極小 Energy 定理와 그 應用(Ⅰ)

梁 源 鎬
〈成均館大 工大 敎授〉

1. 머 리 말

彈性學問題의 嚴密解는 應力의 平衡方程式과 變形의 適合條件式 또는 이들을 組合한 彈性의 基礎方程式을 滿足하며, 주어진 境界條件을 滿足하는 解를 求해야 하겠지만, 問題에 따라서는 그 嚴密解를 求하기가 困難하거나 또는 아주 複雜하므로 嚴密解에 가까운 近似解를 求하는 것이 便利할 때가 있다.

本講座에서는 極小 energy 定理와 ritz의 近似計算法을 結合하여 彈性問題의 近似解를 求하는 方法을 說明하고자 한다. 講座의 처음에는 三次元에서의 變形 energy와 外力의 일(work)을 유도하고, 이들 사이의 關係로부터 一般極小 energy 定理를 定義한 다음 이 定理가 實際問題에 어떻게 應用될 수 있는가를 보이는 應用例를 主로하여 進行해 보려한다. 이때의 應用例로서는 材料力學에서 이미 눈에 익은 基礎的인 問題를 主로 다루어 보려한다.

材料力學에서의 彈性問題의 解는 靜定인 問題와 不靜定인 問題를 따로 分類하며, 不靜定인 問題의 解는 靜力學의 平衡方程式과 變形의 適合方程式을 連立으로 하여 解決하든가, 중첩법을 적용하므로서 一般的으로 상당히 複雜한 解가 되는 것이 보통인데, 本講座에서 記述하는 方法은 靜定, 不靜定의 問題를 區別할 必要가 없이 같은 方法이 적용되며 어떤 面에서는 不靜定의 問題가 靜定의 問題보다 그 解가 簡便히 求해질 수 있다는 長點이 있는 것이다.

2. 彈性變形 energy

物體(彈性體)에 外力이 作用하면 그 外力의 作用點도 彈性體의 變形에 따라 移動하게 되므로 作用外力은 일(work)을 하게되며, 이 일을 外力일(external work)이라하는데, 이 外力일은 物體의 變形에 依한 內力일(internal work)로서 物體內에 저장되게 된다. 外力에 依한 應力이 材料의 彈性限度 以下일 때에는 物體에 彈性變形이 일어나며, 이때 物體內에 저장되는 일량을 彈性變形 energy (elastic strain energy) 또는 간단히 變形 energy (strain energy)라하고, 物體를 元狀態로 되돌릴때 (外力을 除去하여 變形을 消滅시킬 때) 外部에 대하여 일을 하게된다. 例를 들면 空氣총의 spring을 壓縮할 때 spring의 壓縮力은 일(外力일)을 하게되며 이 일은 spring 內에 變形 energy 로 저장되게 되고, 방아쇠를 당겨 spring을 元狀態로 되돌릴

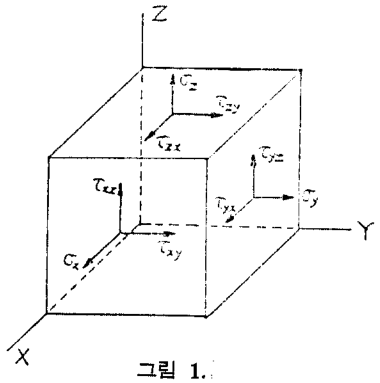


그림 1.

때 spring의 變形 energy는 탄환을 날려보내는 外部일의 형태로 나타나게 된다.

그림 1은 外力을 받고 있는 어떤 物體中에 各邊의 길이가 dx, dy, dz인 微小六面體要素를 생각한 것이다. 이 微小六面體의 表面에 그림과 같은 應力들이 作用하여 彈性變形率 $\varepsilon_x, \cdots, \gamma_{xy}\cdots$를 일으켰을 때의 變形 energy 를 구해 보기로 한다.

x-軸에 垂直한 面(x面)에 作用하는 垂直應力 σ_x의 合力 $\sigma_x dydz$에 대하여 邊 dx에 發生하는 變形量은 $dx\cdot\varepsilon_x$이나, 이 값에 도달하기 까지의 微小變形量을 $dx\cdot d\varepsilon_x$ 라하면 이 微小變形에 따른 σ_x가 한 일은, dv를 微小六面體의 體積이라할 때

$$\sigma_x dydz\times dxd\varepsilon_x=\sigma_x d\varepsilon_x dxdydz=\sigma_x\cdot d\varepsilon_x dV$$

이고, 最後의 變形量인 $dx\cdot\varepsilon_x$에 도달할 때까지의 일량은 $dv\int_0^{\varepsilon x}\sigma_x\cdot d\varepsilon_x$ 로 表示된다. 또 y 面上에서 x-軸方向으로 作用하는 剪斷應力 τ_{yx} (및 이것의 共軛剪斷應力 τ_{xy})가 剪斷變形率 γ_{xy}를 일으킬 때의 일은 $\tau_{xy}dxdz\times dy\cdot d\gamma_{xy}$의 總和인 $dV\int_0^{\gamma xy}\tau_{xy}\cdot d\gamma_{xy}$ 로 주어진다. 같은 方法으로 모든 應力과 變形率들에 依한 微小六面體의 總變形 energy는

$$d\overline{U}=dV\int(\sigma_x\cdot d\varepsilon_x+\sigma_y\cdot d\varepsilon_y+\sigma_z\cdot d\varepsilon_z+\tau_{xy}\cdot d\gamma_{xy}+\tau_{yz}\cdot d\gamma_{yz}+\tau_{zx}\cdot d\gamma_{zx}) \tag{1}$$

이고, 이 六面體單位體積當의 變形 energy U는

$$U=\int(\sigma_x\cdot d\varepsilon_x+\sigma_y\cdot d\varepsilon_y+\sigma_z\cdot d\varepsilon_z+\tau_{xy}\cdot d\gamma_{xy}+\tau_{yz}\cdot d\gamma_{yz}+\tau_{zx}\cdot d\gamma_{zx}) \tag{2}$$

이며, 物體全體의 變形 energy $\overline{U}$ 는

$$\overline{U}=\int_v UdV \tag{3}$$

로 表示된다.

式(2)의 積分을 수행하기 위하여, E를 物體의 young 率, ν를 poisson의 比, G를 剛性係數라 할 때,

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}\{\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\}\\[2mm] \varepsilon_y=\dfrac{1}{E}\{\sigma_y-\nu(\sigma_z+\sigma_x)\}\\[2mm] \varepsilon_z=\dfrac{1}{E}\{\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\}\end{cases} \tag{4}$$

의 關係로부터 σ_x, σ_y, σ_z를 구하여

$$\begin{cases}\sigma_x=2G\left(\varepsilon_x+\dfrac{\nu e}{1-2\nu}\right)\\[2mm] \sigma_y=2G\left(\varepsilon_y+\dfrac{\nu e}{1-2\nu}\right)\\[2mm] \sigma_z=2G\left(\varepsilon_z+\dfrac{\nu e}{1-2\nu}\right)\end{cases} \tag{5}$$

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z,\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

와

$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy},\quad \tau_{yz}=G\gamma_{yz},\quad \tau_{zx}=G\gamma_{zx} \tag{6}$$

를 式(2)에 代入하고 $d\varepsilon_x+d\varepsilon_y+d\varepsilon_z=de$ 를 쓰면

$$U=2G\int\left(\varepsilon_x\cdot d\varepsilon_x+\varepsilon_y\cdot d\varepsilon_y+\varepsilon_z\cdot d\varepsilon_z+\frac{\nu e}{1-2\nu}de\right)+G\int(\gamma_{xy}\cdot d\gamma_{xy}+\gamma_{yz}\cdot d\gamma_{yz}+\gamma_{zx}\cdot d\gamma_{zx})$$

즉

$$U=G\left\{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2+\frac{\nu e^2}{1-2\nu}+\frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)\right\} \tag{7}$$

로 表示되며, 式(7)에 式(5)와 式(6)을 代入하여 整理하면

$$U=\frac{1}{2E}\{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\}+\frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2) \tag{8}$$

으로써 應力項만으로 表示 될 수 있다. 또 式(7)에

$$\varepsilon_x^2=\frac{\varepsilon_x}{E}\{\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\},\ \cdots,\ \gamma_{xy}^2=\frac{\gamma_{xy}\tau_{xy}}{G}\cdots$$

및 $e^2=(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\dfrac{(1-2\nu)}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$

를 代入하여 整理하면

$$U=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_y\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}) \tag{9}$$

의 形으로 表示할 수도 있다.

따라서 物體單位體積當의 變形 energy의 一般式은 式 (7), (8), (9)의 形으로 各各表示할 수 있으며, 주어진 問題의 性質에 따라 適當한 것을 선택하여 使用 할 수가 있다.

3. 假想일의 理原

物體에 作用하는 힘이 平衡狀態에 있을 때에

는 物體의 假想的微小變位에 대하여 이들 힘이 한 일의 總和는 0이 된다는 것이 一般力學에서 증명되어 있다. 즉 力系의 x-, y-, z-, 成分을 各各 X_i, Y_i, Z_i, 라 할 때 平衡力系에서는 分明히

$$\sum X_i=0,\quad \sum Y_i=0,\quad \sum Z_i=0$$

이고, 假想變位의 x-, y-, z- 成分을 各各 δu, δv, δw라 할 때 力系가 假想變位에 의하여 이룬 일은 各各

$$\delta u\cdot\sum X_i=0,\quad \delta v\cdot\sum Y_i=0,\quad \delta u\cdot\sum Z_i=0$$

를 滿足할 것이므로 假想일의 總和는 0이 되며, 이것을 假想일의 原理(principle of virtual work)라 한다.

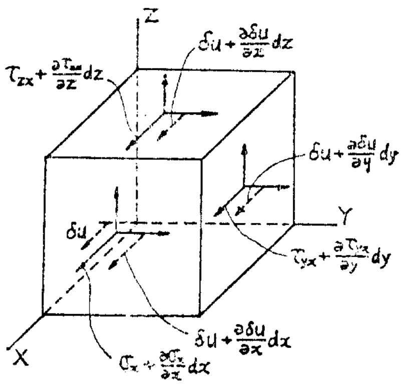
이 假想일의 原理를 彈性體에 適用하면, 平衡狀態에 있는 힘을 外力과 內力으로 나누고 外力이한 假想일을 δW, 內力이 한 일을 $\delta W'$라 할때

$$\delta W+\delta W'=0 \tag{10}$$

의 關係로 나타낼 수 있다.

平衡狀態에 있는 彈性體內의 一點 P에서 그림 2와 같은 微小直六面體要素를 생각할 때, 이 要素에 대한 外力은 六面體表面에 作用하는 表面力(應力)과 그 體積에 作用하는 體積力(重力, 慣性力, 磁力等)이며 內力은 六面體 內部에 나타나는 힘이된다.

이 微小要素에 任意假想變位를 일으켰을 때 要素內部의 힘이 한 일은 要素의 外力이 한 일과 絶對値가 같고 符號가 反對이다.



그 림 2.

그림 2에서 微小六面體의 表面에 作用하는 應力成分中 x 方向으로 作用하는 것은, x 面上의 σ_x 및 $(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx)$, y 面上의 τ_{yx} 및 $(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy)$, Z面上의 τ_{zx} 및 $(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz)$와 體積力의 x-成分 X (單位體積當)가 있다. P點에 주어진 假想變位의 x-, y-, z-成分을 各各 δu, δv, δw 라하면 P點에서 各各 dx, dy, dz만큼 떠러진 正의 x, y, z 面의 變位는 各各 $(\delta u+\frac{\partial\delta u}{\partial x}dx)$, $(\delta v+\frac{\partial\delta v}{\partial y}dy)$, $(\delta w+\frac{\partial\delta w}{\partial z}dz)$일 것이므로 外力이 한 總假想일은

$$\begin{aligned}
\delta W=&\Big[\Big\{\Big(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\Big)\Big(\delta u+\frac{\partial\delta u}{\partial x}dx\Big)dydz\\
&-\sigma_x\cdot\delta u dydz\Big\}+\Big\{\Big(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\Big)\Big(\delta u\\
&+\frac{\partial\delta u}{\partial y}dy\Big)dzdx-\tau_{yx}\cdot\delta u\ dzdx\Big\}\\
&+\Big\{\Big(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\Big)\Big(\delta u+\frac{\partial\delta u}{\partial z}dz\Big)\ dxdy\\
&-\tau_{zx}\cdot\delta u\cdot dxdy\Big\}\Big]+[\cdots]+[\cdots]\\
&+X\cdot\delta u\cdot dxdydz+Y\cdot\delta v\cdot dxdydz\\
&+Z\cdot\delta w\cdot dxdydz=\Big\{\Big(\sigma_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial\delta u}{\partial y}\\
&+\tau_{zx}\frac{\partial\delta u}{\partial z}\Big)dxdydz\ +\Big(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\\
&+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\Big)\delta u dxdydz+X\delta u\cdot dxdydz\\
&+\{\cdots\}+\{\cdots\}\\
=&\Big[\sigma_x\cdot\delta\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)+\Big\{\tau_{xy}\cdot\delta\Big(\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\\
&+\tau_{yx}\cdot\delta\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)\Big\}+\Big\{\tau_{zx}\cdot\delta\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)\\
&+\tau_{xz}\cdot\delta\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)\Big\}+\cdots\Big]dxdydz\\
&+\Big(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X\Big)\delta u\cdot dxdydz\\
&+\cdots+\cdots
\end{aligned}$$

이때 $\delta\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)=\delta\varepsilon_x,\ \cdots,\ \delta\Big(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big)=\delta\gamma_{xy},\ \cdots$

로 代置하면 다음과 같이 表示된다.

$$\begin{aligned}
\delta W=&\{(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}\\
&+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx})\\
&+\Big(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X\Big)\cdot\delta u\\
&+\Big(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y\Big)\cdot\delta v
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z\right)\cdot \delta w\Big\} dV \quad (11)$$

式(11)의 右邊에서 뒤 3個 ( )內의 項들은 바로 應力의 平衡方程式을 나타내고 있기 때문에 모두 0이되므로 δW는 右邊의 첫째項만으로 表示된다. 따라서 六面體의 內力에 依한 假想變位에 따르는 일은 式(10)의 假想일의 原理에 따라

$$-\delta W'=(\sigma_x\cdot\delta\varepsilon_x+\sigma_y\cdot\delta\varepsilon_y+\sigma_z\cdot\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\cdot\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\cdot\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\cdot\delta\gamma_{zx})\,dV \quad (12)$$

로 表示될 수 있다.

따라서 物體全體에 대한 外力이한 假想일 $\delta\overline{W}$는 다음과 같이 表示된다.

$$\delta\overline{W}=\int(\sigma_x\cdot\delta\varepsilon_x+\sigma_y\cdot\delta\varepsilon_y+\sigma_z\cdot\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\cdot\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\cdot\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\cdot\delta\gamma_{zx})\,dV \quad (13)$$

4. 極小 energy의 定理

物體에 δu, δv, δw의 假想變位를 주었을 때, 外力이 한 假想일 $\delta\overline{W}$(式(13))와 變形 energy $\overline{U}=\int UdV$ 사이의 關係를 구하기 위하여, U로써 式(7)을 선택하고, 假想變位때문에 變形率 $\varepsilon_x, \cdots, \gamma_{xy}$:, 가 $(\varepsilon_x+\delta\varepsilon_x), \cdots, (\gamma_{xy}+\delta\gamma_{xy}), \cdots$로 變化하여 變形 energy $\overline{U}$가 $(\overline{U}+\delta\overline{U})$로 變化했다면

$$\begin{aligned}\overline{U}+\delta\overline{U}&=G\int\{(\varepsilon_x+\delta\varepsilon_x)^2+\cdots+\frac{\nu}{1-2\nu}(e+\delta e)^2\\&\quad+\frac{1}{2}(\gamma_{xy}+\delta\gamma_{xy})^2+\cdots\}dV\\&=G\int\{\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2+\frac{\nu e^2}{1-2\nu}+\frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2\\&\quad+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)\}dV+2G\int\{\left(\varepsilon_x+\frac{\nu e}{1-2\nu}\right)\delta\varepsilon_x\\&\quad+\left(\varepsilon_y+\frac{\nu e}{1-2\nu}\right)\delta\varepsilon_y+\left(\varepsilon_z+\frac{\nu e}{1-2\nu}\right)\delta\varepsilon_z\\&\quad+\frac{1}{2}(\gamma_{xy}\cdot\delta\gamma_{xy}+\gamma_{yz}\cdot\delta\gamma_{yz}+\gamma_{zx}\cdot\delta\gamma_{zx})dV\\&\quad+G\int[(\delta\varepsilon_x)^2+(\delta\varepsilon_y)^2+(\delta\varepsilon_z)^2+\frac{\nu(\delta e)^2}{1-2\nu}\\&\quad+\frac{1}{2}\{(\delta\gamma_{xy})^2+(\delta\gamma_{yz})^2+(\delta\gamma_{zx})^2\}]dV \quad (14)\end{aligned}$$

에서 右邊의 第1積分項은 $\overline{U}$이고, 第2積分項에 式(5)와 式(6)을 代入, 第3積分項을 Δ로 表示하면 假想變位에 의한 變形 energy 의 變化는 다음과 같이 表示된다.

$$\delta\overline{U}=\int(\sigma_x\cdot\delta\varepsilon_x+\sigma_y\cdot\delta\varepsilon_y+\sigma_z\cdot\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\cdot\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\cdot\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\cdot\delta\gamma_{zx})\;dV+\Delta \quad (15)$$

위의 式(15)中의 右邊 第1項은 式(13)과 一致하는 外力의 假想일이므로 式(15)는 아래와 같이 表示된다.

$$\delta\overline{U}=\delta\overline{W}+\Delta \text{ 즉 } \delta(\overline{U}-\overline{W})=\Delta \quad (16)$$

이때 Δ는 式(14)의 맨끝의 積分項으로, 假想變位에 의한 微小變形率 $\delta\varepsilon_x, \cdots, \delta\gamma_{xy}\cdots$等의 二乘項의 和이므로 恒常 正의 값을 갖게되며 微小값이 됨을 알 수가 있다. 이 二次 微小項을 무시하면

$$\delta\overline{U}=\delta\overline{W} \text{ 또는 } \delta(\overline{U}-\overline{W})=0 \quad (17)$$

로 表示되며, 平衡狀態에 있는 物體가 任意의 微小한 假想的彈性變位를 받을 때 外力이 한 일은 變形 energy 의 微小增加와 같다.

$(\overline{U}-\overline{W})$를 彈性體의 potential energy 라고 도하는데, 式(17)에 의하면 平衡狀態에 있는 彈性體에 假想變位를 주어도 potential energy 는 變化하지 않으며(二次微小項까지 생각하면 式(16)에 의하여 增加한다) 따라서 彈性體의 potential energy는 平衡狀態에서 極小가 되는데 이것을 極小 energy 定理(Theorem of minimum energy)라 한다.

5. Ritz 의 近似計算法

前述한 바와 같이 彈性問題에서 嚴密解를 구하기가 어렵거나 複雜할 때에는 嚴密解에 가까운 近似解를 구하는 것이 實用的으로 便利할 때가 많다.

彈性問題에서, 주어진 問題의 境界條件을 滿足하는 近似的 變形狀態를 未知係數를 포함하는 方程式의 꼴로 合理的으로 設定하고 系의 potential energy $(\overline{U}-\overline{W})$를 구한다. 彈性體가 外力을 받아 平衡狀態에 있을 때 그 potential energy 는 前述한 바와 같이 極小가 되기 때문에 設定된 假想變形狀態가 嚴密解와 差異가 있을 때는 $(\overline{U}-\overline{W})$가 正確한 값(極小値)보다 크게 나타날 것이므로 이$(\overline{U}-\overline{W})$ 값이 可能한 한 작은 값이 되도록 近似解의 未知係數를 조정 한다면 이 近似解는 좀더 嚴密解에 接近할 것이다.

例를 들면 近似的 變形狀態의 彈性變位 u, v, w

를 다음과 같이 假定한다.

$$u=\sum_{i=1}^{n}a_iu_i,\quad v=\sum_{i=1}^{n}b_iv_i,\quad w=\sum_{i=1}^{n}c_iw_i \tag{18}$$

이때 u_i, v_i, w_i는 x, y, z의 函數이며, 주어진 問題의 境界條件을 滿足하도록 a_i, b_i, c_i들 사이의 關係를 적당히 定한 다음 $\overline{U}$와 $\overline{W}$를 구한다. 假定된 變位 式(18)이 嚴密解에 가깝게 되도록 하기 위하여 極小 energy 定理를 適用하면

$$\frac{\partial(\overline{U}-\overline{W})}{\partial a_i}=0,\quad \frac{\partial(\overline{U}-\overline{W})}{\partial b_i}=0,\quad \frac{\partial(\overline{U}-\overline{W})}{\partial c_i}=0 \tag{19}$$

이고 式(19)를 連立으로 풀어 a_i, b_i, c_i를 決定하면 近似解가 얻어진다. 式(19)에서 $\overline{U}$는 a_i, b_i, c_i의 二次式으로 表示되고, W는 一次式으로 表示될 것이므로 式(19)는 a_i, b_i, c_i에 관한 一次連立方程式으로 나타날 것이고, 式(18)의 項數가 많으면 이 連立方程式의 解를 구하는 것이 複雜하게 되기 때문에 式(18)을 假定할 때에는 u_i, v_i, w_i의 項數가 작은 것으로 選擇하는 것이 計算을 簡便하게 한다.

6. 單純引張·壓縮問題에의 應用

一軸應力狀態의 單純引張, 壓縮을 받는 部材에 대한 單位體積當의 變形 energy U는 式(8) 및 式(9)에 $\sigma_y=\sigma_z=0$, 및 剪斷應力 $\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$를 代入하고 $\sigma_x=\sigma$, $\varepsilon_x=\varepsilon$으로 代置하면

$$U=\frac{\sigma^2}{2E} \tag{20}$$

또는 $$U=\frac{\sigma\varepsilon}{2} \tag{21}$$

이고 式(7)에 $\varepsilon_x=\varepsilon$, $\varepsilon_y=\varepsilon_z=-\nu\varepsilon$, 및 $\gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$를 代入하여

$$U=\frac{E\varepsilon^2}{2} \tag{22}$$

를 얻는다.

軸剛度가 AE이고 길이 l인 棒材가 길이 方向의 變形 δ를 일으켰을 때에는 式(22)에서 $U=\frac{E\delta^2}{2l^2}$이고, 棒材全體의 變形 energy 는

$$\overline{U}=\int UdV=\frac{E\delta^2}{2l^2}\cdot Al=\frac{EA\delta^2}{2l} \tag{23}$$

으로 表示된다.

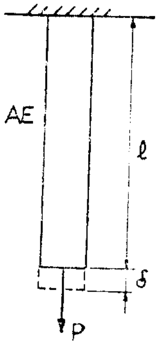


그림 3.

(應用例 1) 그림 3과 같이 軸剛度가 AE, 길이 l인 均一斷面棒이 軸引張力 P를 받을 때의 引張變形 δ를 구하는 問題는 材料力學의 初步로써 Hooke의 法則에서 바로 定義되는 것이나 뒤의 不靜定問題에서도 같은 方法으로 解가 구해지는 것을 보이기 위하여 極小 energy 定理를 써서 구해 보기로 한다.

이 棒材가 變形 δ를 일으켰을 때 棒材全體의 變形 energy는 式(23)에 의하여

$$\overline{U}=\frac{EA\delta^2}{2l}$$

이고, 外力이 한 假想 일은 固定端에서의 反力은 일을하지 않으므로 P가 한 일만으로 表示된다. 즉

$$\overline{W}=P\cdot\delta$$

따라서

$$\overline{U}-\overline{W}=\frac{AE\delta^2}{2l}-P\delta$$

이고, 極小 enery 定理를 適用하여

$$\frac{\partial(\overline{U}-\overline{W})}{\partial\delta}=0 \text{ 에서 } \frac{AE}{l}\delta-P=0$$

$$\therefore\ \delta=\frac{Pl}{AE}$$

이 구해진다.

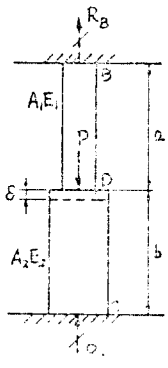


그림 4.

(應用例 2) 그림 4와 같이 軸剛度가 各各 A_1E_1, A_2E_2인 異材 結合材가 兩端 B, C에서 剛性壁에 固定되고 D點에 軸力 P가 作用하는 不靜定問題에서 D點의 變位 δ를 구해 보기로 한다.

이 系全體의 變形 energy는 두棒材 BD, DC의 變形 energy의 合으로 定義될 것이므로 式(23)을 써서

$$\overline{U}=\frac{E_1A_1\delta^2}{2a}+\frac{E_2A_2\delta^2}{2b}=\frac{bE_1A_1+aE_2A_2}{2ab}\delta^2$$

이고, 外力일은 P가 한 假想 일만으로 表示될 것이므로

$$\overline{W}=P\cdot\delta$$

이다. 따라서

$$\overline{U}-\overline{W}=\frac{bE_1A_1+aE_2A_2}{2ab}\delta^2-P\delta$$

이고

$$\frac{\partial(\overline{U}-\overline{W})}{\partial\delta}=0 \text{ 에서 } \frac{bE_1A_1+aE_2A_2}{ab}\delta-P=0$$

$$\therefore\ \delta=\frac{abP}{bE_1A_1+aE_2A_2}$$

이다. 이때 固定端 B, C에서의 反力의 크기는 各各 다음과 같다.

$$R_B=\frac{E_1A_1\delta}{a}=\frac{bE_1A_1P}{bE_1A_1+aE_2A_2}=\frac{P}{1+\dfrac{aE_2A_2}{bE_1A_1}}$$

$$R_C=\frac{E_2A_2\delta}{b}=\frac{aE_2A_2P}{bE_1A_1+aE_2A_2}=\frac{P}{1+\dfrac{bE_1A_1}{aE_2A_2}}$$

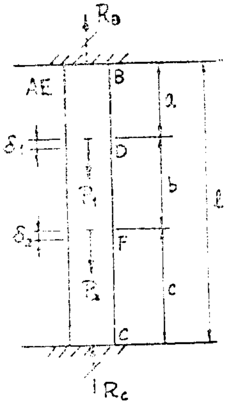


그림 5.

(應用例 3) 그림 5에서와 같이 軸剛度가 EA, 길이 l인 均一斷面棒의 兩端 B, C를 剛性壁에 固定하고, D, F點에 各各 軸力 P_1과 P_2를 作用했을 때 D, F點의 變位 δ_1과 δ_2를 구해 보자 系全體의 變形 energy는 棒材의 3區間 BD, DF, FC에서의 變形 energy 의 合일 것이므로 式(23)을 써서

$$\overline{U}=\frac{EA\delta_1^2}{2a}+\frac{EA(\delta_2-\delta_1)^2}{2b}+\frac{EA\delta_2^2}{2c}$$

$$=\frac{EA}{2}\left\{\frac{\delta_1^2}{a}+\frac{(\delta_2-\delta_1)^2}{b}+\frac{\delta_2^2}{c}\right\}$$

이고, 外力일은 P_1과 P_2가 한 假想일의 合이므로

$$\overline{W}=P_1\delta_1+P_2\delta_2$$

이다. 極小 energy 定理를 써서

$$\frac{\partial(\overline{U}-\overline{W})}{\partial\delta_1}=0 \text{ 에서}$$

$$\frac{EA}{2}\left\{\frac{2\delta_1}{a}-\frac{2(\delta_2-\delta_1)}{b}\right\}-P_1=0$$

즉 $$(a+b)\delta_1-a\delta_2=\frac{abP_1}{EA} \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial(\overline{U}-\overline{W})}{\partial\delta_2}=0\text{에서}$$

$$\frac{EA}{2}\left\{\frac{2(\delta_2-\delta_1)}{b}+\frac{2\delta_2}{c}\right\}-P_2=0$$

즉 $$-c\delta_1+(b+c)\delta_2=\frac{bcP_2}{EA} \qquad \text{(ii)}$$

式 (i), (ii)를 連立으로 풀면

$$\delta_1=\frac{a}{EAl}\{(b+c)P_1+cP_2\}$$

$$\delta_2=\frac{c}{EAl}\{aP_1+(a+b)P_2\}$$

이다. 이때 固定端에서의 反力 R_B와 R_C의 크기는 各各 다음과 같다.

$$R_B=\frac{EA\delta_1}{a}=\frac{1}{l}\{(b+c)P_1+cP_2\}$$

$$R_B=\frac{EA\delta_2}{c}=\frac{1}{l}\{aP_1+(a+b)P_2\}$$

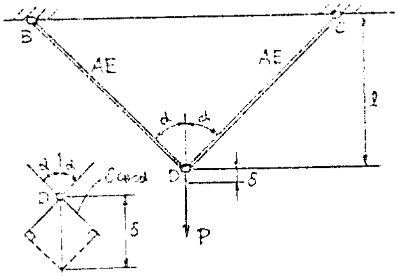


그림 6.

(應用例 4) 軸剛度가 AE인 2個의 均一棒材 BD와 CD를 그림 6에서와 같이 pin 으로 組立하고 D點에 鉛直荷重 P를 作用한 靜定의 問題에서 D點의 鉛直變位 δ를 極小 energy 定理를 써서 구해 보자.

傾斜棒材의 길이는 $l/\cos\alpha$ 이고, D點의 鉛直變位 δ에 대하여 傾斜棒材의 變形은 $\delta\cos\alpha$일 것이므로 系全體의 變形 enery는 式(23)에 의하여

$$\overline{U}=2\times\frac{EA(\delta\cos\alpha)^2}{2\left(\dfrac{l}{\cos\alpha}\right)}=\frac{EA\cos^3\alpha}{l}\delta^2$$

이고, P가 한 假想일은

$$\overline{W}=P\cdot\delta$$

일 것이므로

$$\frac{\partial(\overline{U}-\overline{W})}{\partial\delta}=0 \text{ 에서 } \frac{l}{2EA\cos^3\alpha}-P=0$$

$$\therefore\ \delta=\frac{Pl}{2EA\cos^3\alpha}$$

가 된다.

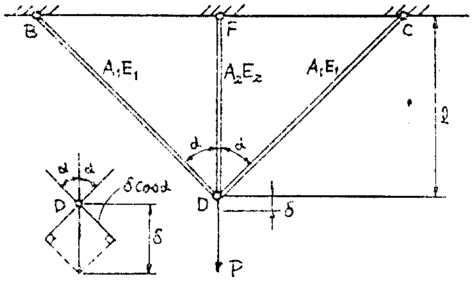


그림 7.

(應用例 5) 前例題에서와 같은 2個의 傾斜棒材 BD, CD (軸剛度 E_1A_1)에 軸剛度가 E_2A_2인 鉛直棒材 FD를 추가한 그림 7과 같은 不靜定問題에서 D點의 鉛直變位 δ가 같은 方法으로 구해질 수가 있다.

系全體의 變形 energy 는

$$\overline{U}=2\times\frac{E_1A_1(\delta\cos\alpha)^2}{2\left(\dfrac{l}{\cos\ \alpha}\right)}+\frac{E_2A_2\delta^2}{2l}$$

$$=\frac{\delta^2}{2l}(2E_1A_1\cos^3\alpha+E_2A_2)$$

이고, P가 한 假想일은

$$\overline{W}=P\cdot\delta$$

이므로

$$\frac{\partial(\overline{U}-\overline{W})}{\partial\delta}=0 \text{ 에서 } \frac{\delta}{l}(2E_1A_1\cos^3\alpha+E_2A_2)-P=0$$

$$\therefore\ \delta=\frac{Pl}{2E_1A_1\cos^3\alpha+E_2A_2}$$

가 된다. 이때 鉛直棒 FD의 應力 σ_2는

$$\sigma_2=E_2\frac{\delta}{l}=\frac{E_2P}{2E_1A_1\cos^3\alpha+E_2A_2}$$

이고, 傾斜棒 BD (또는 CD)의 길이는 $l/\cos\alpha$이고 變形은 $\delta\cos\alpha$ 이므로 이 棒의 應力 σ_1은

$$\sigma_1=E_1\frac{\delta\cos\alpha}{\left(\dfrac{l}{\cos\alpha}\right)}=\frac{E_1P\cos^2\alpha}{2E_1A_1\cos^3\alpha+E_2A_2}$$

로 表示된다.

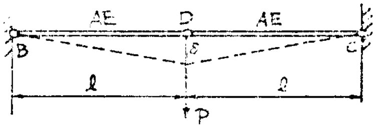


그림 8.

(應用例 6) 그림 8에서와 같이 軸剛度 AE, 길이 l인 2個의 棒材를 D點에서 pin으로 연결하고 B, C 點에서 pin으로 剛性壁에 연결하여 水平이 되게 했다. D點에 鉛直荷重 P를 作用했을 때 D點의 鉛直變位 δ를 구해보자.

D點이 鉛直變位 δ를 일으켰을 때 各棒材의 引張變形量 δ_1은

$$\delta_1=\sqrt{l^2+\delta^2}-l=l\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{l}\right)^2}-1\right\}$$

일 것이며 δ/l가 微小하므로 $\sqrt{1+\left(\dfrac{\delta}{l}\right)^2}=1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\delta}{l}\right)^2$으로 高次微小項을 생략하면

$$\delta_1=\frac{\delta^2}{2l}$$

이다. 따라서 系全體의 變形 energy 는

$$\overline{U}=2\times\frac{EA\delta_1^2}{2l}=\frac{EA}{l}\left(\frac{\delta^2}{2l}\right)^2=\frac{EA\delta^4}{4l^3}$$

이고, P가 한 假想 일은

$$\overline{W}=P\cdot\delta$$

이므로

$$\frac{\partial(\overline{U}-\overline{W})}{\partial\delta}=0 \text{ 에서 } \frac{EA}{l^3}\delta^3-P=0$$

$$\therefore\ \delta=l\sqrt[3]{\frac{P}{EA}}$$

가 된다. 이 경우는 材料가 Hooke의 法則을 따르고 있음에도 불구하고 變形 energy는 變位 δ의 4乘에 比例하고 있으며 δ가 荷重 P의 3乘根에 比例하여 P와 δ가 直線的이 아님을 알 수가 있다. (다음호에 계속)