<論 文>

圓孔이 있는 有限 直交異方性 Graphite/E Laminate의 應力集中係數

洪 昌 善*

(1980年 5月 20日 接受)

Stress Concentration Factors for Finite Orthotropic Graphite/E Laminates with a Circular Hole

C. S. Hong

Abstract

Stresses were calculated for finite-width orthotropic laminates with a circular hole and remote uniaxial loading using a two-dimensional finite-element analysis with both uniform stress and uniform displacement boundary conditions. Five different laminates were analyzed: quasi-isotropic $[0°/\pm45°/90°]_s$, $0°, 90°$, $[0°/90°]_s$, and $[\pm45°]_s$. Computed results are presented for selected combinations of hole diameter—sheet-width ratio d/w and length-to-width ratio L/w. For small L/w values, the stress-concentration factors K_{tn} were significantly different for the uniform stress and uniform displacement boundary conditions. Typically, for the uniform stress condition, the K_{tn} values were much larger than for the infinite-strip reference condition; however, for the uniform displacement condition, they were only slighty smaller than for this reference.

The results for long strips are also presented as width-correction factors. For $d/w \leqq 0.33$, these width-correction factors are nearly equal for all five laminates.

기호 설명

d 圓孔의 直徑, m
E_{xx} x-方向의 탄성계수, MP_a
E_{yy} y-方向의 탄성계수, MP_a
G_{xy} 전단계수, MP_a
K_{tg} 총단면 응력집중계수, $(\sigma_{\theta\theta})_{max}/S_g$
K_{tn} 순단면 응력집중계수 $(\sigma_{\theta\theta})_{max}/S_n$
K_∞ 무한판 응력집중계수
L 평판의 길이, m
R 圓孔의 半徑, m
S_g 총단면 공칭응력
S_n 순단면 공칭응력
w 평판의 폭, m
ν_{xy} Poisson 비
$\sigma_{\theta\theta}$ θ-方向의 응력성분, MP_a

* 正會員, 韓國科學院 航空工學科

1. 序 論

실제 구조물에는 많은 圓孔이 있으며, 그 圓孔주위에 應力集中이 생긴다는 것은 잘 알려진 사실이다. 圓孔주위에 생기는 응력상태를 특정지을 때 보통 應力集中係數를 사용한다. 無限板에 圓孔이 있는 문제를 일찌기 Kirsch[1]가 보고한 이래 학문적으로는 물론 실제적인 문제로서 많은 관심의 대상이 되었다. 그러나 Kirsch의 解는 圓孔이 있는 等方性이고 無限板인 경우에 제한되고 있다. 실제구조물은 Kirsch가 가정하듯이 無限板이 아닌 有限인 경우가 많으며 그 解는 경우에 따라 상당한 차이를 보여주고 있다. 금속재료의

경우에는 有限이고 等方性인 평판에 圓孔이있는 應力集中係數에 대한 자료를 문헌으로부터 구할 수 있다.[2] 최근에 複合材料의 利點이 관심을 끌고 있으며 그 應用이 증대됨에 따라 直交異方性材料에 대한 연구및 자료가 요청되고 있다. 그러나 複合材料에 관한 有限平板의 應力集中係數는 잘 알려져 있지 않다. 다만 直交異方性인 無限平板에 圓孔이 있는 경우는 문헌으로 부터 구할 수 있다.[3] 길이가 無限이고 幅이 有限인 等方性板의 문제는 Howland[4]가 보고하였다. 平板의 幅에 비하여 圓孔의 直徑이 매우 큰 극단적인 경우는 Koiter[5]가 보고하였다.

본 논문의 목적은 直交異方性인 複合材料에 圓孔이 있을 경우에 생기는 應力集中係數를 여러가지 변수, 즉 圓孔의 直徑, 平板의 幅및 길이, 섬유 방향에 따른 전형적인 積層, 그리고 두가지 서로 다른 경계조건인 균일한 응력및 균일한 변위를 가해지는 경우를 有限要素法을 이용하여 구하였다.

2. 理論解 및 應力集中係數

直交異方性板에 圓孔이 있는 無限板일 경우의 應力集中係數는 다음과 같다.[3]

$$K_{\infty}=1+\sqrt{\frac{E_{xx}}{G_{xy}}-2\nu_{xy}+2\sqrt{\frac{E_{xx}}{E_{yy}}}} \tag{1}$$

여기서 E_{xx}, E_{yy}는 x 및 y방향의 탄성계 수이고, G_{xy}는 전단계수, ν_{xy}는 Poissow比이다. 윗식으로부터 等方性일 경우에는 $K_{\infty}=3$이 됨을 알 수 있으며, Kirsch[1]의 解와 일치함을 볼 수 있다.

혼동을 피하기 위하여 먼저 應力集中係數에 대한 용어부터 정의하도록 한다. 無限板의 경우와는 달리 有限板인 경우에는 應力集中係數를 두가지로 표시할 수 있는데 그 하나는

$$K_{tg}=(\sigma_{\theta\theta})_{max}/S_g \tag{2}$$

여기서 K_{tg}는 총단면應力集中係數이고, 최대접선응력 $(\sigma_{\theta\theta})_{max}$을 총단면공칭응력($S_g$)으로 나눈 값이다. 이에 반해서 순단면應力集中係數 K_{tn}은 다음과 같다.

$$K_{tn}=(\sigma_{\theta\theta})_{max}/S_n \tag{3}$$

여기서 S_n은 圓孔을 뺀 순단면응력이다. 따라서 순단면응력과 총단면응력과의 관계는

$$S_n=S_g w/(w-d) \tag{4}$$

또한 K_{tn}과 K_{tg}의 관계는

$$K_{tn}=K_{tg}(1-d/w) \tag{5}$$

이며, 無限板인 경우는 幅w에 비해 圓孔直徑 d가 매우 작으므로, 즉 $d<w$,

$$K_{tn}=K_{tg}=K_{\infty} \tag{6}$$

윗식으로부터 無限板인 경우에는 K_{tn}과 K_{tg}의 구별이 없어짐을 볼 수 있다.

3. 有限要素 應力解析

본연구에서 다루고 있는 일반적인 문제를 그림 1에 보였다. 圓孔直徑과 板의 幅比 d/w와 板의 길이와 幅

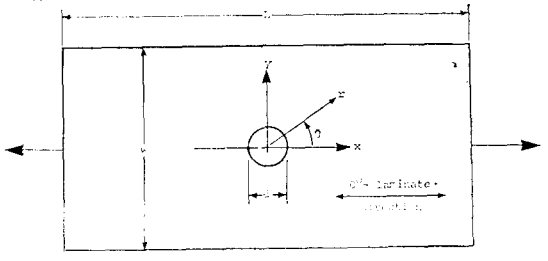
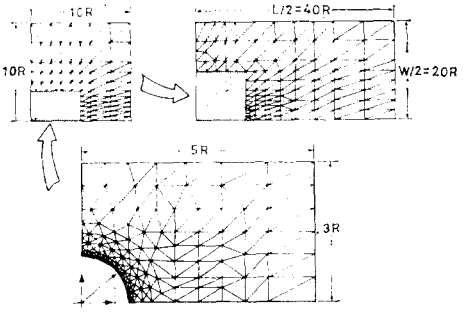
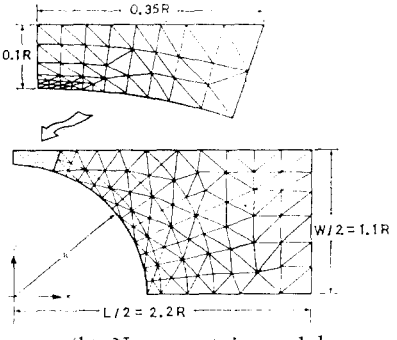


Fig. 1. Sheet conriguration and loading.

比 L/w를 골고루 선택하여 無限과 有限板의 두 극단적인 경우를 광범위하게 다루었다. 즉 $0.05\leq d/w\leq 0.91$의 범위에서 일곱개의 d/w를, L/w는 1,2 및 10을 택하였다. 圓孔直徑은 일정하게 두고 L 및 w를변경하여 사용하였다.



(a) Wide-sheel model.



(b) Narrow-strip model.

Fig. 2. Finite-element models.

그림 2는 본연구에 사용한 有限要素模型이다. 그림 2(a)는 圓孔直徑에 비하여 板의 길이 및 幅이 큰 경우에 사용한 模型이고 그림 2(b)는 圓孔直徑이 매우 큰, 즉 $d/w=0.91$, 경우를 위해 특별히 要素가 조밀하게 이루어진 模型이다. 그림 2(a) 模型의 외각을 적절히 삭제해 나감으로서 여러가지의 d/w 및 L/w값을 이용할 수 있다. 세가지 종류의 三角形要素를 사용하였으며, 圓孔주위에는 심한 應力集中이 예상됨으로 線形스트레인(6-node) 要素를 사용하고 나머지 부분은 均一스트레인(3-node) 要素를 사용하였다. 線形스트레인要素로부터 均一스트레인으로의 천이구역은 혼성要素(4 혹은 5-node)를 사용하여 應力이나 스트레인이 급격히 변하는 부분으로 부터 완만히 변하는 구역을 연결시키도록 하였다.

본 연구에서 사용한 有限要素法은 三角形要素를 節點이 3, 4, 5 및 6인 要素를 섞어서 사용한 것으로 節點이 6인 것으로부터 3인 경우에까지 적용하는 경위를 약술하고자 한다. 變位 u 및 v를 area 좌표 ω_1, ω_2 및 ω_3로 나타내면 다음과 같다.

$$u=\omega_1(2\omega_1-1)u_1+\omega_2(2\omega_2-1)u_2+\omega_3(2\omega_3-1)u_3 +4\omega_2\omega_3u_4+4\omega_3\omega_1u_5+4\omega_1\omega_2u_6 \quad (7)$$

여기서 項 $u_i(i=1-6)$는 節點變位를 나타내며, area 좌표를 local x, y 좌표로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{vmatrix} x_2y_3-x_3y_2 & y_2-y_3 & x_3-x_2\\ {}_3y_1-x_1y_3 & y_3-y_1 & x_1-x_3\\ x_1y_2-x_2y_1 & y_1-y_2 & x_2-x_1\end{vmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ x\\ y\end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서 A=삼각형 면적이다.

위와 마찬가지 방법으로 變位 v도 나타낼 수 있다. 式(7)은 좌표변수 x 및 y에 대한 2차多項式을 나타내며 6-節點要素에 해당된다. 3-節點要素의 變位를 나타내는 線形多項式은 式(7)에 다음과 같은 조건을 가함으로서 얻을 수 있다.

$$u_4=\frac{1}{2}(u_2+u_3);\quad u_5=\frac{1}{2}(u_3+u_1);\quad u_6=\frac{1}{2}(u_1+u_2) \quad (9)$$

혼성要素(4, 5-node)를 위해선 위의 조건중 어느하나 혹은 두개의 조건을 가함으로써 4-節點이나 5-節點要素의 變位를 구할수 있다. 일단 各節點에 대한 變位를 구한 후, 미분하여 스트레인을 구하고, modulus matrix를 사용하여 應力을 구하고 만일 각 lamina의 應力을 구하려면 modulus matrix를 각 lamina의 성유방향에 따른 좌표변환을 하여 구하도록 한다. 본연구에서 다룬 바와 같은 圓孔이 있는 구조는 $x-y$ 좌표보다는 극좌표성분으로 應力을 표시하는 것이 해석에 편리함으로 마지막으로 극좌표변환을 수행하면 된다.

*** 1. Table Ⅰ.** Laminate constants.

Laminate	Ellastic constants			
	E_{xx}, MPa	E_{yy}, MPa	G_{xy}, MPa	ν_{xy}
Quasi-isotropic $[0°/\pm45°/90°]_s$	57,890	57,890	22,090	0.310
0°	146,900	10,890	6,412	0.380
90°	10,890	146,900	6,412	0.028
$[0°/90°]_s$	79,500	79,500	6,412	0.052
$[\pm45°]_s$	22,250	22.250	37,770	0.735

본연구에서 사용된 複合材料는 Grapbite/Epoxy로서 그 재료상수 및 섬유 방향을 표 Ⅰ에 표시하였다. 섬유방향이 0°인 단층(lamina)의 성질을 이용하여 여러가지 섬유방향으로 이루어진 積層(laminate)의 재료상수를 구하였다. 섬유방향이 $[0°\pm45°/90°]_s$인 積層을 準等方性(quasi-isotropic)이라 부르고 있지만, 평면응력상태에서는 모든 等方性조건을 만족함으로 문헌에 있는 等方性 解와 그 결과를 비교하였다.

두가지 다른 경계하중을 각각 적용하여 有限한 平板의 應力集中係數를 구하였다. 즉 첫번째 경계하중으로서 x-축에 균일한 인장응력을 주었고, 두번째론 균일한 변위를 주었다. 비교하기 위하여 각 경우의 圓孔주위를 국부응력을 순단면 공칭응력(S_n)으로 나누어 無次元으로 표시하였다.

4. 結果 및 檢討

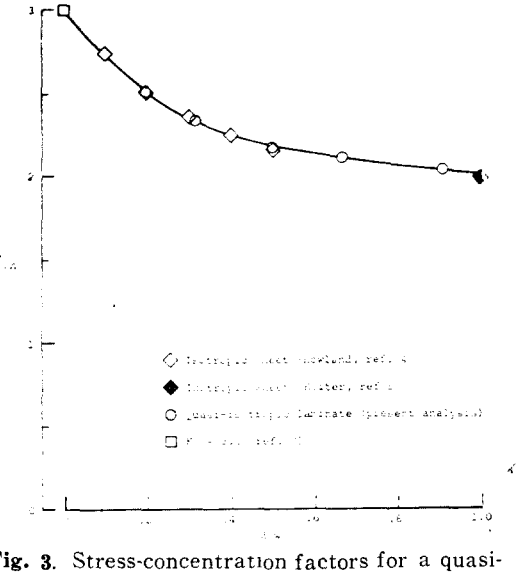


Fig. 3. Stress-concentration factors for a quasi-isotropic laminate with a circular hole and uniform stress boundary condition: $L/w=10$.

準等方性이고 $L/w=10$인 경우의 K_{tn}을 d/w에 대하여 그림 3에 보였다. 다른 문헌[3-5]에 나타난 결과와 비교하기 위하여 그림 3에 함께 표시하였으며, 본연구 결과와 전 有限幅의 범위에 걸쳐 잘 일치하고 있으며, $K_\infty=3$인 값에 잘 수렴함을 볼 수 있다.

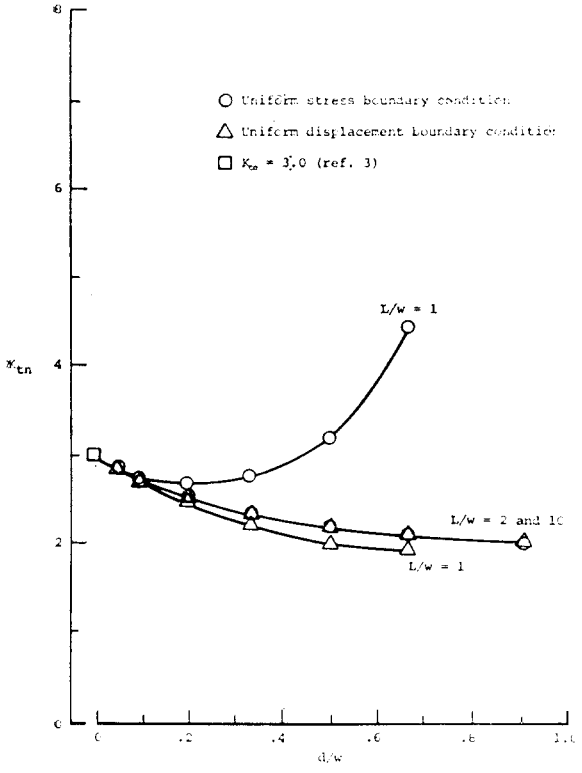


Fig. 4. Stress-concentration factors for a quasi-isotropic laminate with a circular hole.

그림 4는 傳等方性에 대한 모든 K_{tn}을 보여주고 있으며, 균일 응력과 균일변위의 경계조건을 함께 표시하였다.

균일응력일 경우에는 K_{tn}이 L/w에 더욱 미감하게 변함을 볼 수 있으며, $L/w<2$일 경우에는 균일변위를 주었을 때보다 K_{tn}이 훨씬 크게 나타난다. $L/w\geqq2$일 경우에는 경계조건이 균일응력이나 균일 변위에 관계없이 동일하다.

그림 5는 0°단층판의 K_{tn}을 표시하고 있다. $L/w=0$일 경우에는 경계조건에 관계없이 K_{tn}이 동일하다. 따라서 $L/w=10$인 경우는 길이가 無限인 경우로 가정할

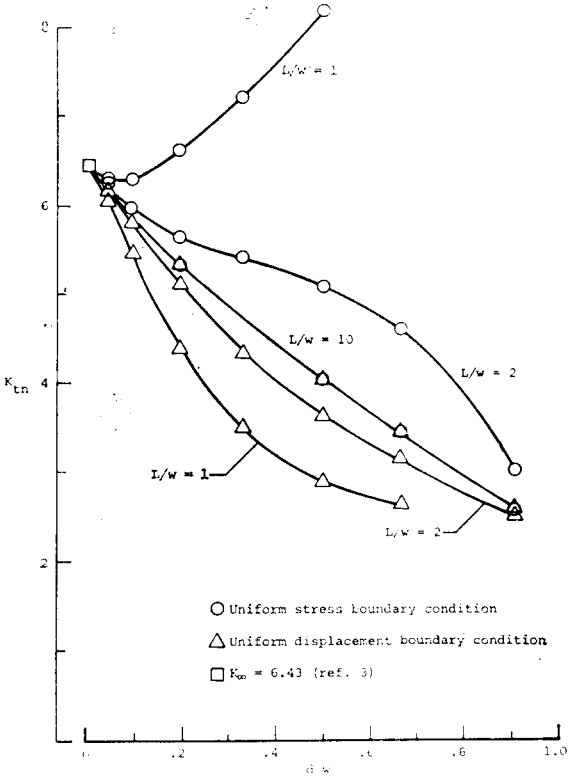


Fig. 5. Stress-concentration factors for a 0° laminate with a circular hole.

수 있다. $L/w=1$과 2인 경우에는 균일응력과 균일 변위의 경계조건이 매우 다른 K_{tn}을 꺼이고 있으며, 傳等方性보다 그 차이가 매우 크다. 섬유방향이 0°인 경우는 異方性을 가장 심하게 나타내는 경우로서 圓孔주위의 應力구배도 매우 심하기 때문에 有限要素模型의 정밀도를 점검하기 위해 사용하였다. 응력분포현상은 참고문헌[6]에 표시하였다. $L/w=10$이고 $d/w=0.05$인 경우에 식(5)를 이용하여 K_{tn}으로부터 K_{tg}를 구하고, 균일변위와 균일응력조건의 K_{tg} 값 6.471 및 6.517을 각각 구하였다. 이 결과는 Lekhnitskii의 방법인 식(1)로 구한 $K_\infty=6.43$과 비교하여 각각 0.6% 및 1.3%가 크다.

그림 6은 섬유방향이 90°인 경우의 K_{tn}이며, d/w의 영향이 가장 적은 예이다. 그림 7은 $[0°/90°]_s$의 K_{tn}이며, 그 경향은 0°와 90°의 평균치에 해당한다.

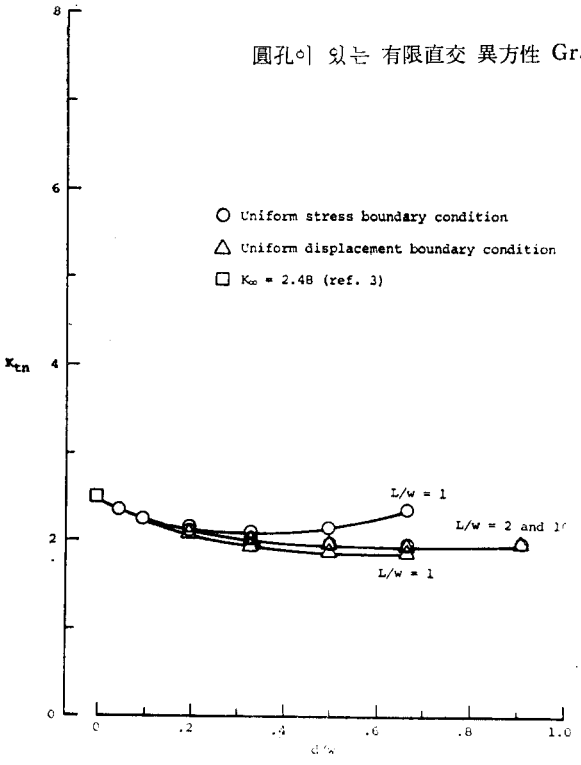


Fig. 6. Stress-concentration factors for a 90° laminate with a circular hole.

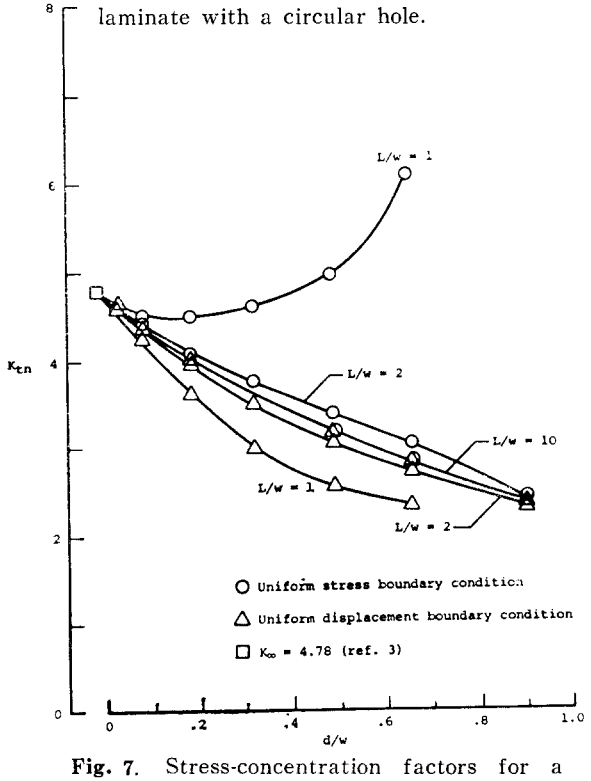


Fig. 7. Stress-concentration factors for a $[0°/90°]_s$ laminate with a circular hole.

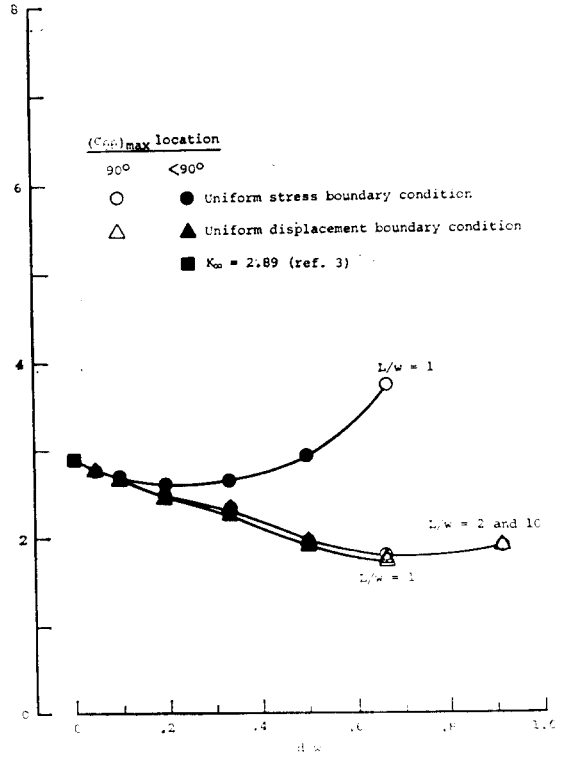


Fig. 8. Stress-concentration factors for a $[\pm 45°]_s$ laminate with a circular hole.

그림 8은 〔±45°〕$_s$積層의 K_{tn}이며, 앞서 보인 결과와 좀 다른 현상이 있다. 〔±45°〕$_s$에서는 $d/w \leq 0.5$일 경우에 $(\sigma_{\theta\theta})_{max}$이 θ=60° 근처에서 발생하고 있으며, $d/w > 0.5$일 경우엔 θ=90°에서 $(\sigma_{\theta\theta})_{max}$이 존재한다〔문헌 6〕. 따라서 $(\sigma_{\theta\theta})_{max}$의 위치가 d/w에 따라 변함으로 좀 특이한 K_{tn}곡선을 보이고 있으며, $L/w=1$인 경우를 보면 균일변위의 경계조건이 균일응력 경계조건보다 無限板의 결과에 더 잘 접근하고 있음을 볼 수 있다.

그림 9는 有限幅이고 길이는 無限인 경우의 각 複合積層을 비교하기 위하여 표시하였다. $d/w=0$ 일 경우에 K_{tn} 값은 2.48부터 6.43에 이르고 있음을 等方性인 경우의 3과 비교하여 흥미로운 현상이다. 그러나 $d/w=1$인 극단적인 경우를 보면 모든 값이 매우 좁은 범위 즉 1.9로부터 2.3사이에 수렴함을 볼 수 있다. 그럼으로부터 0°인 경우엔 d/w의 영향을 가장 많이 받고 있음을 알 수 있다.

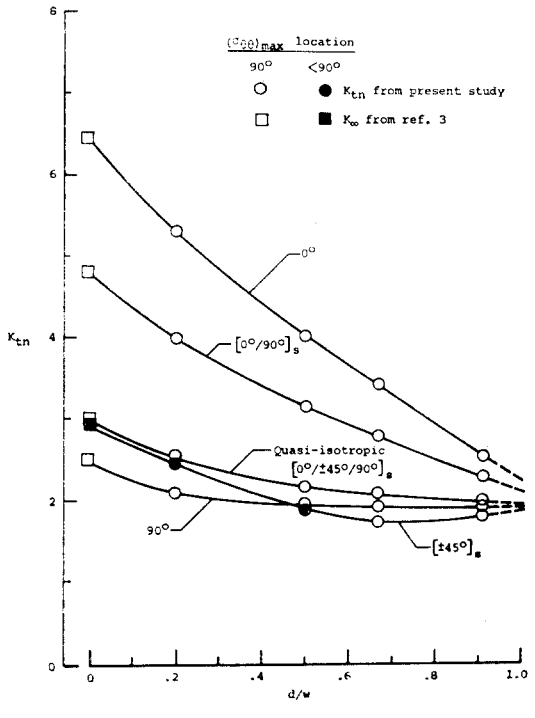


Fig. 9. Stress-concentration factors for orthotropic laminates with a circular hole and uniform stress boundary condition; $L/w=10$.

參 考 文 獻

1. S. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1970.
2. R.E. Peteson, *Stress Concentration Factors*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
3. S.G. Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. Holden-Day, Inc. (San Francisco), 1963.
4. R.C.J. Howland: On the Stresses in the Neighbourhood of a Circular Hole in a Strip Under Tension. Philos. Trnas. R. Soc. London, ser. A Vol. 229, Jan. 6, 1930, pp. 49-86.
5. W.T. Koiter,: An Elementary Solution of Two Stress Conceutration Problems in the Neighbourhood of a Hole. Appl. Math. Vol. XV, No. 3, Oct. 1957, pp. 303-308.
6. C. S. Hong and J. H. Crews, Jr., "Stress Concentration Factors for Finite Orthotropic Laminates with a Circular Hole and Uniaxial Loading", NASA TP-1469, May 1979.