Journal of the
Military Operations Research
Society of Korea, Vol. 6, No. 1
June, 1980

確 率 的 決 鬪
(Stochastic Duels : A State-of-the-art)

金 汝 根 *
朴 淳 達 **

Abstract

Stochastic duels have been studied by Ancker, William, Bhashyam, Gafarian, Jaiswal, Singh, and others. Stochastic duels are classified in terms of factors such as kill probability, ammunition, time duration, surprise, mobility, time of flight, etc. The purpose of this paper is to summarize and analyze the models of stochastic duels that have been studied so far, and to study the effect of the factors to the win probability.

1. 序 論

利害가 상충되는 대상들이 극한적인 対決을 하는 결투상황을 模型化하여 다루는 모델을 결투모델 (Duel Model) 이라 한다. 결투모델은 주로 워 게임 (War game) 에 응용되는 데, 구체적인 例를 들면 이용 가능한 情報에 따른 최적전략결정, 이동성·기습능력·보유탄약 등에 의한 전략분석 및 평가, 탄약·무기 등의 장비 보급관리, 무기시스템의 개발·설계에 따른 費用対効果分析 등이 있다.

결투모델은 게임이론적 처리와 확률적 처리로 대별된다. 게임이론적 결투모델은 한국군사운영분석연구회지 (MORS—K) 제 5 권 제 1 호에 실렸다. 그 후속으로 지금까지 연구된 확률적 결투(Stochastic duel) 모델을 체계적이고 일관성 있게 다루어 보고자 한다.

게임이론적 결투가 최적의 전략을 결정하는 데 반해 Stochastic duel 은 각 참가자가 이미 내려진 전략하에서 게임을 했을 때의 勝率에 관심을 갖는다.

무한한 탄약을 가지고 한 참가자가 살해 될 때까지 게임을 계속하는 결투를 Fundamental duel 이라 한다. 이러한 Fundamental duel 을 기초로 하여 勝率에 영향을 미치는 개인살해확률·발사간격·탄약·이동성·은폐· 전투시간·비행시간·무기고장율·기습· 치사량등의 요소를 고려한 모델로 확장해 나간다. 위의 여러 요소는 전투의 미시적 양상으로서 변수와 모수들을 대부분 손쉽게 측정할 수 있다. 따라서 위의 요소들을 고려한 분석에 의해 전투의

* 全南大学校 工科大学
** 서울大学校 工科大学

거시적 결과를 측정하는 데 도움을 주며 좀더 신뢰할 수 있는 分析을 할 수 있다.

이러한 Stochastic duel은 Ancker와 William [9]에 의해 시작되어 Ancker [1~8, 10], William [9, 10, 34, 35], Gafarian [7, 8], Bhashyam [13, 14, 15, 22], Jaiswal [22], Singh [15], Barfoot [11, 12] 등에 의해 위의 요소들을 고려한 모델이 연구되었다.

2절은 Fundamental duel과 그 應用, 3절은 제한된 탄약과 시간의 Fundamental duel과 그 效果, 4절은 초기조건・은폐・비행시간 등의 여러 확장된 Fundamental duel과 5절은 그 외의 Stochastic duel 모델과 分析모델 및 결론을 다룬다.

앞으로 사용될 기호에 대하여 설명하면 아래와 같다.

- p_i : 참가자 i의 살해 확률
- q_i : $1-p_i$
- $f_i(t)$: 시간 t에서 참가자 i의 발사밀도 함수
- $h_i(t)$: 시간 t에서 참가자 i의 살해확률 밀도함수
- $\varphi_i(u)$: $f_i(t)$의 특성함수
- $\Phi_i(u)$: $h_i(t)$의 특성함수
- $G_i(t)$: $h_i(t)$의 여분포 함수 (Complementary distribution function)
- $P(\mathrm{I})$: 참가자 1의 勝率
- $P(\mathrm{II})$: 참가자 2의 勝率
- $P(\mathrm{I,II})$: 참가자 1과 2가 비길확률
- $*$: Convolution 기호

위의 모든 i는 $i=1, 2$이다.

2. Fundamental duel

Fundamental duel이란 주어진 일정한 살해확률(Kill probability)과 발사율에 의하여 참가자 1과 2가 無限한 탄약을 가지고 둘중 하나가 살해될 때까지 게임을 계속하는 결투이다.

참가자 1과 2의 살해확률은 P_1 P_2로 일정하다고 할 때 발사시간이 任意로 주어지는 경우와 固定된 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다.

2－1 任意발사시간

발사시간이 임의로 주어질 때 참가자 1의 발사시간 밀도함수를 $f_1(t)$라 하고 시간과 탄약에 제한이 없으며 이동과 은폐는 불가능하고 장진하지 않는 상태에서 동시에 게임을 시작한다고 하자. 참가자 2도 똑같은 가정을 갖는다.

발사시간 밀도함수 $f_1(t)$, $f_2(t)$는 확률분포이므로

$$\left.\begin{array}{ll} f(t)\geq 0, & t\geq 0 \\ f(t)=0, & t<0 \end{array}\right. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$\int_0^\infty f(t)\,dt=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

와 성질을 갖고, 좀더 일반적인 접근을 위하여 $f(t)$의 특성함수 $\varphi(u)$는

$$\varphi(u)=\int_0^\infty f(t)\,e^{iut}\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

이다. (3)에서 $i=\sqrt{-1}$ 이다. 먼저 $\varphi(u)$의 性質에 대하여 알아보면

$$\varphi(0)=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} |\varphi(u)|\leq 1 \\ |\varphi(-u)|\leq 1 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} |\varphi(u)|\leq \dfrac{k}{|u|} \\ |\varphi(-u)|\leq \dfrac{k}{|u|} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

이다. 여기서 k는 일정한 상수이다.

Fundamental duel에서 각 참가자의 勝率은 아래 定理와 같다 [9].

〔定理 1〕 Fundamental duel에서 任意발사시간일때 참가자 1의 勝率은

$$P(\mathrm{I})=\int_0^\infty G_2(t)\,h_1(t)\,dt \quad \cdots\cdots (7,\mathrm{a})$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_l \Phi_1(-u)\,\Phi_2(u)\,\frac{du}{u} \cdots (7,\mathrm{b})$$

이고 참가자 2의 勝率은

$$P(\mathrm{II})=\int_0^\infty G_1(t)\,h_2(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots (8,\mathrm{a})$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_\mu \Phi_1(-u)\,\Phi_2(u)\frac{du}{u} \cdots (8,\mathrm{b})$$

이고 서로 비길 확률은

$P(\mathrm{I\,II}) = 0$ ………………… (9)

이다. 여기서 $G_i(t) = \int_t^\infty h_i(t)\,dt$, $i=1, 2$ 이고 $\int_l$, $\int_\mu$ 는 零点을 제외한 全実数軸을 적분함을 의미한다. □

證明. 시간 t와 $t+\triangle t$ 사이에 참가자 1이 살해할 확률은

$$h_1(t)\,dt = p_1 f_1(t)\,dt + p_1 q_1 f_1(t) * f_1(t)\,dt + p_1^2 q_1^2 f_1(t) * f_1(t) * f_1(t)dt + \cdots \quad (10)$$

이다. 그리고

$$\Phi_1(u) = \int_0^\infty h_1(t)\,e^{iut}\,dt \quad \cdots\cdots (11)$$

이다. (10)을 특성함수의 式으로 고치면

$$\Phi_1(u) = p_1\varphi_1(u) + p_1 q_1 \varphi_1^2(u) + \cdots + p_1 q_1^{n-1}\varphi_1^n(u) + \cdots\cdots$$
$$= p_1\varphi_1(u) / (1 - q_1\varphi_1(u)) \quad \cdots\cdots (12)$$

이다. 참가자 1의 勝率은

$$P(\mathrm{I}) = \int_0^\infty G_2(t)\,h_1(t)\,dt \quad \cdots\cdots (13)$$

이다. 특수함수의 변형으로 (33),

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-iux}\varphi(u)\,du \quad \cdots\cdots (14,\mathrm{a})$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-iux}\,du\int_{-\infty}^\infty f(x)\,e^{iux}\,dx \quad \cdots\cdots (14,\mathrm{b})$$

을 이용하여 $P(\mathrm{I})$를 구하여 보면

$$P(\mathrm{I}) = \int_0^\infty G_2(t)\,h_1(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty h_1(t)\,dt\int_{-\infty}^\infty e^{-iut}\,du \int_0^\infty G_2(t)\,e^{iut}\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty h_1(t)\,e^{-iut}\,dt\,du\int_0^\infty G_2(t)\,e^{iut}\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \Phi_1(-u)\,du\int_0^\infty G_2(t)\,e^{iut}dt \quad \cdots\cdots (15)$$

이다. (15)에서

$$\int_0^\infty G_2(t)\,e^{iut}\,dt = \frac{[\Phi_2(u)-1]}{iu} \quad \cdots\cdots (16)$$

이므로 (15)는

$$P(\mathrm{I}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \Phi(-u)\,[\Phi_2(u)-1]\,\frac{du}{u} \quad \cdots\cdots (17,\mathrm{a})$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \Phi_1(-u)\,\Phi_2(u)\frac{du}{u} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \Phi_1(-u)\,\frac{du}{u} \quad \cdots\cdots (17,\mathrm{b})$$

이다. (17, b)의 $-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \Phi_1(-u)\frac{du}{u}$ 에서 $\Phi_1(-u)$은 복소수 평면의 하반부 반평면에서 Singularities를 갖지 않고, 원점에서만 Simple pole을 갖는다. 따라서 $-\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\Phi_1(u)}{u}$는 $-1/2\pi i$의 Residue를 갖는다. Residue 이론 [24]으로 부터 복소수 하반부 반평면에서 $-\pi i \times (-1)/2\pi i = \frac{1}{2}$ 만큼 기여를 하므로 (17, b)는

$$P(\mathrm{I}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_l \Phi_1(-u)\,\Phi_2(u)\,\frac{du}{u} \quad \cdots (18)$$

로 된다. 마찬가지로 (18)은 복소수 하반부 반평면이면 원점에서 Simple pole을 가져

$$P(\mathrm{I}) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \Phi_1(-u)\,\Phi_2(u)\,du/u \quad \cdots (19)$$

이다. 복소수 상반부 반평면이면 원점에서 Simple pole를 가져 $\pi i \times 1/2\pi i = 1/2$ 만큼 기여를 하여 [24]

$$P(\mathrm{I}) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_\mu \Phi_1(-u)\,\Phi_2(u)\,du/u \quad \cdots (20)$$

이 된다. $P(\mathrm{II})$의 경우도 같은 방법으로 구하여 진다. △

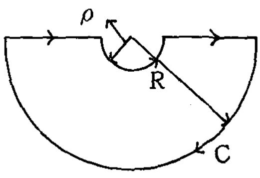

그림 1. $\int l$의 적분線

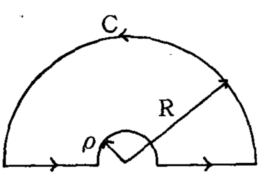

그림 2. $\int \mu$의 적분線

應用 1. 발사시간 밀도함수 $f_1(t) = r_1 e^{-r_1 t}$, $f_2(t) = r_2 e^{-r_2 t}$ 라면

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(u) = r_1/(r_1 - iu) \\ \varphi_2(u) = r_2/(r_2 - iu)\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (21)$$

이고 살해시간 밀도함수의 특성함수는

$$\Phi_1(u) = p_1\varphi_1(u) / (1 - q_1\varphi_1(u))$$
$$= p_1 r_1 / (p_1 r_1 - iu)$$
$$\Phi_2(u) = p_2\varphi_2(u) / (1 - q_2\varphi_2(u)) \quad \cdots(22)$$
$$= p_2 r_2 / (p_2 r_2 - iu)$$

가 되어 (7, b)에 代入하면

$$P(\mathrm{I}) = \frac{p_1 p_2 r_1 r_2}{2\pi i}\int_l \frac{1}{p_1 r_1 + iu} \cdot \frac{1}{p_2 r_2 - iu} \cdot \frac{du}{u} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

이다. $U = -ip_2 r_2$ 에서 Simple pole 이므로 residue 理論에 의하여 풀면 참가자 1의 勝率은

$$P(\mathrm{I}) = p_1 r_1 / (p_1 r_1 + p_2 r_2) \cdots\cdots (24)$$

이고 같은 방법으로 참가자 2의 승율은

$$P(\mathrm{II}) = p_2 r_2 / (p_1 r_1 + p_2 r_2) \cdots\cdots (25)$$

이다.

應用 2. $f_1(t) = 4r_1^2 e^{-2r_1 t}$, $f_2(t) = 4r_2 e^{-2r_2 t}$ 이면, $\varphi_1(u) = 4r_1^2 / (2r_1 - iu)^2$, $\varphi_2(u) = 4r_2^2 / (2r_2 - iu)^2$ 이다.

정리하면

$$P(\mathrm{I}) = \frac{p_1 p_2}{2\pi i}\int_l \frac{4r_2^2}{(2r_2 - iu)^2 - 4r_2^2 q_2} \cdot \frac{4r_1^2}{(2r_1 - iu)^2 - 4r_1^2 q_1}\frac{du}{u}$$

이다. residue 理論을 적용하며 풀면 참가자 1의 勝率은

$$P(\mathrm{I}) = p_1 r_1^2 \cdot \frac{(p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2) + (p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2)^2 + 4r_2(r_1 + r_2)}{4r_1 r_2 (r_1 + r_2)(p_1 r_1 + p_2 r_2)} \quad \cdots\cdots (26)$$

이다. 같은 方法으로 $P(\mathrm{II})$도 구해진다.

위의 應用 1. 과 應用 2. 의 결과에 의해 살해확률 p_1, p_2와 발사밀도함수의 母數 r_1, r_2가 참가자 1과 2의 승율에 얼마만한 영향을 미치는 가를 分析할 수 있다. 즉 발사율, 살해확률과 각 참가자의 승율과의 관계를 分析할 수 있다. 應用 1의 경우의 발사율과 승율과의 관계를 그림으로 그리면 그림 3과 같다.

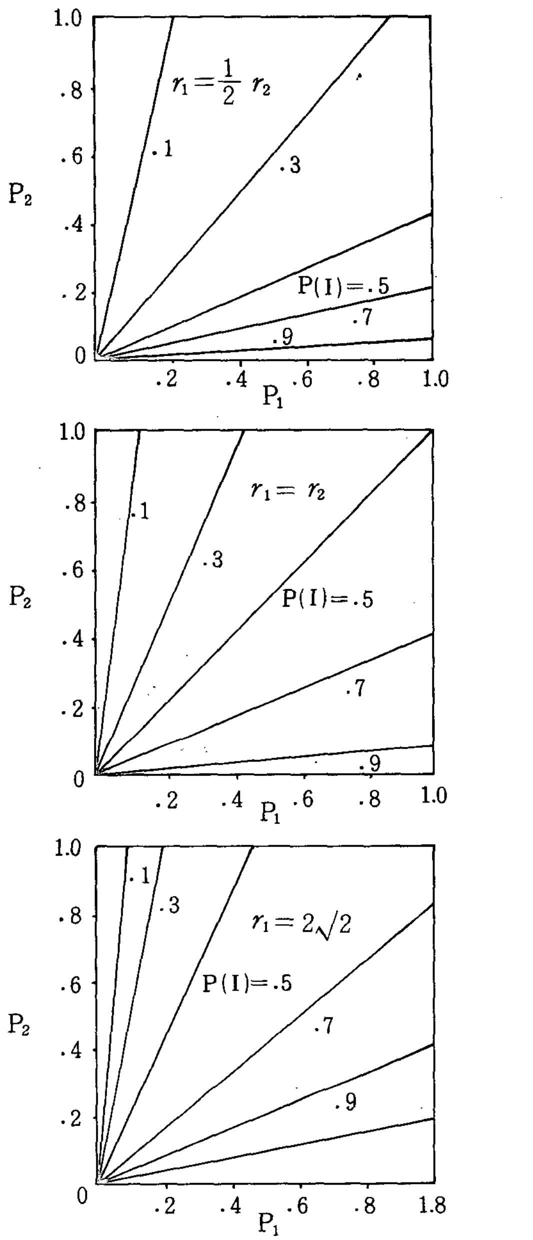

그림 3. 발사함수가 陰의 지수함수일때 모수와 승율과의 관계(참고문헌 9)

2－2. 固定된 발사기간

Fundamental duel에서 고정된 발사간격일 때 다음 定理가 성립한다.

〔定理 2〕 참가자 1의 발사시간 간격이 a_1 참가자 2의 발사시간 간격이 b_1 이고 그 서로

素가 a, b 라면 참가자 1과 2의 승율 및 비길확률은

$$P(\mathrm{I})=\left\{P_1/(1-q_1^b\, q_2^a)\right\}\sum_{j=0}^{j=b-1} q_1^j\, q_2^{[(j+1)a/b]} \quad \cdots\cdots\cdots(27)$$

$$P(\mathrm{II})=\left\{P_2/(1-q_1^b\, q_2^a)\right\}\sum_{k=0}^{k=a-1} q_2^k\, q_1^{[(k+1)b/a]} \quad \cdots\cdots\cdots(28)$$

$$P(\mathrm{I},\mathrm{II})=p_1 p_2\, q_1^{b-1}\, q_2^{a-1}/(1-q_1^b\, q_2^a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

이다 〔10〕. 여기서 〔 〕는 가우스 기호이다.

證明. 참가자 1의 승율을 구하기 위하여, 참가자 1이 j 번째의 발사에 참가자 2를 살해할 확률 $p_1 q_1^{j-1}$에 참가자 2가 그 시간까지 발사했던 $k=[ja/b]$ 번 실패할 확률 q_2^k를 곱하면 된다. 우선 a를 b로 나누었을 때 가장 큰 정수는 n이고 그 나머지를 r이라 하면 $a=nb+r$로 표현된다. 따라서 참가자 1의 승율은

$$P(\mathrm{I})=\sum_{j=1}^{j=\infty} p_1\, q_1^{j-1}\, q_2^k = p_1\sum_{j=1}^{j=\infty} q_1^{j-1}\, q_2^{jn+[jr/b]} = p_1\, q_1^n \sum_{j=0}^{j=\infty} q_1^j\, q_2^{jn+[(j+1)r/b]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

이다. (30)에서 $[(j+1)r/b]=[x_j]$라 하면 $\{[x_0]=0, [x_1], [x_2], \cdots, [x_{b-1}]=r\}$, $\{r, [x_1]+r, \cdots, [x_{b-1}]+r=2r\}, \cdots$ 이다. 그래서 (30)은

$$P(\mathrm{I})= p_1\, q_2^n \sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{j=kb}^{j=kb+b-1} q_1^j\, q_2^{jn+[x_j]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31, a)$$

$$= p_1\, q_2^n \sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{j=0}^{j=b-1} q_1^{j+kb}\, q_2^{(j+kb)n+[x_j+kb]} \quad \cdots\cdots\cdots(31, b)$$

(31, b)에서 $[x_{j+kb}]=[x_j+kr]=[x_j]+kr$이므로

$$P(\mathrm{I})=p_1\, q_2^n \sum_{j=0}^{j=b-1} q_1^j\, q_2^{jn+[x_j]} \sum_{k=0}^{k=\infty} q_1^{bk}\, q_2^{(nb+r)k} \quad \cdots\cdots(31, c)$$

가 얻어진다. $a=nb+r$을 (31,c)에서 대입하면

$$P(\mathrm{I})=\{p_1\, q_2^n/(1-q_1^b\, q_2^a)\}\sum_{j=0}^{j=b-1} q_1^j\, q_2^{jn+[x_j]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31, d)$$

이다. (31, d)에서 q_2^n을 $\sum$안으로 넣으면

$$\sum_{j=0}^{j=b-1} q_2^n\, q_1^j\, q_2^{jn+x_j}=\sum_{j=0}^{j=b-1} q_1^j\, q_2^{(j+1)n+x_j}=\sum_{j=0}^{j=b-1} q_1^j\, q_2^{[(j+1)(n+r/b)]} = \sum_{j=0}^{j=b-1} q_1^j\, q_2^{[(j+1)a/b]}$$ 이다.

따라서 참가자 1의 승율은

$$P(\mathrm{I})=\{p_1/(1-q_1^b\, q_2^a)\}\sum_{j=0}^{j=b-1} q_1^j\, q_2^{[(j+1)a/b]} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

이고, 참가자 2의 승율도 같은 방법으로 구한다. 서로 비길 확률 $P(\mathrm{I\ II})$는 발사하는 시간이 같고 서로 맞으면 비긴다. 즉 $ja=kb$로 j와 k는 $j=lb$, $k=la$ $(l=1, 2, \cdots)$로 표현된다. 따라서 비길확률은

$$P(\mathrm{I\ II})=p_1 p_2 \sum_{l=0}^{l=\infty} q_1^{(l+1)b-1}\, q_2^{(l+1)a-1}$$

이므로 쉽게 (29)를 얻을 수 있다. △

應用 3. $b=1$, $n=a$, $r=0$ 일때 (27),(29)에 대입하면

$$P(\mathrm{I})=p_1\, q_2^a/(1-q_1\, q_2^a) \quad \cdots\cdots\cdots(33)$$

$$P(\mathrm{I\ II})=p_1 p_2\, q_2^{a-1}/(1-q_1\, q_2^a)\cdots(34)$$

이다.

應用 4. $n=0$, $a=r=1$인 경우, 즉 b가 a의 整数倍일때는 (27), (29)로 부터

$$P(\mathrm{I})=1-q_1^{b-1}\, p_2/(1-q_1^b\, q_2)\cdots(35)$$

$$P(\mathrm{I\ II})=p_1 p_2\, q_1^{b-1}/(1-q_1^b\, q_2)\cdots(36)$$

이다. 임의 발사시간인 경우와 같이 고정된 발사시간에 대해서도 발사율과 살해확률이 승율에 미치는 영향을 分析할 수 있다.

3. 制限된 Fundamental duel

2절에서 다루었던 Fundamental duel에 탄약 또는 시간이 제한된다는 조건을 부가한 모델은 좀더 일반화된 모델이라 할 수 있다. 따라서 3-1. 에서 탄약이 제한된 〔1〕 모델

과 3－2. 에서 시간이 제한된 〔2〕모델을 다루어 보기로 한다.

3－1. 制限된 탄약

탄약에 한계가 있을 때, 참가자 1이 k개의 탄약을 가지고 게임을 시작할 이산적 확률 α_k는

$$p\,[n=k]=\alpha_k\,,\quad k=1,2,\cdots \qquad \cdots\cdots(37)$$

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k=1 \qquad \cdots\cdots(38)$$

참가자 2가 j개의 탄약을 가지고 게임을 시작할 이산적 확률 β_j는

$$p\,[n=j]=\beta_j\,,\quad j=0,1,2,\cdots \qquad \cdots\cdots(39)$$

$$\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j=1 \qquad \cdots\cdots(40)$$

으로 표현된다. 시간 t와 $t+\triangle t$ 사이에 참가자 1의 살해확률은

$$h_1(t)\,dt=\alpha_0\delta(t-\infty)\,dt+\alpha_1[\,p_1 f_1(t)+q_1\delta(t-\infty)]\,dt+\alpha_2[\,p_1 f_1(t)+p_1 q_1 f_1(t)*f_1(t)+q_2^2\delta(t-\infty)]dt+\cdots+\alpha_n p_1\left[\sum_{l=0}^{l=n-1}q_1^l\cdot f_1^{(l+1)*}(t)+q_1^n\delta(t-\infty)\right]dt+\cdots \qquad \cdots(41)$$

이다. 여기서 $\delta(t-\infty)$는 Dirac delta 함수이고, $*$는 Convolution, l^*는 그 함수의 l번 반복 Convolution을 나타낸다. 그래서 (41)로 부터

$$\begin{aligned}h_1(t)&=p_1\sum_{k=1}^{k=\infty}\alpha_k\sum_{l=0}^{l=k-1}q_1^l\,f_1^{(l+1)*}(t)+\delta(t-\infty)\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k\,q_1^k\\&=h_{11}(t)+\delta(t-\infty)\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k\,q_1^k\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(42)$$

이다. (42) 式에서 $h_{11}(t)$가 定意된다. 따라서 탄약이 제한된 Fundamental duel의 각 참가자 승율 및 비길 확률은 아래 定理로 요약할 수 있다.

〔定理 3〕 制限된 탄약을 가진 Fundamental duel에서 참가자 1의 승율은

$$P(\mathrm{I})=\int_0^\infty G_2(t)\;h_{11}(t)\;dt \qquad \cdots\cdots(43)$$

$$=\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j\;q_2^j\;[1-\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k\;q_1^k\,]+\frac{1}{2\pi i}\int_l\Phi_{11}(-u)\;\Phi_{21}(u)\;\frac{du}{u} \qquad \cdots\cdots(44)$$

이고 비길 확률은

$$P(\mathrm{I\,II})=\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k\;q_1^k\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j\;q_2^j \qquad \cdots\cdots(45)$$

이다. 여기서 $\Phi_{11}(u)$, $\Phi_{21}(u)$는 $h_{11}(t)$, $h_{21}(t)$의 특성함수이다. □

證明. $h_1(t)$의 여분포함수는

$$G_1(t)=\int_t^\infty h_{11}(x)\,dx+\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k\;q_1^k=G_{11}(t)+\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k\;q_1^k \qquad \cdots\cdots(46)$$

이다. 따라서 참가자 1의 승율은

$$\begin{aligned}P(\mathrm{I})&=\int_0^\infty G_2(t)\;h_{11}(t)\;dt\\&=\int_0^\infty G_{21}(t)\;h_{11}(t)\,dt+\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j\;q_2^j\int_0^\infty h_{11}(t)\,dt\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(47)$$

이다. (42)로 부터

$$\int_0^\infty h_1(t)\;dt=\int_0^\infty h_{11}(t)\;dt+\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k\;q_1^k=1$$

이어서

$$P(\mathrm{I})=\int_0^\infty G_{21}(t)\;\;h_{11}(t)\;dt+\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j\;q_2^j\left[1-\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k\;q_1^k\right] \qquad \cdots\cdots(48)$$

이다. (14)를 이용하여 (15)의 유도과정과 같이하면

$$P(\mathrm{I})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\Phi_{11}(-u)\;du\int_0^\infty e^{iut}\;G_{21}(t)\,dt+\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j\;q_2^j\left[1-\sum_{j=0}^{j=\infty}\alpha_k\;q_1^k\right] \qquad \cdots\cdots(49)$$

로 된다. $\Phi_{11}(u)$는 (42)로 부터

$$\begin{aligned}\Phi_{11}(u)&=\int_0^\infty e^{iut}\;h_{11}(t)\;dt\\&=p_1\int_0^\infty e^{iut}\left[\sum_{k=1}^{k=\infty}\alpha_k\sum_{l=0}^{l=k-1}q_1^l\;f_1^{(l+1)*}(t)\right]dt\\&=p_1\sum_{k=1}^{k=\infty}\alpha_k\sum_{l=0}^{l=k-1}q_1^l\;\varphi_1^{(l+1)}(u)\\&=\frac{p_1\,\varphi_1(u)}{1-q_1\,\varphi_1(u)}\left\{1-\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k\;[\,q_1\,\varphi_1(u)\,]^k\right\}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(50)$$

이고 마찬가지로 $\Phi_{21}(u)$는

$$\Phi_{21}(u)=\frac{p_2\varphi_2(u)}{1-q_2\varphi_2(u)}\left\{1-\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j[q_2\varphi_2(u)]^j\right\} \quad \cdots\cdots (51)$$

이다. 또한

$$\int_0^\infty e^{iut}G_{21}(t)\,dt=\frac{1}{iu}\left[\Phi_{21}(u)-1+\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j q_2^j\right] \quad \cdots\cdots (52)$$

이다. 따라서 참가자 1의 승율은

$$P(\mathrm{I})=\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j q_2^j\left[1-\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k q_1^k\right]+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{11}(-u)\left[\Phi_{21}(u)-1+\sum_{l=0}^{l=\infty}\beta_j q_2^j\right]\frac{du}{u} \quad \cdots\cdots (53)$$

이다. (53)을 (17)과 (18)의 유도과정과 같이 하여 Residue 理論을 적용하여 정리하면

$$P(\mathrm{I})=\frac{1}{2}\left[1-\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k q_1^k\right]\left[1+\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j q_2^j\right]+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{11}(-u)\Phi_{21}(u)\frac{du}{u} \quad \cdots\cdots (54)$$

이다. (54)의 적분은 원점에서 Simple pole 이므로 Residue는 $\frac{1}{2\pi i}\left(1-\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j q_2^j\right)\left(1-\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k q_1^k\right)$ 여서 복소수 하반부 반평면이면 원점에서 Residue $\times(-\pi i)$ 만큼 기여를 하므로 (54)는 (44)로 유도된다. 그리고 복소수 상반부 반평면이면 Residue $\times\pi i$ 만큼 원점에서 기여를 하므로

$$P(\mathrm{I})=1-\sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k q_1^k+\frac{1}{2\pi i}\int_u\Phi_{11}(-u)\Phi_{21}(u)\frac{du}{u} \quad \cdots\cdots (55)$$

로 된다. 또한 서로 비길확률은 탄약이 둘 다 떨어질 때이므로 (45)와 같이 된다. △

〔定理 3〕에서 모든 유한한 k, j에 대해 $\alpha_k=\beta_j=0$ 이고 무한한 k, j에 대해 $\alpha_k=\beta_j=1$ 이면 Fundamental duel 이 된다.

應用 5. α_k, β_j 가 다음과 같은 기하분포를 따르고 $f_1(t)$, $f_2(t)$가 陰의 지수분포일때 즉 $\alpha_k=(1-\alpha)\alpha^k$, $\beta_j=(1-\beta)\beta^j$ 이고 $f_1(t)=r_1e^{-r_1t}$, $f_2(t)=r_2e^{-r_2t}$ 이면

$$\Phi_{11}(-u)=\alpha_1 p_1 r_1/[(1-\alpha q_1)r_1+iu] \quad \cdots\cdots (56)$$

$$\Phi_{21}(u)=\beta p_2 r_2/[(1-\beta q_2)r_2-iu] \quad \cdots\cdots (57)$$

가 된다. (44)로 부터

$$P(\mathrm{I})=(1-\beta)\alpha p_1/(1-\beta q_2)(1-\alpha q_1)+\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{\alpha p_1 r_1}{(1-\alpha q_1)r_1+iu}\cdot\frac{\beta p_2 r_2}{(1-\beta q_2)r_2-iu}\cdot\frac{du}{u} \quad \cdots\cdots (58)$$

가 되어, $u=-i(1-\beta q_2)r_2$에서 Simple pole을 가지므로 Residue 理論에 의하여

$$P(\mathrm{I})=\left[\alpha p_1/(1-\alpha q_1)\right]\left[\frac{(1-\alpha q_1)r_1+(1-\beta)r_2}{(1-\alpha q_1)r_1+(1-\beta q_2)r_2}\right] \quad \cdots\cdots (59)$$

이다. (45)를 이용하여 풀면 비길확률은

$$P(\mathrm{I\,II})=(1-\alpha)(1-\beta)/[(1-\alpha q_1)(1-\beta q_2)] \quad \cdots\cdots (60)$$

이다.

또한 특별한 경우로 참가자 1이 n개의 탄약, 참가자 2가 m개의 탄약을 가지면, α_k, β_j는

$$\alpha_k=\begin{cases}1, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases} \qquad \beta_j=\begin{cases}1, & j=m\\ 0, & j\neq m\end{cases} \quad \cdots\cdots (61)$$

로 된다. (44)와 (45)로 부터 $P(\mathrm{I})$와 $P(\mathrm{I\,II})$는

$$P(\mathrm{I})=q_2^m(1-q_1^n)+\frac{1}{2\pi i}\int_l\Phi_{11}(-u)\Phi_{21}(u)\frac{du}{u} \quad \cdots\cdots (62)$$

$$P(\mathrm{I\,II})=q_1^n q_2^m \quad \cdots\cdots (63)$$

이다. 여기서 $\Phi_{11}(u)$, $\Phi_{21}(u)$는 (51), (52)로 부터

$$\Phi_{11}(u)=\left\{p_1\varphi_1(u)/[1-q_1\varphi_1(u)]\right\}\left\{1-[q_1\varphi_1(u)]^n\right\} \quad \cdots\cdots (64)$$

$$\Phi_{21}(u)=\left\{p_2\varphi_2(u)/\left[1-q_2\varphi_2(u)\right]\right\}\left\{1-\left[q_2\varphi_2(u)\right]^m\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (65)$$

이다. (62～65)로 부터 참가자 1이 n개 참가자 2가 무한개, 참가자 2가 m개와 참가자 1이 무한개의 탄알을 가진 경우도 쉽게 구할 수 있다. 그리고 참가자가 n개의 탄약을 가진 경우와 무한개의 탄약을 가진 경우의 두가지 승율에 있어서 母數가 얼마나 영향을 미치는 가를 평가할 수 있다.

3－2. 制限된 時間

앞에서 제한된 탄약의 Fundamental pole에 대하여 알아 보았다. 시간이 제한된 Fundamental duel의 각 참가자의 승율 및 시간제한의 効果에 대하여 알아보기로 한다.

먼저 발사시간 밀도함수가 연속분포를 따르고 제한된 시간이 확률분포를 따르는 경우에 관하여 알아보자. $g(t)$를 제한시간 밀도함수, $g(t)$의 특성함수를 $\theta(u)$, t_l을 제한된 시간이라 정의한다.

〔定理 4〕 制限된 時間의 Fundamental duel에서 참가자 1의 승율은〔2〕

$$P(\mathrm{I})=p\left[t_1<t_2,\ t_1<t_l\right] \quad \cdots\cdots\cdots (66,\mathrm{a})$$

$$=\int_0^\infty\left\{h_1(t)\left[\int_{t_1}^\infty h_2(t_2)\,dt_2\right]\left[\int_{t_1}^\infty g(t_l)\,dt_l\right]\right\}dt_1 \quad \cdots\cdots (66,\mathrm{b})$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_u\frac{\theta(-u)}{u}\left[\int_l\frac{\Phi_1(u-w)\,\Phi_2(w)\,dw}{w}\right]du \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (66,\mathrm{c})$$

이고 비김확률은

$$P(\mathrm{I\,II})=P\left[t_l<t_1,\ t_l<t_2\right] \cdots (67,\mathrm{a})$$

$$=\int_0^\infty\left\{g(t_l)\left[\int_{t_l}^\infty h_1(t_1)\,dt_1\right]\left[\int_{t_l}^\infty h_2(t_2)\,dt_2\right]\right\}dt_l \quad \cdots\cdots (67,\mathrm{b})$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_u\frac{\Phi_1(-u)}{u}\left[\int_l\frac{\theta(u-w)\,\Phi_2(w)}{w}\,dw\right]du \cdots (67,\mathrm{c})$$

이다. 그리고

$$P(\mathrm{I})+P(\mathrm{II})+P(\mathrm{I\,II})=1 \quad \cdots\cdots\cdots (68)$$

이다. 여기서 t_1, t_2는 $h_1(t_1)$, $h_2(t_2)$의 변수이다. □

證明. 참가자 1의 승율 $P(\mathrm{I})$은 (14)를 이용하여 (15)의 유도과정과 같이하면

$$P(\mathrm{I})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left\{\int_0^\infty e^{-iut}\left[\int_{t_l}^\infty g(t_l)\,dt_l\right]dt_1\right\}\times\left\{\int_0^\infty e^{iut}h_1(t_1)\left[\int_{t_1}^\infty h_2(t_2)\,dt_2\right]dt_1\right\}du \quad \cdots\cdots (69)$$

를 얻는다. (69)에서 $\int_0^\infty e^{-iut}\left[\int_{t_1}^\infty g(t_l)\,dt_l\right]dt_1$은 (16)과 같은 방법으로 구하면 $\left[\theta(-u)-1\right]/(-iu)$이다. 그리고

$$\int_{-\infty}^\infty e^{iut}f_1(t)\,f_2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\varphi_1(u-w)\,\varphi_1(w)\,dw \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (67)$$

의 성질을 이용하여 (69)의 $\int_0^\infty e^{-iut}h_1(t_1)\left[\int_{t_1}^\infty h_2(t_2)\,dt_2\right]dt_1$를 변형하면

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\Phi_1(u-w)\left\{\int_0^\infty e^{iut}\left[\int_{t_1}^\infty h_2(t_2)\,dt_2\right]dt_1\right\}dw \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (71)$$

가 되어 (71)의 {　}를 (16)과 같이 고치면 (71)은

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{\Phi_1(u-w)\left[\Phi(w)-1\right]}{iw}\,dw \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (72)$$

이다. (71)과 (72)에 의해 (69)는

$$P(\mathrm{I})=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\theta(-u)-1}{u}\left\{\int_{-\infty}^\infty\frac{\Phi_1(u-w)\left[\Phi_2(w)-1\right]}{w}\,dw\right\}d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (73)$$

로 된다. (73)은 (18), (19)의 유도과정과 같은 방법으로 구하면 (66, c)를 얻는다.

비길확률은 $P(\text{I II}) = p\,[\,t_l < t_1;\ t_l < t_2\,]$ 를 $P(\text{I})$와 비교할 때 t_l과 t_1이 서로 바꾸어진 식이므로 $P(\text{I})$의 유도과정과 같이 하면 (67. c)를 얻는다. △

應用 6. 발사시간 밀도함수가 $f_1(t) = r_1 e^{-r_1 t}$, $f_2(t) = r_2 e^{-r_2 t}$이고 제한시간 밀도함수는 $g(t) = 1/\lambda \circ \exp(-t/\lambda)$이다. (21)과 (22)로 부터 $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \Phi_1(u), \Phi_2(u)$를 얻고 $\theta(u) = 1/(1-i\lambda u)$이다. (66, c)로 부터

$$P(\text{I}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_u \frac{1}{(1+i\lambda u)\,u} \left[\int_l \frac{p_1 r_1}{p_1 r_1 - i(u-w)} \circ \frac{p_2 r_2}{p_2 r_2 - iw} \circ \frac{dw}{w}\right] du$$

이다. Residue 理論에 의하여 풀면, 참가자 1의 승율은

$$P(\text{I}) = p_1 r_1 / [\,p_1 r_1 + p_2 r_2 + (1/\lambda)\,] \quad \cdots\cdots (74)$$

이고 비길확률은

$$P(\text{I II}) = \frac{\frac{1}{\lambda}}{p_1 r_1 + p_2 r_2 + \frac{1}{\lambda}} \quad \cdots\cdots (75)$$

이다. Fundamental duel의 $P(\text{I})$와 비교할 때 [(24)참조] Fundamental duel의 $P(\text{I})$를 $P(\text{I})_f$라 하면

$$P(\text{I})/P(\text{I})_f = [\lambda(p_1 r_1 + p_2 r_2)]/[\lambda(p_1 r_1 + p_2 r_2) + 1] \cdots (76)$$

을 얻는다.

또한 $g(t)$ 대신 λ라는 고정된 시간이면 $g(t) = \delta(t-\lambda)$라는 Dirac delta 함수가 되고 그 특성함수 $\theta(u) = e^{i\lambda u}$가 된다.

應用 7. 발사시간 밀도함수가 $f_1(t) = r_1 e^{-r_1 t}$, $f_2(t) = r_2 e^{-r_2 t}$이고 제한된 시간이 λ라면 應用 6. 과 같은 방법으로 풀면 참가자 1의 승율은

$$P(\text{I}) = \frac{p_1 r_1}{p_1 r_1 + p_2 r_2}\left\{1 - \exp[-(p_1 r_1 + p_2 r_2)\lambda]\right\} \quad \cdots\cdots (77)$$

이고 비길확률은

$$P(\text{I II}) = \exp[-(p_1 r_1 + p_2 r_2)\lambda] \quad \cdots\cdots (78)$$

이다. Fundamental duel의 $P(\text{I})$를 $P(\text{I})_f$라 하면

$$P(\text{I})/P(\text{I})_f = \left\{1 - \exp[1-(p_1 r_1 + p_2 r_2)\lambda]\right\} \cdots\cdots (79)$$

을 얻는다. (79)로 부터 제한시간의 효과를 알 수 있다.

應用 6. 과 應用 7. 을 통하여 얻은 결과의 분석으로서 (76)과 (79)에서 제한시간의 효과를 알아보면 그림 4. 와 같다. 그림 4. 에서 보면 고정된 제한시간이 임의제한시간보다 효과가 더 적다.

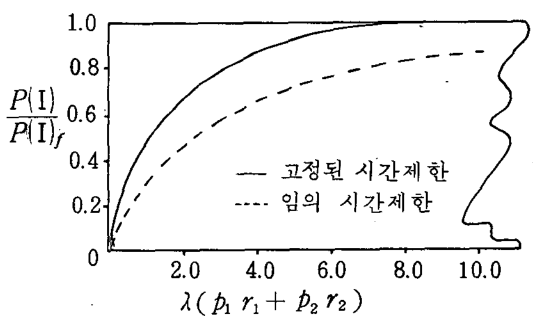

그림 4. 제한시간 Fundamental duel의 효과(참고문헌 2)

앞에서는 발사시간이 확률분포로 주어지는 경우 였으나 고정될 경우에 있어서 각 참가자의 발사간격이 a_1, b_1이고 그 서로 素가 a, b일 때 참가자 1이 j번 발사하면 참가자 2는 $[ja/b]$번 발사한다. [ ]는 가우스 기호이다.

[定理 5] 고정된 발사시간에 제한시간분포가 $g(t)$일 때 참가자 1의 승율은

$$P(\text{I}) = p\,[\,t_1 < t_2,\ t_1 < t_l\,] = p_1 \sum_{j=1}^{j=\infty} q_1^{j-1} q_2^{[ja/b]} \int_{ja_1}^{\infty} g(t)\,dt \quad \cdots\cdots (80)$$

이고 참가자 2의 승율은

$$P(\text{II}) = P_2 \sum_{j=1}^{j=\infty} q_2^{j-1} q_1^{[jb/a]} \int_{jb_1}^{\infty} g(t)\,dt \quad \cdots\cdots (81)$$

이고 비길확률은

$$P(\mathrm{I\,II}) = 1 - P(\mathrm{I}) - P(\mathrm{II})$$

이다. □

應用 8. $a_1 = cb_1$ (즉 $a = c$, $b = 1$), $g(t) = [1/\lambda] \cdot \exp[-t/\lambda]$이면 참가자 1의 승율은

$$P(\mathrm{I}) = p_1 q_2^c / [\exp(a_1/\lambda) - q_1 q_2^c] \quad \cdots\cdots (83)$$

이다. (33)과 비교하여 보면

$$P(\mathrm{I})/P(\mathrm{I})_f = (1 - q_1 q_2^c)/[\exp(a_1/\lambda) - q_1 q_2^c] \quad \cdots\cdots (84)$$

의 효과가 있다.

또한 제한시간이 λ로 고정되면 참가자 1의 승율은

$$P(\mathrm{I}) = \begin{cases} p_1 \sum_{j=1}^{j=[\lambda/a_1]} q_1^{j-1} q_2^{[ja/b]}, & \lambda \geq a_1 \\ 0, & \lambda < a_1 \end{cases} \quad \cdots\cdots (85)$$

이고 참가자 2의 승율은

$$P(\mathrm{II}) = \begin{cases} p_2 \sum_{j=1}^{j=[\lambda/b_1]} q_2^{j-1} q_1^{[jb/a]}, & \lambda \geq b_1 \\ 0, & \lambda < b \end{cases} \quad \cdots\cdots (86)$$

이다. (85), (86)에서 [ ]는 가우스 기호이다.

應用 9. $a_1 = cb_1$이고 제한시간이 λ이면 (85)로 부터

$$P(\mathrm{I}) = p_1 \sum_{j=1}^{j=[\lambda/a_1]} q_1^{j-1} q_2^{jc}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{p_1 q_2^c \{1 - (q_1 q_2)^{[\lambda/a_1]}\}}{1 - q_1 q_2^c}, & \lambda \geq a_1 \\ 0, & \lambda < a_1 \end{cases} \quad \cdots\cdots (87)$$

이다. (33)과 (87)을 비교하면

$$P(\mathrm{I})/P(\mathrm{I})_f = 1 - (q_1 q_2^c)^{[\lambda/a_1]} \cdots (88)$$

이다. $P(\mathrm{I})_f$는 Fundamental duel의 $P(\mathrm{I})$이고 [ ]는 가우스 기호이다.

4. Fundamental duel 의 확장

2절과 3절에서 Fundamental duel과 시간과 탄약이 제한된 Fundamental duel에 관하여 알아 보았다. 이 외에도 확률적 결투상황에 영향을 미치는 요소로 초기 동시발사, 기습공격등의 초기조건의 변화, 완전은폐, 비행시간, 이동성, 발사횟수에 따른 살해확률의 변화, 탄약공급등이 고려되었다.

먼저 초기조건의 변화로 첫 발사를 동시에 하는 경우, 전술적으로 평등하여 첫 공격할 확률이 각각 0.5인 경우는 다음 定理들이 성립한다 [9].

[定理 6] 장진한 상태에서 동시에 발사하면 참가자 1과 2의 승율 및 비길확률은

$$P(\mathrm{I}) = p_1 q_2 + q_1 q_2 P(\mathrm{I})_f \quad \cdots\cdots (89)$$

$$P(\mathrm{II}) = p_2 q_1 + q_1 q_2 P(\mathrm{II})_f \quad \cdots\cdots (90)$$

$$P(\mathrm{I\,II}) = p_1 p_2 \quad \cdots\cdots (91)$$

이다. □

應用 10. $f_1(t) = r_1 e^{-r_1 t}$, $f_2(t) = r_2 e^{-r_2 t}$이고 살해확률은 p_1, p_2이면 첫 발사를 동시에 하는 경우의 참가자 1의 승율은

$$P(\mathrm{I}) = p_1 q_2 (p_2 r_2 + r_1)/(p_1 r_1 + p_2 r_2) \quad \cdots\cdots (92)$$

이다.

[定理 7] 첫 발사를 할 확률이 0.5인 경우 각 참가자의 승율은

$$P(\mathrm{I}) = \frac{1}{2} [p_1 + q_1 P(\mathrm{I})_f] + \frac{1}{2} q_2 P(\mathrm{I})_f \quad \cdots\cdots (93)$$

$$P(\mathrm{II}) = 1 - P(\mathrm{I}) \quad \cdots\cdots (94)$$

이다. □

또한 초기 기습공격이 가능한 경우로 상대방을 탐지함에 따라 상대방에게 일방적인 공격을 할 수 있는 시간 t_s를 고려하여 본다 [9]. t_s는 확률밀도함수 $g(t_s)$를 따르는 변수로 t_s가 양수이면 참가자 1의 기습공격시간이고 음수이면 참가자 2의 기습공격시간이라 한다. 그리하여 Fundamental duel에서 참가자 2가

참가자 1 을 살해할 시간 t_2 은 기습공격을 고려하면 t_2+t_s로 된다. 따라서 Fundamental duel 의 $\Phi_2(u)$는 $\Phi_2(u)\theta(u)$로 된다. $\theta(u)$는 $g(t_s)$의 특성함수이다.

〔定理 8〕 초기 기습공격시간 함수 $g(t_s)$와 그 특성함수가 $\theta(u)$라 하면 참가자 1의 승율은

$$P(\mathrm{I}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(-u)\ \Phi_2(u)\ \theta(u)\ \frac{du}{u} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (95, \mathrm{a})$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_l \Phi_1(-u)\,\Phi_2(u)\theta(u)\ \frac{du}{u} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (95, \mathrm{b})$$

이고, 참가자 2 의 승율은

$$P(\mathrm{II}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_u \Phi_1(-u)\,\Phi_2(u)\theta(u)\ \frac{du}{u} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (96)$$

이다. □

그리고 제한된 탄약을 가지고 결투를 할 때 탄약이 다 떨어지면 완전한 은폐 또는 철수가 가능하다고 하면 (43) 의 $G_2(t)$ 대신 $G_{21}(t)$를 대입하면 된다〔1〕.

〔定理 9〕 완전은폐가 가능하다면 참가자 1 의 승율은

$$P(\mathrm{I}) = \int_0^{\infty} G_{21}(t)\ h_{11}(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots (97, \mathrm{a})$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_l \Phi_{11}(-u)\ \Phi_{21}(u)\ \frac{du}{u} \quad \cdots\cdots\cdots (97, \mathrm{b})$$

이고 서로 비길확률은

$$P(\mathrm{I\,II}) = \sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k\ q_1^{\,k} + \sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j\ q_2^{\,j} - \sum_{k=0}^{k=\infty}\alpha_k\ q_1^{\,k}\sum_{j=0}^{j=\infty}\beta_j\ q_2^{\,j} \cdots (98)$$

이다. □

그리고 Fundamental duel 에서는 발사하여 목표지점에 도달하는 비행시간을 무시하였다. 비행시간을 고려할 때 각 참가자의 승율에 얼마만한 영향을 미치는 가를 알아본다

t_1, t_2를 참가자 1 과 2 가 살해탄알 발사시각, λ_1, λ_2를 참가자 1 과 2 의 비행시간이라 하면 $P(\mathrm{I})$는

$$P(\mathrm{I}) = P(t_1+\lambda_1 < t_2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (99)$$

이다. $g_i(t)$, $i=1, 2$를 참가자 1 과 2 의 비행시간분포라 하면 $\theta_i(u)$, $i=1, 2$를 그 특성함수라 하자. 그러면 참가자 i 의 승율은 (7, b), (8, b) 의 $h_i(t)$ 대신 $h_i(t)*g_i(t)$, 그 특성함수 $\Phi_i(u)$ 대신 $\Phi_i(u)\ \theta_i(u)$를 대입하면 얻어진다.

〔定理 10〕 참가자 1 과 2 의 비행시간분포의 특성함수가 $\theta_i(u)$이고, 발사가 任意일 때 참가자 1 의 승율은

$$P(\mathrm{I}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\theta_1(-u)\ \Phi_1(-u)\ \Phi_2(u)\ \frac{du}{u} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (100, \mathrm{a})$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_l \theta_1(-u)\ \Phi_1(-u)\,\Phi_2(u)\ \frac{du}{u} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (100, \mathrm{b})$$

이고, 참가자 2 의 승율은

$$P(\mathrm{II}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1(-u)\ \theta_2(u)\Phi_2(u)\frac{du}{u} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (101, \mathrm{a})$$

$$1 - \frac{1}{2\pi i}\int_l \Phi_1(-u)\ \theta_2(u)\Phi_2(u)\ \frac{du}{u} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (101, \mathrm{b})$$

이다. 비길확률은

$$P(\mathrm{I\,II}) = 1 - P(\mathrm{I}) - P(\mathrm{II}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (102)$$

이다. □

應用 10. $f_1(t) = r_1\,e^{-r_1 t}$, $f_2(t) = r_2\,e^{-r_2 t}$, $g_1(t) = (1/\lambda_1)\cdot\exp(-t/\lambda_1)$, $g_2(t) = (1/\lambda_1)\cdot\exp(-t/\lambda_2)$이면 應用 1. 로 부터 $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$를 얻고 $\theta_1(u) = 1/(1-i\lambda_1 u)$, $\theta_2(u) = 1/(1-i\lambda_2 u)$이다. (100, b)로부터 참가자 1 의 승율은

$$P(\mathrm{I}) = \frac{1}{1+\lambda_1\,p_2\,r_2}\cdot\frac{p_1\,r_1}{p_1\,r_1+p_2\,r_2} \cdots (103)$$

이고, Fundamental duel과 비교하면

$$P(\mathrm{I}) = \frac{1}{1+\lambda_1\,p_2\,r_2}\ P(\mathrm{I})_f \quad \cdots\cdots\cdots (104)$$

이다.

만약 비행시간이 λ로 고정된다면 $\theta(u) = \exp[i\lambda t]$가 된다. 비행시간이 λ로 고정되면 (100, b) 로 부터 참가자 1 의 승율은

$$P(\mathrm{I}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l} \exp(-i\lambda_1 u)\, \Phi_1(-u)\, \Phi_2(u)\, \frac{du}{u} \quad \cdots\cdots (105)$$

로 된다.

應用 11. 비행시간이 λ_1, λ_2 로 각 참가자에게 고정되고 應用 10. 과 같은 발사분포를 따른다면 참가자 1 의 승율은

$$P(\mathrm{I}) = \exp(-\lambda_1 p_2 r_2) \cdot \frac{p_1 r_1}{p_1 r_1 + p_2 r_2} \quad \cdots\cdots (106)$$

이고 Fundamental duel과 비교하면

$$P(\mathrm{I}) = \exp(-\lambda_1 p_2 r_2)\, P(\mathrm{I})_f \quad \cdots\cdots (107)$$

의 관계식을 얻는다.

그리고 발사하여 그 탄알이 목표지점에 도달한 시간부터 발사분포에 의하여 발사를 한다면 살해시간 밀도함수는

$$h_i(t) = p_i \sum_{j=1}^{j=\infty} q_i^{j-1}\, f_i^{j*}(t) * g_i^{(j-1)*}(t) \quad \cdots\cdots (108)$$

이 된다. 따라서 $h_i(t)$ 의 특성함수는

$$\Phi_1(u) = p_1 \varphi_1(u) / [1 - q_1 \varphi_1(u)\theta_1(u)] \quad \cdots\cdots (109)$$

$$\Phi_2(u) = p_2 \varphi_2(u) / [1 - q_2 \varphi_2(u)\theta_2(u)] \quad \cdots\cdots (110)$$

을 (100), (101)에 대입하면 각 참가자의 승율 및 비길확률을 얻는다.

5. 그 외의 Stochastic duel 과 結論

지금까지 Fundamental duel과 제한된 탄약과 시간의 Fundamental duel 그리고 초기조건의 변화, 완전은폐, 비행시간이 고려된 모델에 관하여 알아 보았다. 이러한 모델외에 무기고장을 고려한 모델로 Tompson [31]이 제한된 시간모델에서 제한된 시간함수를 무기의 수명함수로, 제한된 탄약모델에서 보유탄약의 확률을 무기의 고장확률로 해석하였다. 또한 Bhashyam [13]은 R대의 무기를 가지고 하나의 무기를 사용하되, 고장나면 즉각적으로 다른 무기와 대체하여 결투를 하는 경우로 탄약이 제한된 조건까지도 고려하였으나 발사밀도 함수와 고장함수가 음의 지수분포를 따르는 경우에 국한했다.

일정한 살해확률이 아니라 변하는 살해확률을 갖는 모델이 연구되었는 데 Schoderbeck [29]은 발사밀도함수가 지수분포일 때 살해확률을 시간의 함수로, Bhashyam과 Singh [15], Ancker [5], William [35]은 살해확률을 발사횟수의 함수로 나타냈다. 위치변경을 고려한 모델로는 Ancker와 William [10], Schoderbeck [28, 29], 일정한 치사량(lethal dóse)이 주어진 모델로는 Bhashyam [14]에 의해 개발되었다. 또한 시간과 발사횟수에 따른 손상(damage)을 갖는 모델은 Nagabhushanam [25]에 의해 개발되었다.

참가자가 각각 한 사람이 아니고 셋 이상인 경우의 결투모델로는 셋, 넷일 때 이산적 발사는 Ancker와 William [10], 여러명일 때는 Harris [20], William [34]에 의해 연구되었다.

그리고 확률적 결투모델의 分析的 연구가 많이 되었다. 한발의 명중에 살해될 때 이기는데 필요한 발사횟수에 관해서는 Ancker와 Gafarian [7], Barfoot [12]에 의해, 이기는 데 소요되는 시간에 관해서는 Ancker와 Gafarian [8]에 의해 연구되었다. 한발의 명중에 파괴되지 않고 탱크와 같이 일정한 치사량이 요구될 때 살해하기 위하여 필요한 발사횟수에 관해 Bonder [16], Kimbleton [23], Rustagi [27], 살해하기 위하여 걸리는 시간에 관해 Barfoot [11], Bonder [17], Kimbleton [23]에 의해서 연구되었다.

위의 여러 확률적 결투모델에 관하여 간략히 도표로 나타내면 아래 도표 1. 과 같다.

1. 각 참가자가 하나인 경우
   - o 무기고장 (13, 31)
   - o 변화하는 살해확률 (5, 15, 29, 35)
   - o 비행시간 (3, 22)
   - o 위치변경 (이동성) (10, 28, 29)
   - o 치사량 (14)
   - o 기습공격 (9, 12)

○ 손상 (damage) (25) 2. 참가자가 셋 이상인 경우 ○ 셋, 넷의 이산적 발사 (10) ○ 각 참가자가 많은 경우 (20, 34) 3. 分析모델 ○ 한발의 명중에 살해되는 경우의 발사횟수 (7, 12) ○ 한발의 명중에 살해되는 경우의 진행시간 (8) ○ 치사량을 갖을 때 살해하는 데 필요한 발사횟수 (16, 23, 27) ○ 치사량을 갖을 때 살해하는 데 필요한 시간 (11, 17, 23) ( )의 숫자는 참고문헌번호

도표 1. *Fundamental duel*의 확장 및 分析모델

이제까지 알아본 Stochastic duel은 발사율·정확성·탄약·진행시간·이동성 등의 母数(parameters)와 변수(Variables)들이 勝率에 미치는 영향을 分析함에 의하여 장비시스템의 평가와 전술·전략적인 평가에 응용할 수 있다. 또한 전투시간과 필요한 탄약을 추정함에 의하여 연료량·재고수준·재공급량등의 장비보급관리에 응용할 수 있다. Stochastic duel의 응용은 군사적 응용외에 두 기계의 수명비교에도 응용가능 하다.

시간과 탄약을 동시에 고려한 모델, 탄약이 제한된 duel의 진행시간, 위치변경(displacement) 모델의 확장, 정확성이 지수분포를 따르는 시간의 함수가 아니라 일반적인 시간의 함수를 갖는 모델등이 앞으로 연구를 要한다. 그리고 모델개발과 더불어 군사·경제·사회의 여러 방면으로 결투모델의 응용범위를 확장시키는 일도 중요한 과제중의 하나다.

参考文献

1. Ancker, C.J., Jr., "Stochastic duels with limited ammunition supply," Operations Research, Vol. 12, No. 1 (1964), pp. 38-50.
2. Ancker, C.J., Jr., "Stochastic duels with limited time duration," Canadian Operational Research Society, Vol. 4, No. 2 (1966), pp. 69-81.
3. Ancker, C.J., Jr., "Stochastic duels with time-flight included," Opsearch, Vol. 3, No. 2 (1966), pp. 71-92.
4. Ancker, C.J., Jr., "The status of developments in the theory of stochastic duels-II," Operations Research, Vol. 15, No. 3 (1967), pp. 388-406.
5. Ancker, C.J., Jr., "Stochastic duels with round-dependent hit probability," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 22, No. 3 (1975), pp. 575-583.
6. Ancker, C.J., Jr., "Stochastic duels with burst," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 23, No. 4 (1976), pp. 703-711.
7. Ancker, C.J., Jr., And Gafarian, A.V., "The distribution of rounds fired in stochastic duels," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 11, No. 4 (1964), pp. 303-327.
8. Ancker, C.J., Jr., And Gafarian, A.V., "The distribution of the time duration of stochastic duels," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 12, No. 3 (1965), pp. 275-294.
9. Ancker, C.J., Jr., And Williams, T., "Stochastic duels." Operations Research, Vol. 11, No. 5 (1963), pp. 803-817.
10. Ancker, C.J., Jr., And Williams, "Some discrete processes in the theory of stochastic duels," Operations Research, Vol. 13, No. 2 (1965), pp. 202-216
11. Barfoot, C.B., "The Lanchester attrition

rate coefficient : Some Comment on Seth Bonder's paper and a suggested alternate method," Operations Research, Vol. 17, No. 5 (1969), pp. 888 – 894.

12. Barfoot, C.B., "Markov duels, "Operations Research, Vol. 22, No. 2 (1974), pp. 318 – 330.

13. Bhashyam, N., "Stochastic duels with nonrepairable weapons," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 17, No. 1 (1970), pp. 121 – 129.

14. Bhashyam, N., "Stochastic duels with lethal does," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 17, No. 3 (1970), pp. 397 – 405.

15. Bhashyam, N., And Singh, No, "Stochastic duels with varying single shot kill probabilities," Operations Research, Vol. 15, No. 2 (1967), pp. 233 – 244.

16. Bonder, S., "The lanchester attrition–rate coefficient," Operations Research, Vol. 15, No. 2 (1967), pp. 221–232.

17. Bonder, S., "The mean lanchester attrition – rate," Operations Research, Vol. 18, No. 1 (1970), pp. 179 – 181.

18. Cramer, H., Mathematical Methods of Statistics, princeton university press, princeton, 1946.

19. Feller, W., An introduction to probability theory and its applications, Vol. II., John Wiley, 1966.

20. Harris, T.J., "Many versus many stochastic duels," Caywood – Schiller Associates Report, Chicago, Illinois, Fall 1967, 18 pp.

21. Helmbold, R.L., "A 'universal' attrition model," Operations Research, Vol. 14 (1966), pp. 624 – 635.

22. Jaiswal, N.K. And Bhashyam, N., "Stochastic duels with flight time and replenishment," Opsearch, Vol. 3, No. 4 (1966)

23. Kimbleton, S.R., "Attrition rates for weapons with markov – dependent fire," Operations Research, Vol. 19, No. 3 (1971), pp. 698 – 706.

24. Lipschut, s., Complex Variable, Schaum's Outline series, Mcgraw – Hill, New York, 1974.

25. Nagabhushanam, A. And Jain, G.C., "Stochastic duels with damage, "Operations Research Vol. 20, No. 2 (1972), pp. 350 – 356.

26. Robertson, J.I., "A method of Computing survival probabilities of several targets versus several weapons," Operations Research, Vol. 4, No. 4 (1956), pp. 546-557.

27. Rustagi, J.S. And Srivasta, R.C., "Parameter estimation in a markov – dependent firing distribution," Operations Research, Vol. 16, No. 6 (1968), pp. 1222 – 1227.

28. Schoderbeck, J.J., "Some weapon system survival probability models – I, Fixed time between firing," Operations Research, Vol. 10, No. 2 (1962), pp. 155 – 167.

29. Schoderbeck, J.J., "Some weapon system survival probability models – II, Random time between firing," Operations Research, Vol. 10, No. 2 (1962), pp. 168-179.

30. Shapley, L., "Stochastic games", pro. Nat. Acad. Sci., Vol. 39 (1953), pp. 1095-1100.

31. Thompson, D.E., "Stochastic duels involving reliability," Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 19, No. 1 (1972), pp. 145 – 148.

32. Titchmarsh, E.C., Introduction to the theory of Fouries Integrals, Oxford University Press, 1948.

33. Wilks,s.s., Mathematical Statistics, John－Wiley & Sons, Inc, 1962.

34. Williams, T., "Stochastic duels－II, "Sp－1017／003／007 Sep. 1963, System development corporation, Santa Monica, California.

35. Williams, T., "Stochastic duels－III, "Sp－1017／006／00, 22 June 1964, System development Corporation, Santa Monica, California, 72 pp.