(t) X(t) + W(t) \dots (3-48)$$

와 같이  $W(t)$ 項을 追加하는데 이를 observation noise 또는 measurement noise라 부른다.

— Kalman filter에서는 入力を white noise로 생각하기 때문에 (47)式 但書와 같이 white noise가 되며 이를 plant noise라 한다.

(48)式的 observation noise  $W(t)$ 는 우선

$$E\{W(t) W^t(u)\} = R(t) \delta(t - u) \dots (3-49)$$

로 한다. 이 matrix는 covariance matrix이기 때문에 positive definite이다. 結局 求하고자 하는 結果는 다음과 같다.

• Estimation equation

$$\frac{dX(t)}{dt} = F(t) X(t) + Z(t) (Y(t) - C(t) X(t)) \dots (3-50)$$

• Gain Equation

$$Z(t) = \xi_p(t) C^t(t) R^{-1}(t)$$

但  $\xi_p(t) \triangleq E\{X_E(t) X_E^t(t)\} \triangleq E\{(X(t) - \hat{X}(t))(X(t) - \hat{X}(t))^t\}$ 는 推定誤差를 나타내는 variance matrix로서 다음의 Riccati 方程式의 解이다.<sup>[5][7]</sup>

$$\frac{d\xi_p(t)}{dt} = F(t) \xi_p(t) + \xi_p(t) F^t(t) - \xi_p(t) C^t(t) R^{-1}(t) C(t) \xi_p(t) + G(t) Q G^t(t) \dots (3-52)$$

上記式에서 우리는  $[Y(t) - C(t) X(t)]$ 가 estimation의 出力에서의 error,  $R(t)$ 가 observation noise의 power,  $G(t) Q(t) G^t(t)$ 는 state의 變化에 影響을 줄 수 있는 入力(=white noise)의 power equality 임을 알 수 있다.

— Discrete time의 경우는  $i$ 번째 時點에서 얻는  $i + 1$ 번째에 있어서의 state 推定值를  $\hat{X}_{i+1|i}$  등으로



나타내고 discrete-time의 경우임을 強調하는 뜻으로

$$F(t) \leftrightarrow \Phi(i+1, i)$$

$$G(t) \rightarrow \Gamma(i+1, i)$$

$$C(t) \rightarrow H(i+1)$$

$Z(t) \rightarrow K(i+1)$  등으로 바꿔 쓰면 state equation과 output equation (또는 measurement equation)은 差分方程式으로서 다음과 같이 된다.

$$X(i+1) = \Phi(i+1, i)X(i) + \Gamma(i+1, i)U(i) \dots \dots \dots (3-53a)$$

$$Y(i+1) = H(i+1)X(i) + W(i+1) \dots \dots \dots (3-53b)$$

이때 推定値는 다음 式으로서 求解진다.

$$\hat{X}(i+1|i+1) = \Phi(i+1, i)\hat{X}(i|i) + K(i+1) \{ Y(i+1) - H(i+1)\Phi(i+1, i)\hat{X}(i|i) \} \dots \dots \dots (3-54a)$$

그리고  $K(i+1)$ 는 다음 式으로 나타난다.

$$K(i+1) = P(i+1|i)H'(i+1) \{ H(i+1)P(i+1|i)H'(i+1) + R(i+1) \}^{-1} \dots \dots \dots (3-54b)$$

한편  $P(i+1|i)$ ,  $P(i+1|i+1)$ 等 covariance matrix는 다음 式의 solution matrix이다.

$$P(i+1|i) = \Phi(i+1, i)P(i|i)\Phi'(i+1, i) + \Gamma(i+1, i)Q\Gamma'(i+1, i) \dots \dots \dots (3-54c)$$

$$P(i+1|i+1) = [I - K(i+1)H(i+1)]P(i+1|i) \dots \dots \dots (3-54d)$$

이들로서 表現되는 discrete system을 Kalman filter라 부르고  $\Phi(i+1, i)$ 는 (1-39)式에서 짐작되듯이 state transition matrix이다.

### 結 論

많은 研究人員에게 이分野의 研究가 委囑되지 못한 韓國의 現實下에서 이글은 처음부터 現實의 立場에서 그러나 또한 枝葉의 이기도한 實際方法도 取扱하기에는 充分한 動機가 되지 못한 것으로 判斷되어서 走馬觀山格으로 큰 줄거리만에 限定하였다. 이는 이러한 글의 期待되는 讀者의 主流가 無數히 論文을 찾고 지친 그리고 原論보다는 Concrete한 하나의 technique와 解決에 더 關心이 큰 研究契約者보다는 이러한 分野에 好奇心을 갖고 dissertation을 생각하여야 할 初步者들임을 強하게 意識한 故이다. 더 높은 程度의 survey를 위해서는 T. Kailath의 글을<sup>[3]</sup> 읽어야 할 것으로 생각된다. 다음에 이번 範圍에 넣지 못한 몇가

지 部分을 補完하고자 한다.

元來 情報傳達의 本質이 受信者가 推理하지 못한 部分에 있기 때문에 受信信號의 모든 規則性이 그 transmission medium의 浪費 즉 效率低下를 가져온다. 勿論 보낸 信號가 多重化 되어 있을 경우가 많기 때문에 reframing을 爲해서 그리고 error가 生겼을 경우 correction을 위해서 어떠한 週期性과 control된 redundancy가 挿入된 경우를 除外하고는 信號를 미리 豫測할 수가 없다. 한편 Noise도 같은 성질을 가졌기 때문에 信號와 密着하여 自動的으로 分離하거나 除外할 수가 없다. 따라서 random process로서 取扱 情報信號와 noise의 各各의 統計的 特性이 把握된다면 interpolation과 smoothing 技法에 依해서 만이 noise의 影響이 輕減되고 이러한 改善은 數字上으로는 輕微할 때에도 視覺的 效果로 볼때 큰 差를 줄 수 있다. 一般의 analogue 信號狀態로서는 error가 累積하기 때문에 discrete 信號로 (특히 error correcting code로) 바꾸어 두는 것이 有利하다. 또한 time function 形態로 그대로 傳送하는 것 보다는 어떠한 變換을 한 다음 傳送하는 것이 noise 영향을 덜 받는다. 變換 方法에 따라서는 所要帶域幅을 激減시킬 수가 있다.

우선 noise의 影響을 생각할때 傳達信號를 그대로 보내는 것보다 transform하여 보냄으로서 變數가 frequency等 time와 non commutable한 observable (operator)<sup>[16]</sup>이 될때에는 한 domain에서 좁은 範圍에 密集한 信號가 또한 domain에서는 分散되어 나타나면서도 이 分散된 成分들이 어떠한 correlation을 갖고 있어야 하기 때문에 第二 domain에서의 攪亂이 原 domain에 좁은 範圍를 차지하는 noise로 나타나지 못한다. 即 non commutable observable로 바뀌 보낸 狀況에서의 noise 攪亂이 原 domain에서의 noise로 直結되지 못한다 有利하다.

둘째, 所要帶域幅의 問題는 畫像의 Hadamard 變換等에서 두드러지게 나타난다. <sup>[32][34]</sup> 一般의 畫像들이 redundancy가 많음은 이미 알려져 있는 事實인데 특히 低周波部分에 energy가 잘려 있을 때 많기 때문에 더 작은 sequency 편에 密集하고 있어서 transform된 信號를 보내는 것이 帶域幅이 激減하여 data compression의 目的에 適合하고 有利하기 때문에 畫像信號取扱에 活用된다. 一般의 transform 過程은 莫大한 計算量을 뜻할때가 많은데 FFT에 準한 速算方法이 開發되어 있다. 取扱對象信號가 實函數일 경우 time domain에서 sampling한 N개의 값에서 우리는 freq. domain 內 N個點에서의 DFT를 求하게 되는데 DFT는 複素數이기 때문에 이는 2N개의 自由

도를 뜻하는듯 보인다. 이는 勿論 矛盾된 일이고 實際에 있어서 우리는  $\frac{N}{2}$  個點을 境界로 對稱性이 觀察되어서 結局은 N個의 自由度밖에 찾을 수 없다는 結論이다. 따라서 redundancy를 除去하여 計算時間과 特別히 printout 時間을 節約하는 研究가 行하여졌다.<sup>[25]</sup> 新algorithm은 具體的으로 費用을 節減하여 준다.

信號處理에 있어서 우리는 恒常 發達이 있을수록 可能한 限界를 取扱하게 되기 때문에 low level detection의 問題가 發生하게 된다. detector의 感度를 높이다보니 光信號의 경우 우리는 數百光子單位까지 내려가게 되는데 이러한 것은 量子理論을 통한 quantum detection의 問題로 歸結된다.<sup>[15]</sup> 이分野에서도 物理學者들의 terminology와 사이에 差가 있어서 電子工學者들의 access가 더욱 어려워지지만 많은 경우에 있어서 概念은 共通된다. 共通된 terminology로 이어 줄 수가 있고 이번 survey의 目的에 附合될 것으로 보지만 이번 機會에 다루면 이글의 scope를 너무 散漫하게 할듯하여 割愛하였다. 뜻이 있는 분을 위해서 Helstrom의 著書가<sup>[15]</sup> 參考가 될 것이다. operator나 bra-ket의 convention은 익숙해 들만하다.

時代的으로 보아서 電算裝置의 普及이 그리고 廉價化가 信號處理 system의 具體的인 implementation을 可能하게 하여 주고 있고 韓國에 있어서도 具體的인 適用對象이 實際 生기고 있어서 研究管理層의 斷案과 配慮가 研究者들에게 具體的인 責任으로 짐지워 질날이 빨리오기를 期待한다.

### 參 考 文 獻

1. Box & Jenkins, *Time Series Analysis-forecasting and Control*, San Francisco Holden-Day 1970.
2. N. Wiener, *Etrapolation, Interpolation and smoothing of Stationars Time Series, with Engineering Applications*, New York: Technology press and wiley, 1949.
3. T. Kailath "A View of Three Decades of Linear Filtering Theory" IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. 1 T-20 no. 2 march 1974.
4. W. B. Davenport, Jr., and W. L. Root, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*, New York; McGraw-Hill 1958.
5. Van Trees, H. L., *Detection, Estimation and Modulation Theory Part I Detection, Estimation, and Linear Modulation Theory*, New York: Wiley 1971.
6. C. T. Chen, *Introduction to Linear System Theory*, Holt, Rinehart and Winston, inc., 1970. p. 151.
7. W. H. Kwon "Linear Quadratic Regulators with Two-point Boundary Ruccati Equations," The Journal of KIEE vol. 16, No. october 1979.
8. Jazwinski, A. H., *Stochastic Processes and Filtering Theory*, New York Academic press 1970.
9. Balakrishnan, A. V., *Communication Theory*, New York McGraw-Hill 1968.
10. R. E. Kalman "A new Approach to Linear Filtering and Prediction problems" J. Basic Eng., vol. 82, pp. 34~45.
11. R. E. Kalman, "New Methods of Wiener Filtering Theory," in proc. 1st symp. Engineering Applications of Random Function Theory and probability, J. L. Bogdanoff and F. Kozin. Eds New York, Wiley 1963, pp. 270-388.
12. R. E. Kalman and R. S. Bucy "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," Trans ASME, Ser. D. J. Basic Eng., vol. 83, pp. 95-107, Dec. (90).
13. Medith, J. S., *Stochastic Optimal Linear Estimations and Control*, New York: McGraw-Hill, 1969.
14. McGarthy, T. P., *Stochastic Systems and State Estimation*, New York: John Wiley & Sons, 1974.
15. Helstrom, C. W., *Quantum Detection and Estimation Theory*, New York Academic Press, 1976.
16. Powell, J. L., *Quantum Mechanics*, Reading, Massachusetts, Addison - Wesley Publishing Company, 1961.
17. Anderson, B. O. O., and Moore, J. B., *Optimal Filtering*, Eaglewood Cliff, New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1979.
18. Andrews, H. C., *Introduction to Mathematical Techniques in pattern Recognition*, New York wiley-Interscience, 1972.
19. Friedman, B., *Lectures on Applications-oriented mathematics*, San Francisco, Holden-Day 1967.
20. Kock, W. E., *Radar, Sonar, and Holography, An Introduction*, New York, Academic Press, 1973.
21. Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., *Digital Signal Processing*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1975.
22. LEE, Y. W., *Statistical Theory of Communication*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1960.
23. Markel, J. D. and Gray, Jr. A. H., *Linear Prediction of Speech*, New York, Springer-Verlag, 1976.

24. ANN Souguil, LEE Meong Jong, KIM kis-eon Enhancement by simple Analog Filters "One procedure pertaining to a 2-D-image, Convention Record, Communication Society, KIEE Summer 1979.
25. ANN Souguil, "Improvement in Computing Times by the Elimination of Redundancies in Existing DFT and FFT," The Journal of Korea Institute of Electronics Engineers Vol. 14, No. 6 Jan. 1978.
26. Robinson, E. A., *Multichannel Time-Series Analysis with Digital Computer Programs*, San Francisco, Calif. Holden-Day, 1967.
27. N. Wiener and E. Hopf, "On a class of Singular integral equations," Proc. Prussion Acad., Math-phys. Ser., p. 696. 1931.
28. C. W. Helstrom, "Solution of the detection integral equation for Stationary filtered white noise," IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. 27-11, July 1965.
29. W. C. Lidsey, *Synchronization Systems in Communication and Control*. Englewood Cliffs, N. J: Prentice-Hall, 1972.
30. R. S. Bucy, "Linear and nonlinear filtering," Proc. IEEE, Vol. 58, June 1970.
31. ANN Souguil, "Time Dependent Fourier Transform, Time Dependent Spectrum Density and Their Applications," The Journal of Korea Institute of Electronics Engineers Vol. 13. No. 4, Oct. 1976.
32. F. YANG, Y. SHUM, A. RONALDELLIOT, and W. OWEN BROWN, "Speech Processing with Walsh-Hadamard Transforms," IEEE Trans, Audio and E'troacoustics. Vol. AU- 21. No. 3, June 1973.
33. J. O. GIBSON, J. L. MELSA, and S. K. JONES, "Digital Speech Analysis Using Sequential Estimation Techniques," IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP- 23, No. 4 Aug. 1975.
34. T. OHIRA, M HAYAKAWA, and K. MATSUMOTO "Orthogonal Transform Coding System for NTSC Color Television Signals," IEEE Trans. Communication vol. COM- 26, No. 10, Oct. 1978.
35. S. T. CAMPANELLA and G. S. ROBINSON, " A Comparison of Orthogonal Transformations for Digital Speech Processing," IEEE Trans. Commun. Technol., vol. COM- 19 pt. I Dec. 1971.

