

有限要素法에 의한 磁氣回路 解析 Analysis of Magnetic Circuits by F.E.M.

論 文
29-9-4

李 基 植*
(Ki - Sik Lee)

Abstract

Mathematically, the Electromagnetic phenomena can be represented by the Maxwell's equations, but it is very difficult to solve these equations, especially, having complex structural boundaries. By the way, the development of a computer system made us easy to solve these kind of partial differential equations. The Finite Element Method, one of the numerical methods, is very this. This paper shows the power of F.E.M by examining, with an example of a hollow cylinder in a uniform magnetic field which is analytically solvable, the errors and the tendency of magnetic flux lines.

1. 序 論

電氣磁氣의 諸 現象은 Maxwell 方程式으로 表現할 수 있으며 結局 物理的 意味에서 導出되는 境界條件을 包含하는 2階偏微分方程式으로 나타나게 된다. 그러나 至極히 簡單한 構造에 限하여서만 이 方程式을 變數分離法 等の 解析의 方法¹⁾으로, 그것도 無限級數의 形態로, 풀 수가 있었다. 이것은 實際의 電氣工學分野의 諸 機器들을 解析하기에는 滿足스러운 方法이라 할 수가 없다. 이에 Computer의 發展과 더불어 差分法(F.D.M.)²⁾, Integral Equation Method³⁾와 같은 數值解析의 方法에 關心을 갖게 되었고 급기야 有限要素法(F.E.M.)이 擡頭되게 되었다. 有限要素法에도 Ritz의 方法, Galerkin의 方法 等の 加重殘差法(Weighted Residual Method)⁴⁾,⁵⁾과 變分理論(Variational Calculus)을 利用한 方法, Boundary Integral Method⁶⁾,⁷⁾ 등으로 大別된다.

그러나 어느 方法을 擇하더라도 大形 Matrix를 풀어야 하는 不便이 따르기 마련이다. 本 論文에서는 變分理論에 根據를 둔 解析法을 採擇하였으며 要素分割 圖로써 System Matrix의 形成 모양을 미리 看把하여

零이 아닌 部分의 要素만 뽑아 一次元的 配列의 Matrix를 구했다. 따라서 그 部分의 位置를 記憶할 수 있는 Pointer Matrix가 必要하게 되나 全體의 으로 보았을 때 많은 量의 電算機 容量을 줄일 수 있었다. 또한 聯立方程式의 解法도 零이 아닌 部分만 計算하는 反復法을 使用하였기 때문에 必要 以外の 計算은 하지 않게 되어 時間의 으로도 많은 得을 보게 되었다.

計算結果의 磁力線은 Graphic Terminal을 利用하여 그렸으며 몇個의 角度 및 半徑에 對하여 解析値와 比載하여 圖示하였다.

2. 問題 設定

本 論文에서는 解析의 인 解와 比載 檢討하기 爲하여 다음과 같은 假定

- (A) 靜磁界
- (B) 外部 磁界에 依한 磁力線 發生
- (C) z-軸 對稱인 二次元 問題

을 設定함으로써 $A=A(x, y)$ 에 對한 微分方程式

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A = -J$$

$$\text{는 } \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A(x, y) = 0 \tag{1}$$

로 된다.

* 正會員: 檀國大 工大 電氣工學科 專任講師
接受日字: 1980年 7月 30日

3. 모델設定 및 解析法

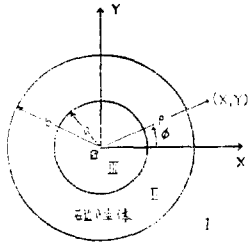


그림 1. 모델 및 座標系
Fig. 1. Problem Geometry

그림 1과 같은 모델의 問題에서 (a와 b 사이가 磁性體이고 그 以外는 空氣이다) y-軸의 陽의 方向에서 陰의 方向으로 均一한 磁場이 外部에서 加해 갔다면 y-軸上과 x-軸에서 充分히 떨어진 곳에서는 磁性體에 依한 disturbance가 없을 것이므로 y-軸과 나란한 方向으로 磁力線이 存在할 것이라는 것은 物理적으로 明若顯觀火한 일이다. 또한 磁界의 對稱性에 依해 全體의 領域을 解析할 것이 아니라 그림 2와 같은 第一 四分面만 解析하는 것으로 足하다.

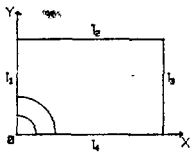


그림 2. 解析圖
Fig. 2. Reduced Geometry

이에 따른 解析法으로는 變分理論을 擇하였으며 汎函數(Functional)는

$$I(A) = \frac{1}{2} \iint_s \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} A \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} A \right)^2 \right] dx dy \quad (2)$$

로 놓았다. 이의 變分을 求하면

$$\delta I = -\frac{1}{2} \iint_s \delta A \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A \right] dx dy + \frac{1}{\mu} \oint_l \phi_i \delta A \frac{\partial}{\partial n} A dl \quad (3)$$

와 같이 되고 이 값을 零으로 만들기 爲한 必要條件은 被積分項이 零이면 된다. 即

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A = 0 \quad (4)$$

$$\delta A \cdot \frac{\partial}{\partial n} A = 0 \quad ; l \text{ 上에서} \quad (5)$$

가 成立하면 되는데 式(4)는 求하고자 하는 偏微分

程式이고 式(5)는 l 上에서

$$\delta A = 0 \quad (6)$$

또는

$$\frac{\partial}{\partial n} A = 0 \quad (7)$$

이 成立하면 된다. 그런데 磁束線은 Magnetic Vector Potential A(x, y)의 값이 一定한 點을 連結한 線과 같으므로 前述한 바와 같이 그림 2의 l₁과 l₂上에서는 各各 一定한 既知 값을 갖게 함으로써 δA=0 即 式(6)을 滿足시키고 l₂와 l₄ 上에서는 磁束線이 面に 垂直이므로 $\frac{\partial}{\partial n} A = 0$ 即 式(7)이 滿足된다. 따라서 式(5)가 成立되어 汎函數 式(2)의 變分을 零으로 取하는 것과 주어진 偏微分方程式을 푸는 것은 等價이다.

4. 有限要素法の 適用

그림 3과 같이 解析하고자 하는 領域을 三角形要素로 나누면 式(2)는

$$\begin{aligned} I(A) &= \frac{1}{2} \iint_s \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} A \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} A \right)^2 \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \sum_p \iint_{s_p} \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} A \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} A \right)^2 \right] dx dy \\ &= \sum_p I_p(A) \end{aligned} \quad (8)$$

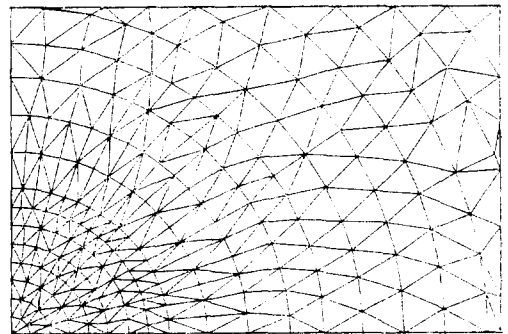


그림 3. 要素分解圖
Fig. 3. Element Meshes

와 같이 되고 그림 4같은 p번째 要素內에서의 Potential 값 A를 一次試驗函數(linear Trial Function)로 놓으면

$$\begin{aligned} A^*(x, y) &= \alpha + \beta x + \gamma y \\ &= (1, x, y) (\alpha, \beta, \gamma)^T \end{aligned} \quad (9)$$

로 表現되고 이를 다시 節點 i, j, k에서의 Potential 값 A_i^{*}, A_j^{*} 및 A_k^{*}로 表現하면

$$\begin{pmatrix} A_i^* \\ A_j^* \\ A_k^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, x_i, y_i \\ 1, x_j, y_j \\ 1, x_k, y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

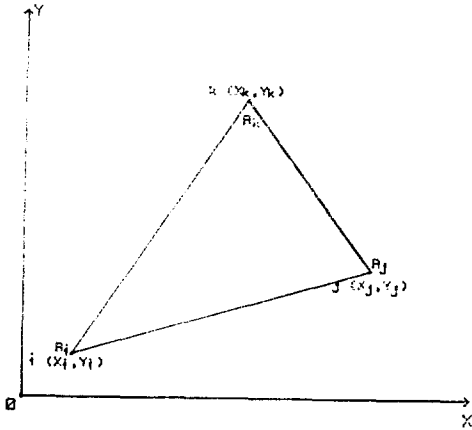


그림 4. p번째 要素
Fig. 4. p-th Element

$$(\alpha, \beta, \gamma)^T = N^{-1}(A_i^*, A_j^*, A_k^*)^T \quad (10)$$

가 되어 式(10)를 式(9)에 代入하면

$$A^*(x, y) = (1, x, y)N^{-1}(A_i^*, A_j^*, A_k^*)^T \quad (11)$$

를 얻을 수 있다. 여기서 要素의 3節點이 一直線에 있지 않으면 N^{-1} 는 반드시 存在한다. 그러므로 式(8)의 $I_p(A)$ 는 대략 $I_p(A^*)$ 로 놓을 수 있고 要素의 크기를 작게 함으로써 $I_p(A)$ 에 收斂시킬 수 있다.⁹⁾

$$I_p(A^*) = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_p} \iint_{s_p} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N^{-1}(A_i^*, A_j^*, A_k^*)^T \right]^2 dx dy$$

$$= \frac{1}{2} (A_i^*, A_j^*, A_k^*)^T \bar{E} (A_i^*, A_j^*, A_k^*)^T \quad (12)$$

여기서

$$\bar{E} = \frac{1}{\mu_p} \iint_{s_p} (N^{-1})^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} N^{-1} dx dy \quad (13)$$

이며 常數對稱 Matrix가 된다.⁹⁾

式(12)의 變分은

$$\frac{\partial I_p}{\partial A^*} = \bar{E} (A_i^*, A_j^*, A_k^*)^T \quad (14)$$

가 되며 Matrix \bar{E} 가 要素 Matrix가 된다. 이러한 Matrix들을 綜合함으로써 全 System Matrix \bar{S} 를 形成할 수 있으며

$$\frac{\partial I}{\partial A} = \bar{S} A = 0 \quad (15)$$

의 形態인 聯立方程式으로 된다. A 中 未知인 部分 A_1 과 既知인 部分 A_2 를 區分하여 式(15)를 다시 쓰면

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

와 같이 되는데 Matrix Partition에 依해

$$\bar{S}_{11} A_1 + \bar{S}_{12} A_2 = 0 \quad \text{即}$$

$$A_1 = -\bar{S}_{11}^{-1} \bar{S}_{12} A_2 \quad (16)$$

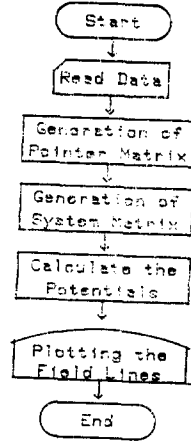


그림 5. 計算概要圖
Fig. 5. Flow Chart

로써 A_1 을 求할 수 있다.

이들을 求하기 爲한 Computer Program은 그림 5 Flow chart와 같고 이와 같은 式(15)의 System Matrix는 Sparsity가 強하기 때문에 零이 아닌 Matrix 要素만 記憶할 수 있게끔 Pointer Matrix¹⁰⁾와 함께 求하여 Computer의 使用 Memory 數를 大幅 줄일 수 있다. 그림 3은 235個의 節點, 423個의 要素로 分割된 것으로서 一般의 境遇로는 235×235個의 Memory 數를 必要로 하나 上記 方法에서는 235×9個 程度의 Memory 數만 使用되었다. 또 式(16)을 풀기 爲해서는 反復法으로서 現在까지 가장 有力한 定數로 알려진 緩和率 1.8¹⁰⁾을 使用한 過緩和法(Over Relaxation Method)¹¹⁾를 利用하였다.

5. 解析 結果 및 結論

計算에 使用된 Computer는 DATA GENERAL社의 M-600으로서 CPU時間 40秒가 所要되었다.

磁性體의 外徑에 對해 內徑이 1/2, disturbance가 없는 x -位置를 4배 程度로 하고 比透磁率을 1000으로 했을 때의 磁力線을 나타낸 것이 그림 6이고 그림 7은 磁性體 中心部의 Potential값을 角度에 따라 解析值(A¹⁾와 比較하여 그린 것이다. 또한 그림 8, 9, 10은 0°, 30° 및 60°인 線上에서 半徑에 對한 比較圖이다. 그림에서 보듯이 어느 境遇나 誤差는 작고 특히 內部 空氣部分의 Potential 값은 零으로서 微分値가 零이 되어 거의 完全히 遮斷됨을 알 수 있다.

結論的으로 本論文에서는

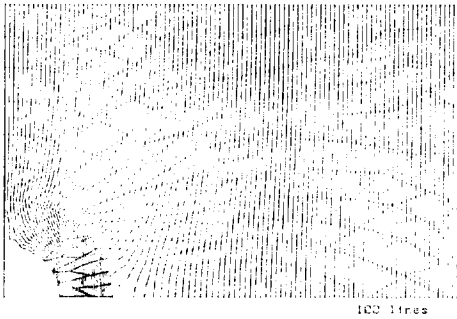


그림 6. 磁束線
Fig. 6. Magnetic Flux Lines

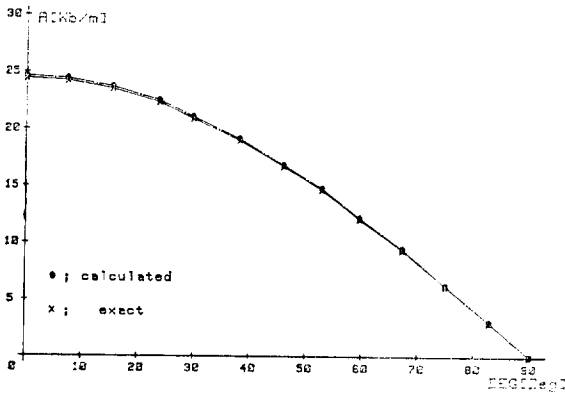


그림 7. 角度에 對한 比較圖
Fig. 7. Errors vs. Deg

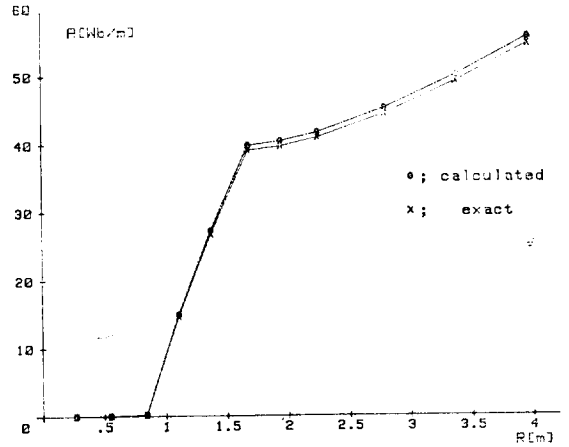


그림 9. 半徑에 對한 比較圖(30°때)
Fig. 9. Errors vs. Rad.(30[Deg])

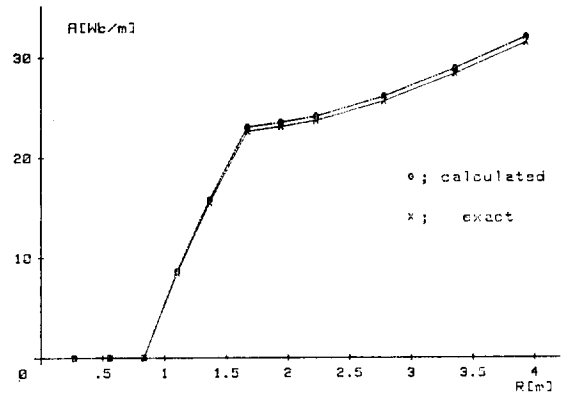


그림 10. 半徑에 對한 比較圖(60°때)
Fig. 10. Errors vs. Rad(60[Deg])

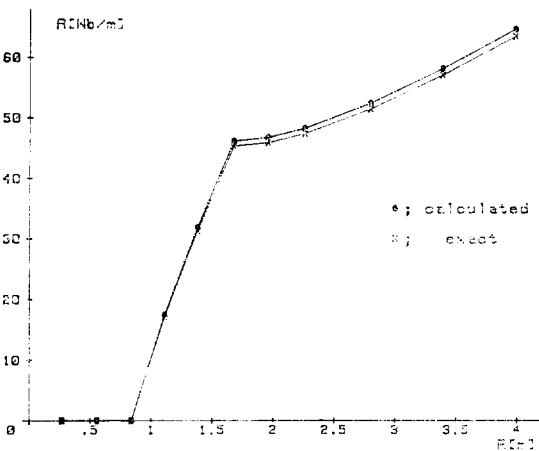


그림 8. 半徑에 對한 比較圖(0°때)
Fig. 8. Errors vs. Rad(0[Deg])

3) 解析値와의 誤差가 적음을 알 수 있어
有限要素法이 Poisson形의 偏微分方程式을 푸는 有力
한 手法임을 立證시켜 주고 있다. 그러나 非線形性,
Time dependent 및 三次元 問題를 解決하기에는 아
직도 많은 Program上的 課題가 남아 있다.

記 號

- A: 節點에서의 Potential Vector
- J: 電流密度 [A/m²]
- μ_r : 比透磁率
- μ : 透磁率 [H/m]
- A: Magnetic Vector Potential [Wb/m]
- n: 境界面の 法線方向 座標系

- 1) Memory容量^(A2)을 줄였다.
- 2) 靜磁界問題에서는 境界를 磁性體의 4倍크기로 하
면 充分하며

參 考 文 獻

1. G.A. Toombs; "Electrodynamics of Electrical Machines", U. of Nottingham, 1967
2. Hayt; "Electromagnetics for Engineers" Mc Graw Hill, pp.171~197
3. P.G. Akishin et. al; "Calculation of the Magnetic Field of the isochronous Cyclotron Sector Magnet by the Integral Equation Method" COMPUMAG 78 1.3, Grenoble, 1978
4. Kenneth H. Huebner; "The Finite Element Method for Engineers", G.M., pp.106~121, 1975
5. J. Simkin and C.W. Trowbridge; "A Comparison of the Various Scalar and Vector Potentials for the Numerical Solution of the Non-linear Poisson Problem" Rutherford Lab., pp.10~11, 1980
6. A.G. Armstrong; "The Solution of 3D Magnetic Problems Using Scalar Potential", COMPUMAG 78 1.2, Grenoble, 1978
7. Ancelbe B. et. al.; "An Improved Implementation of Boundary Integral Equation Method to Compute Two-Dimensional Magnetic Field", IEEE. Trans. on Magnetics, vol Mag-14. No. 5, Sep. 1978
8. Kenneth H. Huebner; "The Finite Element

Method for Engineers", G.M., p.79, 1975

9. 加川幸雄; "有限要素法入門", オーム社, p. 49, 1978
10. Ziekiewicz; "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc GRAW Hill, pp. 454~455, 1971
11. 涉谷政昭譯; "大型行列의 反復解法", 사이언스社, pp.88~113, 1979

附 錄

(A1) 變數分離法에 의한 解析과 境界條件을 適用함으로써

$$A_I = A_0 x \left(1 + \frac{(\mu_s^2 - 1) \{1 - (a/b)^2\}}{(\mu_s + 1)^2 - (\mu_s - 1)^2 (a/b)^2} \cdot \frac{b_z}{x^2 + y^2} \right)$$

$$A_{II} = A_0 x \frac{(\mu_s + 1) - (\mu_s - 1) \frac{a^2}{x^2 + y^2}}{(\mu_s + 1)^2 - (\mu_s - 1)^2 (a/b)^2} \cdot 2\mu_s$$

$$A_{III} = A_0 x \frac{4\mu_s}{(\mu_s + 1)^2 - (\mu_s - 1)^2 (a/b)^2}$$

와 같은 式을 導出할 수 있다.

(A2) 節點數가 n인 境遇의 System Matrix의 要素數는

i) 一般的으로 $n \times n$,

ii) 對稱性을 考慮했을때 $n(n+1)/2$,

iii) 이 論文의 경우 한個의 Node를 最大 8個의 Element가 共有하고 있다고 했을때 $n \times 9$ 個의 Memory數가 必要하다.

iii)의 境遇는 附加的으로 $n \times 9/2$ 및 $n/2$ 個가 必要하여 $n \times (9 + 9/2 + 1/2) = n \times 14$ 가 所要된다.