有限要素法에 의한 變壓器의 磁束分布 解析에 관한 硏究

論 文
29—4—1

Study on the Magnetic Flux Distribution of Transformer by the use of Finite Element Method

任 達 鎬*·玄 東 石**·李 喆 稷***
(Dal-Ho Im, Dong-Suk Hyun, Chul-Jik Lee)

Abstract

In this study, an application of Finite Element Method which, in principle, based on variational calculus has been presented for the two-dimensional analysis of magnetic flux distribution in the shell type core of single phase transformer.

The necessary stationarity condition of energy functional and boundary conditions were dete rmined under the assumptions that the electromagnenetic field considered is stationary and that the effect of eddy current is negligible.

In the process of application the domain of magnetic field was divided into triangle subsectional elements and then the matrix equations were constructed for the respective triangular element and for those of all after the manipulation of minimization process to the vector potential of magnetic field at the each vertex of the elements. Furthermore the numerical computation for the equations was guided by the Gaussian Elimination Methods.

As the results obtained, it is found that the aspect of magnetic flux distribution inside the core as well as the leakage flux profile at the vicinity of the inner leg of the core is not much different from the well-known distribution profile of magnetic flux, however, the procedure shows to possess the merit of the uniquely deterministic nature for the flux distribution at the desired points.

1. 序 論

有限要素法은 1950년대에 航空機의 機體强度를 計算하기 위하여 構造工學分野[1]에서 부터 발전한 것으로 현재에는 大容量 電子計算機의 출현과 더불어 以前에 不可能했던 복잡한 境界値問題들에 대한 數値解析도 可能하게 되었다.

이처럼 有限要素法에 의한 適用解析이 構造工學分野에서 상당한 진전을 가져옴에 따라 이와 유사한 偏微分方程式이 성립하는 他 科學技術分野에 까지도 이 方法이 적용되고 있다. 이러한 偏微分方程式은 連續媒體중의 현상을 나타내는 界方程式(field equation)[3]으로서 電氣工學分野에서는 Poisson, Laplace 및 Helmholtz의 方程式과 깊은 관계를 갖는다.

따라서 일반 電磁에너지變換機器의 電磁界特性解析에서는 1960년대 후반기부터 有限要素法을 이용한 Poisson方程式의 解法[4),5)]이 연구되기 시작하였고 그 結果가 종래의 解析方法인 等角寫像法, Graph法, 導電紙法, Analog法 및 差分法보다 만족스럽다는 것이 입증되어 오늘날의 고도한 解析技術發展에 기반을 이루게 되었다.

이러한 관점에서 本 硏究는 Poisson의 方程式에 기초를 두어 理論解析이 이루어지는 일반 電磁에너지變換機器의 일종인 變壓器의 磁束分布特性解析에[6)~9)] 有限要素法을 적용하였으며 그 解析結果는 일반적으로 알려져 있는 磁束分布樣相에 잘 符合되었다.

2. 有限要素法에 의한 適用理論

2—1. Maxwell 電磁方程式에 의한 基本式

* 正會員 : 漢陽大 工大 電氣工學科 敎授·工博
** 正會員 : 漢陽大 工大 電氣工學科 專任講師
*** 正會員 : 漢陽大 大學院 電氣工學科 卒
接受日字 : 1980年 1月 5日

變壓器의 磁束分布特性解析에 필요한 基本式을 誘導하기 위하여 다음과 같은 Maxwell方程式을 引用하였다.

$$\nabla \times H = J \tag{1}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{2}$$

$$B = \mu H \tag{3}$$

式 (3)에서 $\mu = \mu_0 \mu_s$이며 磁束密度 B와 Vector Potential A와의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$B = \nabla \times A \tag{4}$$

以上과 같은 관계식으로 부터 式 (1)은

$$\nabla \times H = \nabla \times \frac{1}{\mu} B = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A\right) = J \tag{5}$$

가 되며 여기에서 透磁率 μ가 일정하다고 보면 式 (5)는

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A\right) = \frac{1}{\mu}\{\nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A\} = J \tag{6}$$

와 같이 되고 定常狀態의 경우에 $\nabla \cdot A = 0$이므로 式(6)으로 부터 다음과 같은 式을 얻는다.

$$\nabla^2 A = -\mu J \tag{7}$$

여기에서 式 (7)은 電氣機器내에서의 磁界를 지배하는 方程式으로서 電磁界의 理論的解析을 위한 基本式이 된다.

2—2. 變分法과 Poisson의 方程式

電磁에너지變換機器의 磁界特性解析에 있어서 有限要素法의 適用時 變分法에 의한 解析을 하기 위하여 電磁界理論을 전개하는 경우에 몇가지의 條件을 假定하지 않으면 問題가 다소 복잡하게 되므로 解析結果考察에 지장을 주지않는 범위내에서 다음과 같은 假定을 두었다.

i) 電流密度 Vector J는 z軸 方向의 成分만을 갖는 것으로 한다.

ii) 電流導體에서의 渦流 및 表皮効果는 無視한다.

iii) 鐵心部는 有限 單一値의 透磁率과 導電率을 갖고 있으며 磁氣飽和는 無視한다.

iv) 磁界는 準正規狀態로서 變位電流는 없는 것으로 한다.

以上의 假定下에서 그림 1에서 보여주는 바와 같이 境界 Γ로 둘러싸인 $x-y$ 平面내의 領域 R내에서 電流密度 Vector J가 z방향의 成分만을 갖고 있다면 Vector Potential $A(X, Y)$는 $A_z(X, Y)$로서 z方向의 成分만을 갖게 되며 일반적으로 어떤 System의 에너지汎函數는 그 System에 관한 全體에너지를 나타내므로 다음과 같이 表示된다.

(全 Potential에너지)
=(內部에너지의 增加量)
−(外部에너지의 減少量)

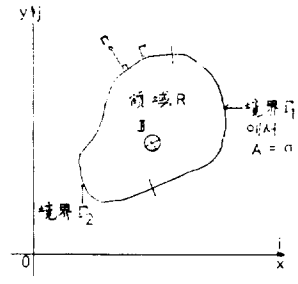

그림 1. 磁界의 領域과 境界
Fig. 1. Indication of the domain and boundary in magnetic field.

따라서 에너지汎函數는 어떤 System의 內部에서 하여진 일에서 그 System의 外部에서 공급된 일을 減한것에 해당한다고 볼수 있으므로 磁界에 관한 에너지汎函數는

$$\chi = \frac{1}{2}\iint_R \frac{1}{\mu} B^2 ds - \iint_R JA ds \tag{8}$$

와 같이 되며 여기에서 제 1 항은 領域 R내에서의 磁界에너지이며, 제 2 항은 外部에서 공급되는 에너지에 해당된다. 그런데 $\frac{1}{\mu} = \nu(B, x, y)$의 磁氣抵抗率은 位置와 磁束密度 B의 函數이며, 磁束密度 B도 非線型으로서 $B = B(\nu, x, y)$인 函數가 되므로 電氣機器내에서의 磁界만을 다루는 경우에 있어 非線型에너지 汎函數는 다음과 같이 주어진다.

$$\chi = \iint_R \left(\int_0^B \nu b db - JA\right) dx dy \tag{9}$$

여기에서 $f = \int_0^B \nu b db - JA$라고 놓으면 式 (9)는

$$\chi = \iint_R f dx dy$$

처럼 간단히 쓰여진다. 여기에서 $f = (A, A_x, A_y, x, y)$인 函數가 되며 $A_x = \frac{\partial A}{\partial x}$, $A_y = \frac{\partial A}{\partial y}$이다. 따라서 $\chi = \iint_R f(A, A_x, A_y, x, y) dx dy$의 停留條件과 自然境界條件을 구하기 위하여 變分을 취해 零으로 놓으면

$$\begin{aligned}\delta\chi &= \iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial A_x}\frac{\partial \delta A}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial A_y}\frac{\partial \delta A}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial A}\delta A\right) dx dy \\ &= -\iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial A_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial A_y}\right) - \frac{\partial f}{\partial A}\right] \delta A dx dy \\ &\quad + \iint_\Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial A_x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial A_y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) \delta A dx dy \\ &= 0\end{aligned} \tag{11}$$

으로 되며 여기에서 n는 境界에서 外部로 향한 法線成分(Normal Component)이다.

그러므로 式 (11)로 부터 停留條件은 領域 R에서

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial A_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial A_y}\right) - \frac{\partial f}{\partial A} = 0 \tag{12}$$

이며, 自然境界條件은 境界 Γ_2에서

$$\frac{\partial f}{\partial A_x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial f}{\partial A_y}\frac{\partial y}{\partial n}=0 \tag{13}$$

로 주어진다. 또한 外部로 부터 印加된 일이 境界 Γ_1에서 規定된다고 하면 $\delta A=0$에서 $A=a$가 되며 여기에서 a는 境界 Γ_1에 주어진 A의 값이다. 그러므로 $f=\int_0^B \nu b dB-JA$를 式 (12)에 代入하여 정리하면

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial y}\right)=-J \tag{14}$$

와 같은 非線型 Poisson方程式을 얻는다.

여기에서 磁氣抵抗率 ν를 飽和狀態以前에서는 일정하다고 볼수 있으므로 式 (14)는

$$\nu\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)=J \tag{15}$$

로 되여 線型 Poisson方程式이 된다. 마찬가지로 式 (13)에 $f=\int_0^B \nu b dB$를 대입하여 정리하면

$$\nu\frac{\partial A}{\partial n}=0$$

와 같이 되며 이것은 境界 Γ_2에서의 自然境界條件式을 나타낸다.

以上에서와 같이 2次元 領域에서 생각한 電磁界내의 에너지汎函數의 停留條件으로 부터 準調和方程式이라 볼수있는 非線型 Poisson方程式과 線型 Poisson 方程式을 誘導하였다.

2—3. 에너지汎函數의 最小化條件式과 有限要素方程式

解析하고자 하는 磁界領域을 그림 2와 같이 三角形要素로 分割하여 各 頂點座標값을 $i(X_i, Y_i)$, $j(X_j, Y_j)$, k (X_k, Y_k)로 하였다.

그림과 같은 三角形要素내의 任意點(x, y)에서의 Vector Potential을 1次 試驗函數로 나타내면

$$A=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y \tag{17}$$

와 같다. 따라서 三角形의 各 頂點 i, j, k에서의 頂點 Vector Potential A_i, A_j, A_k는

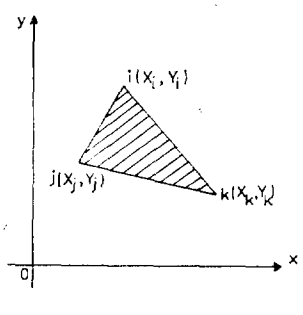

그림 2. 三角形要素
Fig. 2. Triangular element.

$$\left.\begin{aligned} A_i&=\alpha_1+\alpha_2 X_i+\alpha_3 Y_i\\ A_j&=\alpha_1+\alpha_2 X_j+\alpha_3 Y_j\\ A_k&=\alpha_1+\alpha_2 X_k+\alpha_3 Y_k \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

로 되며 式 (18)을 行列로 바꾸어 쓰면 다음과 같다

$$\begin{bmatrix} A_i\\ A_j\\ A_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i\\ 1 & X_j & Y_j\\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{19}$$

따라서 式 (19)를 1次 試驗函數의 係數에 관해서 정리하면

$$\begin{bmatrix} \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha^3 \end{bmatrix}=\frac{1}{2\Delta_e}\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k\\ b_i & b_j & b_k\\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_i\\ A_j\\ A_k \end{bmatrix} \tag{20}$$

와 같이 되며 여기에서 Δ_e는 三角形 要素의 面積으로서

$$\Delta_e=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i\\ 1 & X_j & Y_j\\ 1 & X_k & Y_k \end{bmatrix}$$

와 같고 $a_i, a_j, a_k\cdots$等은 三角形要素의 各 頂點 座標값에 의하여 決定되는 幾何學的常數로서 各各 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_i&=X_jY_k-X_kY_j & b_i&=Y_k-Y_i\\ a_j&=X_kY_i-X_iY_k & b_k&=Y_i-Y_j\\ a_k&=X_iY_j-X_jY_i & c_i&=X_k-X_j\\ b_i&=Y_j-Y_k & c_j&=X_i-X_k\\ & & c_k&=X_j-X_i \end{aligned} \tag{21}$$

한편 式 (20)으로 부터 1次 試驗函數에 대한 係數 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$를 各各 구하면

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1&=\frac{1}{2\Delta_e}(a_iA_i+a_jA_j+a_kA_k)\\ \alpha_2&=\frac{1}{2\Delta_e}(b_iA_i+b_jA_j+b_kA_k)\\ \alpha_3&=\frac{1}{2\Delta_e}(c_iA_i+c_jA_j+c_kA_k) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

로 주어지며 式 (22)를 式 (17)에 대입하여 정리하면 三角形要素내의 任意點(x, y)에서의 Vector Potential A는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} A=\frac{1}{2\Delta_e}\{&(a_i+b_ix+c_iy)A_i+(a_j+b_jx+c_jy)A_j\\ &+(a_k+b_kx+c_ky)A_k\} \end{aligned} \tag{23}$$

이와같이 1次 試驗函數로 近似化시켜준 Vector Potential A로 부터 에너지汎函數의 最小化條件式은 各 三角形要素의 頂點 Vector Potential에 관한 에너지汎函數의 1次 偏微分을 零으로 놓으므로서 구하여진다. 即

$$\sum_{q=i}^{k}\frac{\partial \chi}{\partial A_q}=0 \tag{24}$$

그러므로 式 (8)의 에너지汎函數를 $\sum_{q=i}^{k}\frac{\partial\chi}{\partial A_q}$에 대입하면 다음과 같다.

$$\sum_{q=i}^{k}\frac{\partial\chi}{\partial A_q}=\sum_{q=i}^{k}\frac{\partial}{\partial A_q}\left\{\iint_R\left(\int_0^B\nu bdb\right)dxdy-\iint_R JAdxdy\right\} \tag{25}$$

여기에서 飽和狀態以前에 있어서는 ν를 일정하다고 보아 線型化시킬수 있으므로 $|B|=\sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2}$을 式 (25)에 대입하여 정리하면

$$\sum_{q=i}^{k}\frac{\partial\chi}{\partial A_q}=\sum_{q=i}^{k}\left[\nu\iint_R\left\{\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial}{\partial A_q}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial}{\partial A_q}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right\}dxdy-\iint_R J\frac{\partial A}{\partial A_q}dxdy\right] \tag{26}$$

와 같이 된다.

따라서 式 (22)을 式 (25)에 대입하여 정리한 후에 에너지汎函數의 最小化條件式을 적용하면

$$\sum_{q=i}^{k}\frac{\nu}{4\Delta_e^2}\iint_R\sum_{i}^{k}(b_ib_qA_q+c_ic_qA_q)dxdy=\frac{J}{2\Delta_e}\iint_R\sum_{i}^{k}(a_i+b_ix+c_iy)dxdy \tag{27}$$

로 되며 여기에 三角形의 面積要素에 대한 성질을 바탕으로 하고 있는 面積座標系(附錄A 參照)를 사용하여 式 (27)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{q=i}^{k}\frac{\nu}{4\Delta_e}\sum_{i}^{k}(b_ib_q+c_ic_q)A_q=\sum_{i}^{k}J\frac{A_e}{3} \tag{28}$$

그러므로 式 (28)은 다음과 같이 하나의 三角形要素에 대한 要素 matrix方程式으로 쓰여진다.

$$\frac{\nu}{4\Delta_e}\begin{bmatrix}(b_ib_i+c_ic_i) & (b_ib_j+c_ic_j) & (b_ib_k+c_ic_k)\\ (b_jb_i+c_jc_i) & (b_jb_j+c_jc_j) & (b_jb_k+c_jc_k)\\ (b_kb_i+c_kc_i) & (b_kb_j+c_kc_j) & (b_kb_k+c_kc_k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_i\\A_j\\A_k\end{bmatrix}=\frac{J\Delta_e}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{29}$$

따라서 이와같은 要素 matrix方程式을 解析하고자 하는 磁界領域의 各 三角形 要素에 적용하여 이들로부터 全體 matrix方程式(附錄 B 參照)을 構成하면

$$[S][A]=[R] \tag{30}$$

과 같은 線型聯立方程式이 된다.

여기에서 $[S]$와 $[R]$는 各 三角形要素의 頂點座標값 要素의 媒質常數 및 電流密度에 의하여 計算되는 常數 matrix이며 또한 $[A]$는 구하고자하는 各 節點의 Vector Potential로 이루어진 列 Vector 이다. 即

$[S]$: $n\times n$의 常數 matrix

$[A]$: $n\times 1$의 節點 Vector Potential

$[R]$: $n\times 1$의 常數 matrix

n : 節點數

3. 有限要素法理論에 의한 數値計算

理論式結果의 數値計算處理를 위하여 그림3과 같은 電流導體의 電流密度가 $J_s=1\times10^6$[A/m^2], 比透磁率이 $\mu_s=1.8\times10^4$[H/m]인 單相外鐵型變壓器로 2次側이 無負荷인 경우에 있어 1次 試驗函數를 사용하여 鐵心의 磁束分布 및 鐵心內部空間의 漏洩磁束分布特性을 考察하고자 幾何學的 對稱性을 고려한 週期條件에 의하여 그림 4에서 보여주는 바와 같이 變壓器의 $\frac{1}{4}$에 해당하는 領域만을 생각하여 脚鐵과 繼鐵의 接合部에 상당하는 領域과 右側繼鐵의 上部에 상당하는 領域은 磁束密度의 分布가 복잡하게 될것으로 예상되어 特히 要素分割을 미세하게 하였다. 그리고 境界條件으로는 幾何學的 對稱性을 고려하여 Y 軸上에서 $\frac{\partial A_z}{\partial y}=0$, $X=10$[cm]인 直線上에서 $-\frac{\partial A_z}{\partial y}=0$, $Y=10$[cm]인 直線上에서 $\frac{\partial A_z}{\partial x}=0$로 하였다.

以上의 境界條件하에서 式 (29)를 사용하여 節點數 112, 要素數 182인 三角形要素에 대하여 各 要素 matrix方程式을 구하고 이들로 부터 式 (30)과 같은 全體 matrix方程式을 構成하였으며, 本 計算을 위한 數値解析過程에서는 Gauss 消去法을 사용하였다. 그리고 이에 따른 計算 Program의 槪要는 그림 5에서 보여주는 바와 같으며 여기에 사용된 電子計算機는 FACOM OSIV/F$_4$이다.

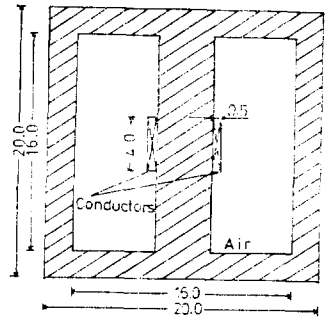

그림 3. 單相外鐵型變壓器

Fig. 3. Sectional view of single phase transformer with shell type core.

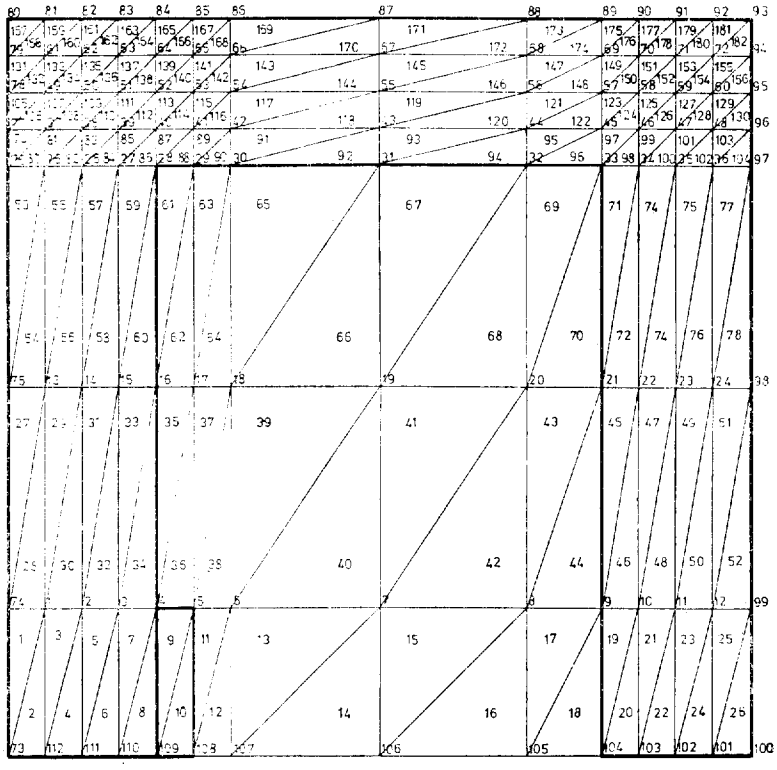

그림 4. 三角形要素分割
Fig. 4. Subdivision of triangular elements

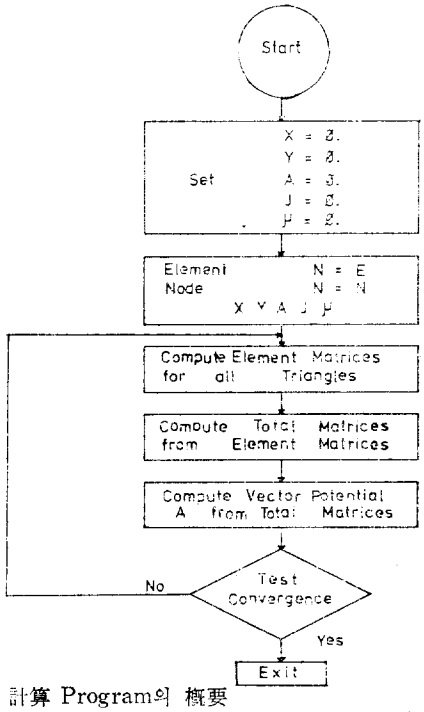

그림 5. 計算 Program의 槪要
Fig. 5. Outline of the programing in this analysis.

4. 解析結果의 考察

有限要素法을 적용한 變壓器의 磁束分布特性에 관한 解析結果(附錄C 參照)는 그림 6과 같으며 電流導體가 감겨져 있는 脚鐵部의 VectorPotential A는 $x=1$ [cm]에서 y가 0.0, 2.0, 5.0, 8.0[cm]로 變化함에 따라 各各 239.2, 238.9, 237.3, 209.2[wb/m]의 값을 가지며 또한 右側 繼鐵部의 Vector Potential A도 $x=9$[cm]에서 y가 0.0, 2.0, 5.0, 8.0[cm]로 變化함에 따라 各各 238.7, 238.6, 237.2, 209.5[wb/m]의 값을 갖는다.

따라서 이러한 結果値는 $x=1$[cm]와 $x=9$[cm]에서 y값의 變化에 따라 各各 脚鐵과 繼鐵部分에서 거의 일직선에 가까운 等 Potential line이 생기는 것을 알수 있게 해주며 이러한 Potential line이 곧 磁束線이 되므로 그림에서 보여주는 바와 같은 磁束分布現象은 우리가 일반적으로 예측할 수 있는 分布現象에 잘 符合되는 結果라 볼수 있다. 特히 左側上端의 脚鐵과 繼鐵의 接合部와 右側上端의 繼鐵接合部에서의 磁

束線은 各各 鐵心의 外部 및 內部쪽으로 휘었으며 脚鐵의 上端에서 右側繼鐵의 上端에 이르는 繼鐵部의 磁束線은 左側上部에서 右側下部쪽으로 약간의 傾斜를 갖는 分布를 나타내었다.

이러한 現象은 우리가 대체로 생각하는 바 처럼 均一化되어 分布된다고 보는 관점과는 다소 다른 現象이라 볼수 있으며 鐵心內部空間의 漏洩磁束分布는 그림에서 보여주는 바와 같이 電流導體의 上部로 부터 漏洩磁束線이 發生하였음을 알 수 있었다.

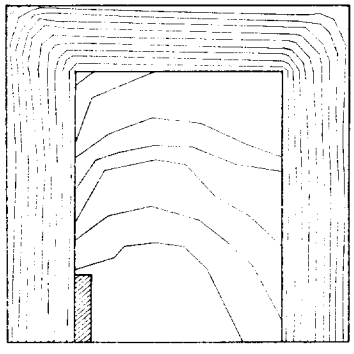

그림 6. 變壓器의 磁束分布
Fig. 6. Plottng of magnetic flux distribution in transformer.

5. 結　論

2次側이 無負荷로 되어있는 單相外鐵型變壓器에 있어서 不飽和狀態에 대한 鐵心의 磁束分布와 漏洩磁束分布特性을 究明하고자 Poisson의 方程式에 基礎를 두어 有限要素法에 의한 理論式을 誘導하였으며, 이를 주어진 磁界領域에 適用하여 解析한 結果로서의 磁束分布樣相은 그림 6에서 보여주는 바와 같다.

理論的 解析結果의 考察에 의하면 脚鐵部와 繼鐵部의 磁束分布 및 鐵心內部空間의 漏洩磁束分布現象은 一般的으로 예측할 수 있는 分布現象에 잘 符合되는 結果라 볼 수 있었으며 特히 嚴密하게 解析하고자 하는 領域에서의 磁束分布樣相은 詳細하게 一義的으로 決定할 수 있었다.

이와 같이 本 硏究에서는 變壓器의 2次側이 無負荷인 경우에 不飽和狀態에 대한 鐵心의 磁束分布와 漏洩磁束分布特性을 解析考察하였으나 실제상 變壓器나 回轉機의 磁界特性解析에 있어서는 非線型 磁氣特性에 관한 諸般問題가 發生되므로 좀더 精度높은 解析結果를 얻기 위해 鐵心의 飽和狀態를 考慮하여 解析해야할 必要性이 있게 된다.

따라서 一般 電磁에너지 變換機器의 設計上 基礎資料가 되는 磁界特性을 解析함에 있어서는 반드시 非線型 磁氣特性을 考慮해야 하는 問題高이 앞으로의 硏究課題로 남아있음을 附言하여 둔다.

記　號

H : 磁界의 세기〔AT/m〕
B : 磁束密度〔Wb/m²〕
J : 電流密度〔A/m²〕
μ_0 : 空氣중의 透磁率〔H/m〕
μ_s : 比透磁率〔H/m〕
χ : 에너지汎函數
b : 磁束密度 B의 被積分變數
n : 法線方向의 成分
A : Vector Potential〔Wb/m〕
A_i, A_j, A_k : 三角形要素의 各 頂點 Vector Potential
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: 1次 試驗函數의 係數
ξ_i, ξ_j, ξ_k : 面積座標系의 變數

參 考 文 獻

1) O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, 1971.
2) K.J. Bathe and E.L. Wilson, "Numerical Method in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, 1976.
3) 大地羊三, "有限要素法とその應用", 森北出版株式會社, 1975.
4) P. Silvester and M.V.K. Chari, "Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems" IEEE Trans. Vol.PAS-89, pp.1642～1652, 1970.
5) P. Silvester and M.V.K. Chari, "Finite Element Analysis of Magnetically Saturated D.C. Machines" IEEE Trans. PAS-89, pp. 2362～2372, 1971.
6) O.C. Zienkiewicz, John Lyness and D.R.J. Owen, "Three-Dimensional Magnetic Field Determination Using a Scalar Potential-A Finite Element Solution" IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-13, No.5, pp.1649～1656, 1977.
7) O.W. Anderson, "Transformer Leakage Flux Program Based on the Finite Element Method" IEEE Trans. Vol.PAS-92, pp.682～689, 1973.

8) M.V.K. Chari, "Finite Element Solution of Eddy Current Problems in Magnetic Structures" IEEE Trans. Vol.PAS-93, pp.62~72, 1974.

9) Alan M. Winslow, "Magnetic Field Calculations in an Irregular Triangle Mesh" UCRL-7784-T, Lawrence Radiation Laboratory (Livermore, California), pp.1~35, August 1965.

附 錄(Appendix)

A. 面積座標系

그림7에 表示한 바와 같이 三角形要素 e의 內點을 $Q(x, y)$라고 하면 $Q(x, y)$는 要素를 面積 S_i, S_j, S_k인 3개의 三角形으로 分割한다.

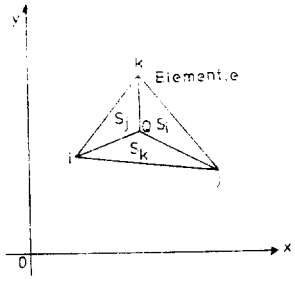

그림 7. $x-y$座標系의 三角形要素e
Fig.7. e (trian ular element)on $x-y$ coordinates.

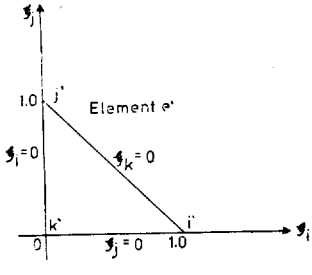

그림 8. 面積座標系의 三角形要素e'
Fig.8. e' (triangular element)on area coordinates.

그러므로 要素 e의 面積을 Δ_e라고 하면

$$\Delta_e=S_i+S_j+S_k \qquad \text{A-(1)}$$

와 같고, 式 A-(1)의 양변을 Δ_e로 나누어 주면 다음과 같다.

$$1=\frac{S_i}{\Delta_e}+\frac{S_j}{\Delta_e}+\frac{S_k}{\Delta_e}=\xi_i+\xi_j+\xi_k \qquad \text{A-(2)}$$

그러므로 $x-y$ 座標系에서의 變數 x, y는 그림 8의 面積座標系에서의 變數 ξ_1, ξ_2, ξ_3와 對應關係가 되며 이와 같은 對應關係를 行列式으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\xi_i\\ \xi_j\\ \xi_k\end{bmatrix}=\frac{1}{2\Delta_e}\begin{bmatrix}a_i & b_i & c_i\\ a_j & b_j & c_j\\ a_k & b_k & c_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ x\\ y\end{bmatrix} \qquad \text{A-(3)}$$

여기서 a_i, b_i, c_i 等은 三角形要素의 各 頂點座標값을 $i(X_i, Y_i)$, $j(X_j, Y_j)$, $k(X_k, Y_k)$로 할때 일의적으로 決定되는 幾何學的 常數로서 式 (21)로 주어진다.

따라서 式 A-(3)을 ξ_i, ξ_j, ξ_k에 관해서 다시 쓰면

$$\xi_i=\frac{S_i}{\Delta_e}=\frac{a_i+b_ix+c_iy}{2\Delta_e}$$

$$\xi_j=\frac{S_j}{\Delta_e}=\frac{a_j+b_jx+c_jy}{2\Delta_e}$$

$$\xi_k=\frac{S_k}{\Delta_e}=\frac{a_k+b_kx+c_ky}{2\Delta_e}$$

그러므로

$$dxdy=2\Delta_e d\xi_i d\xi_j$$

$$\int_R ds=\iint_R dxdy=2\Delta_e\iint_R d\xi_i d\xi_j$$

따라서 三角形要素 e에 대한 一般式으로 積分式을 나타내면 다음과 같다.

$$\iint_e \xi_i^l\xi_j^m\xi_k^n dxdy=2\Delta_e\iint_e \xi_i^l\xi_j^m\xi_k^n d\xi_i d\xi_j$$

$$=\frac{2\Delta_e l!m!n!}{(M+2)!} \qquad \text{A-(4)}$$

여기서 $M=l+m+n$이다.

B. 要素 matrix方程式의 組合過程

各 三角形要素에 대한 要素 matrix方程式의 組合過程을 說明하는 한 例로서 그림 9와 같은 三角形要素를 생각하기로 한다.

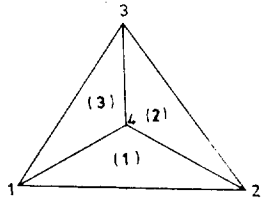

그림 9. 三角形要素
Fig .9. The three triangular elements related to a point in a triangle.

頂點 i, j, k로 이루어진 要素 matrix 方程式(式 12 參照)은

$$\begin{bmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ij} & \alpha_{ik} \\ \alpha_{ji} & \alpha_{jj} & \alpha_{jk} \\ \alpha_{ki} & \alpha_{kj} & \alpha_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^e \\ R^e \\ R^e \end{bmatrix} \qquad \text{B-(1)}$$

와 같이 주어진다.

따라서 式 B-(1)을 그림과 같은 三角形要素에 各各 適用하면 그 組合過程은 다음과 같다.

Step 1) 各 要素 matrix 方程式의 構成

Element No(1)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{44}^{(1)} & \alpha_{41}^{(1)} & \alpha_{42}^{(1)} \\ \alpha_{14}^{(1)} & \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} \\ \alpha_{24}^{(1)} & \alpha_{21}^{(1)} & \alpha_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{(1)} \\ R^{(1)} \\ R^{(1)} \end{pmatrix} \qquad \text{B-(2)}$$

Element No (2)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{44}^{(2)} & \alpha_{42}^{(2)} & \alpha_{43}^{(2)} \\ \alpha_{24}^{(2)} & \alpha_{22}^{(2)} & \alpha_{23}^{(2)} \\ \alpha_{34}^{(2)} & \alpha_{32}^{(2)} & \alpha_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{(2)} \\ R^{(2)} \\ R^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \text{B-(3)}$$

Element No (3)

$$\begin{pmatrix} \alpha_{44}^{(3)} & \alpha_{43}^{(3)} & \alpha_{41}^{(3)} \\ \alpha_{34}^{(3)} & \alpha_{33}^{(3)} & \alpha_{31}^{(3)} \\ \alpha_{14}^{(3)} & \alpha_{13}^{(3)} & \alpha_{11}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4 \\ A_3 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{(3)} \\ R^{(3)} \\ R^{(3)} \end{pmatrix} \qquad \text{B-(4)}$$

Step 2) 全體 matrix方程式의 組合

以上의 各 要素 matrix方程式으로 부터 全體 matrix方程式을 組合하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} R^{(1)}+R^{(3)} \\ R^{(1)}+R^{(2)} \\ R^{(2)}+R^{(3)} \\ R^{(1)}+R^{(2)}+R^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)}+\alpha_{11}^{(3)} & \alpha_{12}^{(1)} & \alpha_{13}^{(3)} & \alpha_{14}^{(1)}+\alpha_{14}^{(3)} \\ \alpha_{21}^{(1)} & \alpha_{22}^{(1)}+\alpha_{22}^{(2)} & \alpha_{23}^{(2)} & \alpha_{24}^{(1)}+\alpha_{24}^{(2)} \\ \alpha_{31}^{(3)} & \alpha_{32}^{(2)} & \alpha_{33}^{(2)}+\alpha_{33}^{(3)} & \alpha_{34}^{(2)}+\alpha_{34}^{(3)} \\ \alpha_{41}^{(1)}+\alpha_{41}^{(3)} & \alpha_{42}^{(1)}+\alpha_{42}^{(2)} & \alpha_{43}^{(2)}+\alpha_{43}^{(3)} & \alpha_{44}^{(1)}+\alpha_{44}^{(2)}+\alpha_{44}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \qquad \text{B-(5)}$$

C. Computer에 의한 解析結果

```
**********************************
SOLUTION OF POISSON EQUATION
**********************************
```

NUM.	X		POTENTIAL
1	0.500E+00	0.0	0.11955376E+03
2	0.100E+01	0.0	0.23919298+03
3	0.150E+01	0.0	0.35888128+03
4	0.200E+01	0.0	0.47885193E+03
5	0.250E+01	0.0	0.47936389E+03
6	0.200E+01	0.0	0.47816338+03
7	0.300E+01	0.0	0.47769198+03
8	0.700E+01	0.0	0.47745148+03
9	0.800E+01	0.0	0.47738498+03
10	0.900E+01	0.0	0.35502378+03
11	0.950E+01	0.0	0.23867358+03
12	0.975E+01	0.0	0.11923358+03
13	0.500E+00	0.200E+01	0.11944468+03
14	0.100E+01	0.200E+01	0.23892248+03
15	0.150E+01	0.200E+01	0.35944198+03
16	0.200E+01	0.200E+01	0.47769128+03
17	0.250E+01	0.200E+01	0.47790518+03
18	0.300E+01	0.200E+01	0.47788098+03
19	0.500E+01	0.200E+01	0.47757598+03
20	0.700E+01	0.200E+01	0.47735118+03
21	0.800E+01	0.200E+01	0.47731918+03
22	0.850E+01	0.200E+01	0.35793708+03
23	0.900E+01	0.200E+01	0.23853068+03
24	0.950E+01	0.200E+01	0.11928028+03
25	0.500E+00	0.500E+01	0.11874508+03
26	0.100E+01	0.500E+01	0.23730198+03
27	0.150E+01	0.500E+01	0.35569108+03
28	0.200E+01	0.500E+01	0.47728128+03
29	0.250E+01	0.500E+01	0.47723248+03
30	0.300E+01	0.500E+01	0.47724228+03
31	0.500E+01	0.500E+01	0.47719698+03
32	0.700E+01	0.500E+01	0.47710118+03
33	0.800E+01	0.500E+01	0.47704968+03
34	0.850E+01	0.500E+01	0.35479308+03
35	0.900E+01	0.500E+01	0.23782208+03
36	0.950E+01	0.500E+01	0.11939508+03
37	0.500E+00	0.800E+01	0.11815368+03
38	0.100E+01	0.800E+01	0.23691628+03
39	0.150E+01	0.800E+01	0.35540218+03
40	0.200E+01	0.800E+01	0.47362428+03
41	0.250E+01	0.800E+01	0.47693868+03
42	0.300E+01	0.800E+01	0.47690998+03

43	0.500E+01	0.800E+01	0.4769302E+03
44	0.700E+01	0.800E+01	0.4763445E+03
45	0.800E+01	0.800E+01	0.4767700E+03
46	0.850E+01	0.800E+01	0.3307512E+03
47	0.900E+01	0.800E+01	0.2094913E+03
48	0.950E+01	0.800E+01	0.1017222E+03
49	0.500E+00	0.850E+01	0.7742967E+02
50	0.100E+01	0.850E+01	0.1567745E+03
51	0.150E+01	0.850E+01	0.2378062E+03
52	0.200E+01	0.850E+01	0.3119633E+03
53	0.250E+01	0.850E+01	0.3394622E+03
54	0.300E+01	0.850E+01	0.3515220E+03
55	0.500E+01	0.850E+01	0.3566101E+03
56	0.700E+01	0.850E+01	0.3506765E+03
57	0.800E+01	0.850E+01	0.3163110E+03
58	0.850E+01	0.850E+01	0.2397530E+03
59	0.900E+01	0.850E+01	0.1576494E+03
60	0.950E+01	0.850E+01	0.7778374E+02
61	0.500E+00	0.900E+01	0.5140613E+02
62	0.100E+01	0.900E+01	0.1027035E+03
63	0.150E+01	0.900E+01	0.1520747E+03
64	0.200E+01	0.900E+01	0.1937541E+03
65	0.250E+01	0.900E+01	0.2174701E+03
66	0.300E+01	0.900E+01	0.2304437E+03
67	0.500E+01	0.900E+01	0.2369751E+03
68	0.700E+01	0.900E+01	0.2296553E+03
69	0.800E+01	0.900E+01	0.1969347E+03
70	0.850E+01	0.900E+01	0.1537990E+03
71	0.900E+01	0.900E+01	0.1035566E+03
72	0.950E+01	0.900E+01	0.5176355E+02
73	0.500E+00	0.950E+01	0.2549066E+02
74	0.100E+01	0.950E+01	0.5055631E+02
75	0.150E+01	0.950E+01	0.7403381E+02
76	0.200E+01	0.950E+01	0.9350145E+02
77	0.250E+01	0.950E+01	0.1062179E+03
78	0.300E+01	0.950E+01	0.1139000E+03
79	0.500E+01	0.950E+01	0.1182045E+03
80	0.700E+01	0.950E+01	0.1134763E+03
81	0.800E+01	0.950E+01	0.9490640E+02
82	0.850E+01	0.950E+01	0.7493930E+02
83	0.900E+01	0.950E+01	0.5105238E+02
84	0.950E+01	0.950E+01	0.2570304E+02
85	0.0	0.0	0.0
86	0.0	0.200E+01	0.0
87	0.0	0.500E+01	0.0
88	0.0	0.800E+01	0.0
89	0.0	0.850E+01	0.0
90	0.0	0.900E+01	0.0
91	0.0	0.950E+01	0.0
92	0.0	0.100E+02	0.0
93	0.500E+00	0.100E+02	0.0
94	0.100E+01	0.100E+02	0.0
95	0.150E+01	0.100E+02	0.0
96	0.200E+01	0.100E+02	0.0
97	0.250E+01	0.100E+02	0.0
98	0.300E+01	0.100E+02	0.0
99	0.500E+01	0.100E+02	0.0
100	0.700E+01	0.100E+02	0.0
101	0.800E+01	0.100E+02	0.0
102	0.850E+01	0.100E+02	0.0
103	0.900E+01	0.100E+02	0.0
104	0.950E+01	0.100E+02	0.0
105	0.100E+02	0.100E+02	0.0
106	0.100E+02	0.950E+01	0.0
107	0.100E+02	0.900E+01	0.0
108	0.100E+02	0.850E+01	0.0
109	0.100E+02	0.800E+01	0.0
110	0.100E+02	0.500E+01	0.0
111	0.100E+02	0.200E+01	0.0
112	0.100E+02	0.0	0.0