Ladder 回路의 伝達函数를 求하는 새로운 方法
(A Novel Method Finding Transfer Function of General Multimesh Ladder Network)

韓 喜*, 李 相 培*

(Han, Hee and Lee, Sang-Bae)

要 約

一般的인 ladder回路의 傳達函數를 構成하는 各項들 間의 關係로부터 傳達函數의 數學的인 公式을 誘導하였다. 이 公式의 性質로부터 段階的인 減縮法을 開發하였으며 觀察에 依해서 傳達函數를 求할 수 있는 方法을 提示하였다.

Abstract

A mathematical formula for transfer functions of general multimesh ladder is introduced in terms of series branch impedances and shunt admittances.

From the properties of the mathematical formula, a method finding transfer function is developed by reduction methods and the imspection method is also developed.

I. 序 論

一般的인 ladder 回路의 傳達函數는 node 方程式, mesh方程式[1] 回路網topology 方法[2]에 依하거나 入出力點에서 부터 始作하여 電流와 電壓의 連續的인 適用[3~5] 등에 依해서 解析되고 있다. 이 外에도 實驗的 法則[6]과 數學的인 公式[7]이 오직 두가지 種類의 素子로만 構成된 lader 回路에 對해서 提示되어 왔다. 또 最近에는 積線圖에 依한 方法이 紹介된 바 있다. 그러나 이같은 方法들은 어느程度의 複雜한 計算을 要求해 왔다. 本 論文에서는 ladder 回路의 傳達函數를 이루는 各項들의 關係를 考察하여 傳達函數의 數學的인 公式을 誘導해내고 이 公式을 變形하여 段階的인 減縮에 依한 새로운 方法을 試圖하였다.

* 正會員, 延世大學校 電子工學科

(Dept. of Electronic Engineering, Yonsei Univ.)

接受日字: 1979年 11月 29日

II. 傳達函數를 爲한 數學的인 公式

그림 1과 같이 直列素子는 임피이던스Z로, 並列素子는 어드미턴스Y로 表示하며 各各 n 個의 素子를 갖는 ladder 回路에서, 各 마디에서 右側으로 본 傳達어드미턴스를 求하면 아래와 같은 표1을 얻을 수 있다. 이表에서 一個의 素子로 構成된 項은

마디 n에서 : Y_n

마디 $n-1$에서 : $Y_{n-1}+Y_n$

마디 $n-2$에서 : $Y_{n-2}+Y_{n-1}+Y_n$

마디 $n-3$에서 : $Y_{n-3}+Y_{n-2}+Y_{n-1}+Y_n$

⋮ ⋮

마디 1에서 : $Y_1+Y_2+Y_3+\cdots\cdots+Y_{n-1}+Y_n$

이를 一般化하면

$$\text{一個素子로 된 項}=\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

또, 三個素子로 된 項은

마디 $n-1$에서 : $Y_{n-1}Z_n Y_n$

마디 $n-2$에서 : $Y_{n-2}[Z_{n-1}(Y_{n-1}+Y_n)]+Y_{n-2}[Z_n$

· (Y_n))] + 마디 $n-1$에서의項

⋮ $+ Y_{n-3}Z_{n-2}Y_{n-1}[Z_n(Y_n)] + Y_{n-3}Z_{n-1}$

⋮ · $Y_{n-1}[Z_n(Y_n)]$ + 마디 n-2 에서의 項

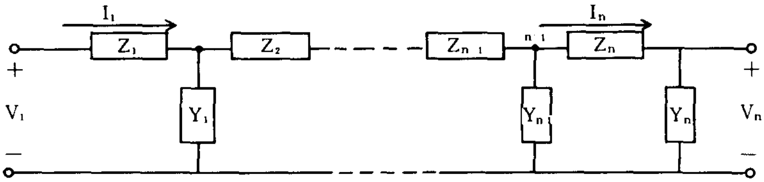

그림 1. 一般的인 ladder 回路

Fig. 1. General ladder network.

표 1. 各 마디에서 우측으로 본 전달 어드미턴스

마디	내 용
n	Y_n
$n-1$	$Y_{n-1}[Z_n(Y_n)]$ Y_{n-1} 마디n 의 項
$n-2$	$Y_{n-2}[Z_{n-1}(Y_{n-1}+Y_n)]$ $Y_{n-2}[Z_n(Y_n)]$ $Y_{n-2}Z_{n-1}Y_{n-1}[Z_n(Y_n)]$ Y_{n-2} 마디$n-1$의 項
$n-3$	$Y_{n-3}[Z_{n-2}(Y_{n-2}+Y_{n-1}+Y_n)]$ $Y_{n-3}[Z_{n-1}(Y_{n-1}+Y_n)]$ $Y_{n-3}Z_{n-2}Y_{n-2}[Z_{n-1}(Y_{n-1}+Y_n)]$ $Y_{n-3}Z_{n-2}Y_{n-2}[Z_n(Y_n)]$ $Y_{n-3}Z_{n-2}Y_{n-1}[Z_n(Y_n)]$ $Y_{n-3}[Z_n(Y_n)]$ $Y_{n-3}Z_{n-1}Y_{n-1}[Z_n(Y_n)]$ Y_{n-3} $Y_{n-3}Z_{n-2}Y_{n-2}Z_{n-1}Y_{n-1}[Z_n(Y_n)]$마디$n-2$의 項
⋮ 1	⋮ ⋮ ⋮

마디 $n-3$에서 : $Y_{n-3}[Z_{n-2}(Y_{n-2}+Y_{n-1}+Y_n)] + Y_{n-3}$

⋮ $+[Z_{n-1}(Y_{n-1}+Y_n)] + Y_{n-3}[Z_n(Y_n)] +$

⋮ 마디$n-2$에서의 項

마디 1 에 서: $Y_1[Z_2(Y_2+Y_3+\cdots\cdots+Y_n)]$

$+ Y_1[Z_3(Y_3+Y_4+\cdots\cdots+Y_n)]$

⋮

$+Y_1[Z_n(Y_n)]$ + 마디 2에서의 項

마찬가지로 이를 一般化하면

$$\text{三個素子로 된 項} = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i \sum_{j=i+1}^{n} Z_i \sum_{k=j}^{n} Y_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{j=i+1}^{n} Z_j \sum_{k=j}^{n} Y_k \text{ 가 되며}$$

五個素子로 된 項은

마디 $n-2$에서 : $Y_{n-2}Z_{n-1}Y_{n-1}[Z_n(Y_n)]$

마디 $n-3$에서 : $Y_{n-3}Z_{n-2}Y_{n-2}[Z_{n-1}(Y_{n-1}+Y_n)]$

⋮ $+Y_{n-3}Z_{n-2}Y_{n-2}[Z_n(Y_n)]$

마디 1에서 : $Y_1Z_2Y_2[Z_3(Y_3+\cdots\cdots Y_n)]$

⋮

$Y_1Z_{n-1}Y_{n-1}[Z_n(Y_n)]$ + 마디 2에서의 項

이를 一般化하면

$$\text{五個素子로 된 項} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{j=i+1}^{n} Z_i \sum_{k=j}^{n} Y_k \sum_{l=k+1}^{n} Z_l \sum_{m=l}^{n} Y_m$$

이 되며 마찬가지 방법으로

$$\text{七個素子로 된 項} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{j=i+1}^{n} Z_i \sum_{k=j}^{n} Y_k \sum_{l=k+1}^{n} Z_l \cdot \sum_{m=l}^{n} Y_m \sum_{p=m+1}^{n} Z_p \sum_{q=p}^{n} Y_q$$

를 얻을 수 있게 되어 2N個의 素子를 갖는 ladder 回路에서의 最大項인 2N-1個의 素子로 된 項은 $\sum Y \sum Z \sum Y \cdots \sum Z \sum Y$를 얻을 수 있다.

여기서 다음과 같은 定義를 하면

〈정의 1〉

$$\sum Z_i \otimes \sum Y_j \otimes \sum Z_k = \sum Z_i + \sum Z_i \sum Y_j + \sum Z_i \sum Y_j \sum Z_k$$

傳達어드미턴스는 아래와 같이 表示된다.

$I_1(s)/V_n(s)$ = 一個素子項 + 三個素子項 + ⋯⋯⋯⋯⋯⋯ + $2n$-1個素子項

$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i \otimes \sum_{j=i+1}^{n} Z_j \sum_{k=j}^{n} Y_k \otimes \sum_{l=k+1}^{n} Z_l \sum_{m=l} Y_l \otimes \sum_{p=m+1}^{n} Z_p \sum_{q=p}^{n} Y_q \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

예) $n=4$인 경우를 例로써 살펴보면

$$I_1(s)/V_4(s) = \sum_{i=1}^{4} Y_i \otimes \sum_{j=i-1}^{4} Z_i \sum_{k=j}^{4} Y_k \otimes \sum_{l=k+1}^{4} Z_l \sum_{m=l}^{4} Y_l \otimes \sum_{p=m+1}^{4} Z_p \sum_{q=p}^{4} Y_q$$

가 되며 이들을 $i, j, k, l,$

m, p, q의 변화에 따른 圖表와 결과를 表示하면 아래와 같다. 즉, 표 2에 依해서

$$I_1(s)/V_4(s) = Y_1Z_2Y_2Z_3Y_3Z_4Y_4 + Y_1Z_2Y_2Z_3Y_3 + Y_1Z_2Y_2Z_3Y_4 + Y_1Z_2Y_2Z_4Y_4 + Y_1Z_2Y_2 + Y_1Z_2Y_3Z_4Y_4 + Y_1Z_2Y_3 + Y_1Z_2Y_4 + Y_1Z_2Y_3Z_4Y_4 + Y_1Z_3Y_3 + Y_1Z_3Y_4 + Y_1Z_4Y_4 + Y_1 + Y_2Z_3Y_3Z_4Y_4 + Y_2Z_3Y_3 + Y_2Z_3Y_4 + Y_2Z_4Y_4 + Y_2 + Y_3Z_4Y_4 + Y_3 + Y_4 \cdots (2)$$

표 2. 변수 변화에 따른 傳達函數의 各項

변수	내											용	
i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
j	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	
k	2	2	2	2	2	3	3	4	3	3	4	4	
l	3	3	3	4		4			4				
m	3	3	4	4		4			4				
p	4												
q	4												
i	2	2	2	2	2	3	3	4					
j	3	3	3	4		4							
k	3	3	4	4		4							
l	4												
m	4												

Ⅱ. Graph를 利用한 단계적인 감축법

다음을 계속하기 전에 아래와 같은 정의를 하자.

〈정의 2〉

$S\langle 2, n\rangle = 2\times 3\times 4\times\cdots\cdots\times(n-1)\times n = Y_1Z_2Y_2 \cdots\cdots\cdots\cdots Y_{n-1}Z_nY_n$

위와 같은 연산 $s\langle\alpha, \beta\rangle$를 α에서 β까지의 "연속곱"이라고 부르기로 한다. (예) $s\langle 2, 4\rangle = Y_1Z_2Y_2$

〈정의 3〉

$$\sum_{r=\alpha,\alpha+1}^{n-1,n} \frac{1}{s\langle r\rangle} = \frac{1}{s\langle\alpha, \alpha+1\rangle} + \frac{1}{s\langle\alpha+1, \alpha+2\rangle} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{1}{s\langle n-1, n\rangle}$$

위와 같은 관계에 해당하는 연산을 "연속제산의 합"이라고 부르기로 한다.

(예) $$\sum_{r=2,3}^{3,4} \frac{1}{s\langle r\rangle} = \frac{1}{s\langle 2, 3\rangle} + \frac{1}{s\langle 3, 4\rangle} = \frac{1}{Y_1Z_2} + \frac{1}{Y_2Z_2}$$

정의 2와 정의 3을 사용하여 표 2를 나타내면

$$I_1(s)/V_4(s) = s\langle 2, 8\rangle + \frac{s\langle 2, 8\rangle}{s\langle 2, 3\rangle} + \frac{s\langle 2, 8\rangle}{s\langle 3, 4\rangle} + \frac{s\langle 2, 8\rangle}{s\langle 4, 5\rangle} + \frac{s\langle 2, 8\rangle}{s\langle 5, 6\rangle} + \frac{s\langle 2, 8\rangle}{s\langle 6, 7\rangle} + \frac{s\langle 2, 8\rangle}{s\langle 7, 8\rangle} + \frac{\alpha_1}{s\langle 4, 5\rangle} + \frac{\alpha_1}{s\langle 5, 6\rangle} + \frac{\alpha_1}{s\langle 6, 7\rangle} + \frac{\alpha_1}{s\langle 7, 8\rangle} + \frac{\alpha_2}{s\langle 5, 6\rangle} + \frac{\alpha_2}{s\langle 6, 7\rangle} + \frac{\alpha_2}{s\langle 7, 8\rangle} + \frac{\alpha_3}{s\langle 6, 7\rangle} + \frac{\alpha_3}{s\langle 7, 8\rangle} + \frac{\alpha_4}{s\langle 7, 8\rangle} + \frac{\beta_1}{s\langle 6, 7\rangle} + \frac{\beta_1}{s\langle 7, 8\rangle} + \frac{\beta_2}{s\langle 7, 8\rangle} + \frac{\beta_3}{s\langle 7, 8\rangle}$$

$$\left(\text{단, } \frac{s\langle 2, 8\rangle}{s\langle 2, 3\rangle} = \alpha_1 \quad \frac{s\langle 2, 8\rangle}{s\langle 3, 4\rangle} = \alpha_2 \quad \frac{s\langle 2, 8\rangle}{s\langle 4. 5\rangle} = \alpha_3 \quad \frac{s\langle 2, 8\rangle}{s\langle 5, 6\rangle} = \alpha_4 \quad \frac{\alpha_1}{s\langle 4, 5\rangle} = \beta_1 \quad \frac{\alpha_1}{s\langle 5, 6\rangle} = \beta_2 \quad \frac{\alpha_2}{s\langle 5, 6\rangle} = \beta_3\right)$$

따라서 상기의 결과는 아래와 같이 표시도다.

$$I_1(s)/V_4(s) = s\langle 2, 8\rangle \otimes \sum_{r=2,3}^{7,8} \frac{1}{s\langle r\rangle} \otimes \sum_{k=r+1}^{7,8} \frac{1}{s\langle k\rangle} \otimes \sum_{l=k+1}^{7,8} \frac{1}{s\langle j\rangle}$$

이것을 n에 대해서 一般化하면 (1)식의 변형된 꼴인 (2)식을 얻을 수 있다.

$$I_1(s)/V_n(s) = s\langle 2, n\rangle \otimes \underbrace{\sum_{r=2,3}^{n-1,n} \frac{1}{s\langle r\rangle} \otimes \sum_{k=r+1}^{n-1,n} \frac{1}{s\langle k\rangle} \otimes \cdots\cdots\cdots\cdots}_{n/2-1\text{ 個의 項}} \cdots\cdots (3)$$

상기의 (3)式에서 첫항은 연속곱으로서 Y_1부터 모든 素子를 곱한 것이고 첫항과 둘째항은 연소제산의 합으로서 연속곱을 처음부터 연속된 두개의 변수로 계속 나누어간 값의 합이다. 이것은 바꾸어 말하면 Y_1부터 연속된 두개의 소자를 제외(감축)시킨 나머지에 대한 곱을 뜻한다. 또, 세번째항은 1차연속제산의 합을 각각의 감축시킨 나머지 부분에 대해서 다시 차례로 연속된 2개의 素子를 감축 시켜서 (2차감축), 그나머

지 부분에 대한 곱을 행하는 것이다. 이때 $i+1$차 감축은 i 차 감축이 끝난 바로 다음 素子에서 부터 시작됨을 알 수 있다. 그러므로 $i+1$차 감축은 i차 감축이 끝난 各항들 중에서 적어도 2개 이상의 역으로 연속된 素子를 갖는 항들에 대해서만 행하여 진다는 것을 알 수 있다. 차후부터는 이처럼 2개 이상의 감축할 여분의 素子를 포함한 항을 i차 주잔류항이라고 부르기로 한다.

이상의 고찰을 토대로하면 단계적인 감축에 依해서 (1), (3)式을 만족하는 결과를 얻을 수 있게 된다.

(예) $n=4$인 경우

$s\langle 2, 8\rangle = Y_1 Z_2 Y_2 Z_3 Y_3 Z_4 Y_4$ ——→ 7個素子項

〈1차 감축〉

감축素子	1차 잔류항
$Y_1 Z_2$	$Y_1 Z_3 Y_3 Z_4 Y_4$
$Z_2 Y_2$	$Y_1 Z_3 Y_3 Z_4 Y_4$
$Y_2 Z_3$	$Y_1 Z_2 Y_3 Z_4 Y_4$
$Z_3 Y_3$	$Y_1 Z_2 Y_2 Z_4 Y_4$
$Y_3 Z_4$	$Y_1 Z_2 Y_2 Z_3 Y_4$
$Z_4 Y_4$	$Y_1 Z_2 Y_2 Z_3 Y_3$

1차 잔류항은 5個素子項이 된다.

〈2차 감축〉

1차 감축소자 / 주 잔류항	2차 잔류항			
	$Y_2 Z_3$	$Z_3 Y_3$	$Y_3 Z_4$	$Z_4 Y_4$
$Y_2 Z_3 Y_3 Z_4 Y_4$	$Y_3 Z_4 Z_4$	$Y_2 Z_4 Z_4$	$Y_2 Z_3 Y_4$	$Y_2 Z_3 Y_3$
$Y_1 Z_3 Y_3 Z_4 Y_4$		$Y_1 Z_4 Z_4$	$Y_1 Z_3 Y_4$	$Y_1 Z_3 Y_3$
$Y_1 Z_2 Y_3 Z_4 Y_4$			$Y_1 Z_2 Y_4$	$Y_1 Z_2 Y_3$
$Y_1 Z_2 Y_3 Z_4 Y_4$				$Y_1 Z_2 Y_2$

2차 잔류항은 3個素子項이 된다.

〈3차 감축〉

2차 감축소자 / 주 잔류항	3차 잔류항	
	$Y_3 Z_4$	$Z_4 Y_4$
$Y_3 Z_4 Y_4$	Y_4	Y_3
$Y_2 Z_4 Y_4$		Y_2
$Y_1 Z_4 Y_4$		Y_1

3차 잔류항은 1個素子項 이 된다.

3차 잔류항에서는 더 이상 감축을 할 수가 없으므로 감축은 여기서 끝난다. 이상의 1. 2 3차 잔류항과 7個素子項을 모두 더하면 (2)式과 一致함을 볼 수 있다.

IV. 觀察에 依한 方法

1차 연속계산의 합, 즉 1차감축의 합은 상기의 그림 (a)에서와 같이 차례로 $Y_1 Z_2$, $Z_2 Y_2$, $Y_2 Z_3$ …… 등을 감축 시키고 그나머지인 $Y_2 Z_3 Y_3 Z_4 Y_4$, $Y_1 Z_3 Y_3 Z_4 Y_4$, $Y_1 Z_2 Y_3 Z_4 Y_4$ ……… 등을 모두 합한 것이며 2차

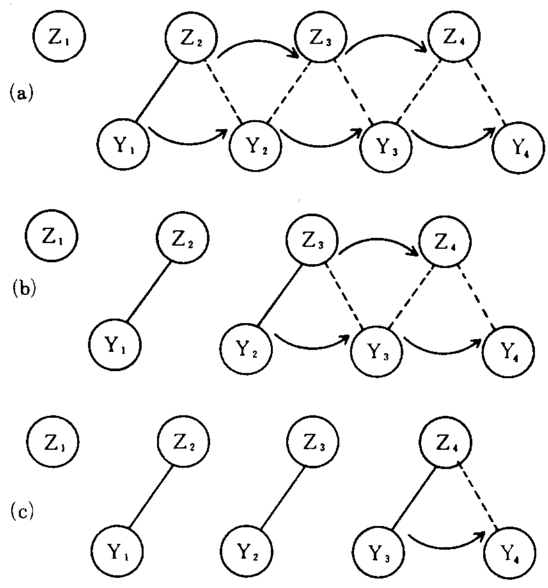

그림 2. 실제회로에서의 감축

(a) 1차감축 (b) 2차감축 (c) 3차감축

Fig. 2. Reduction in the network.

(a) First reduction (b) Second reduction

(c) Third reduction

감축의 합은 그림 2(b)에서와같이 1차감축을 행한 나머지 부분 즉, $Y_1 Z_2$를 1차로 감축했을 때 나머지인 $Y_2 Z_3 Y_3 Z_4 Y_4$에 대해서 다시 차례로 $Y_2 Z_3$, $Z_3 Y_3$ …… 등을 감축하고 나머지들의 곱을 모두 더한 것이며 또한 이같은 과정은 1차감축시에 $Z_2 Y_2$, $Y_2 Z_3$ ………… 등을 감축했을 경우에도 마찬가지로 적용된다 또, 3차감축의 합은 2차감축을 행한 회로의 나머지 부분에 대하여 그림 2(c)와 같이 2차감축을 행한 나머지 부분 즉, 1차로 $Y_1 Z_2$, 2차로 $Y_2 Z_3$를 감축했을 경우, 나머지 부분인 $Y_3 Z_4 Y_4$에서 차례로 $Y_3 Z_4$, $Z_4 Y_4$를 감축한 결과인 Y_3, Y_4의 합이 되며 이같은 과정은 2차감축시의 각 경우에 대해서도 마찬가지로 적용된다.

그러므로 이상의 내용을 정리하면

$I_1(s)/V_n(s)$는 아래와 같이 된다.

(1). Y_1 부터 Y_n 까지의 연속곱 $s\langle 2, n\rangle$을 행한다.

(2). Y_1부터 차례로, 연속된 2개의 素子를 제외 시켜가며 나머지 모두를 곱한다.

(3). (2)에서 행한 1차감축의 우반부를 다시 한쌍의 연속된 素子들을 제외 시켜가며 나머지 모두를 곱한다.

(4) 상기의 과정을 더 행할 수 없을때까지 계속한다.

*　　　　*　　　　*

지금까지 살펴본 모든 과정을 $V_1(s)/V_n(s)$에 대해

서도 적용하면

$$V_1(s)/V_n(s)=Z_1I_1(s)+Z_2I_2(s)+\cdots\cdots\cdots+Z_{n-1}I_{n-1}(s)+Z_nI_n(s)+1$$

$$=\sum_{h=1}^{n}Z_h\sum_{i=h}^{n}Y_i\otimes\sum_{j=i+1}^{n}Z_j\sum_{k=j}^{n}Y_k\otimes\cdots+1$$

$$=s\langle 1,n\rangle\otimes\sum_{r=1,2}^{n-1,n}\frac{1}{s\langle r\rangle}\otimes\sum\cdots+1$$

을 얻을 수가 있으며 감축에 의한 방법과 觀察에 依해서 傳達函數를 求할 경우는 Z_1 의 素子에서 부터 始作하여 실시한 결과에 1을 더하면 된다.

V. 結 論

直列素子는 임피이던스 並列素子는 어드미턴스로 表示된 一般的인 ladder 回路에서의 전달함수를 求하는 數學的인 公式과 단계적인 減縮法, 그리고 복잡한 연산과정을 거치지 않고 觀察에 依해서 傳達函數를 求하는 방법을 제시 하였다.

Ladder 回路에서 各 마디에서 右側으로 바라본 傳達어드미턴스의 數學的인 公式을 誘導하기 위해서 傳達어드미턴스를 이루는 項들을 같은 個數의 素子로 이루어진 項들 끼리 分類하여 이들의 관계를 一般化하였다. 또한, 이렇게 하여 얻어진 公式을 변형하여 段階的인 減縮에 依한 새로운 方法을 개발 하였으며 이같은 方法이 實際의 回路에서 갖는 意味를 減縮의 各 過程別로 觀察하므로서 一般的인 ladder 回路의 傳達函數가 이제까지의 방법들 처럼 複雜한 연산過程을 거치지 않고서도 觀察만에 依하여 손쉽게 求해질 수가 있음을 보였다.

參 考 文 獻

1. A.T.Starr. "Electric Circuits and wave Filters." pitman & Sons Ltds., London, England ; 1948.
2. G.H.Burchill, "A signal flow graph method for determining ladder network functions," proc. IRE (Correspondence), vol. 48, pp.1175 ; June, 1960.
3. N. Beam, "A method of calculating the transfer function of ladder networks," proc. IEE, vol. 108, pp. 354-358 ; Sept, 1961.
4. M.E.Van Valkenburg, "Network Analysis," Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. : 1958.
5. F.F. Kuo & G.H. Leichner, "An iterative method of detenmining ladder network functions." proc. IRE (correspondence), vol. 47, pp. 1783-1784, Oct. 1959.
6. S.C.D. Roy, "A method of determining the terminal impedance and transfer functions of genenal multimesh ladder networks containing two kinds of elements only." Indian J. phys., vol. 36, pp. 469-483 ; Sept. 1962.
7. S. C. O. Roy, "Formulas for the Terminal Impedance and Transfer Functions of General Multimesh Ladder Networks." proc. IEEE vol. 52, No. 6, June 1964.