<研究論文>

Journal of Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.5, No.1 June 1979

不良率의 事前分布를 考慮한 連續生産型 샘플링檢査

(Continuous Sampling Plans with Prior Distribution)

尹 完 澈*
裵 道 善**

Abstract

The concept of AOQL in designing Dodge's continuous sampling plans is modified to include probabilistic consideration reflecting the prior knowledge about the process average fraction defectives, and a new design criterion called $AOQL_\delta$ which eliminates some of the drawbacks of the AOQL criterion is proposed. $AOQL_\delta$ approach provides more economical sampling plans in many cases, and can be used even when only limited amount of prior information is available.

I 序 論

大量生産은 그 製造過程에 있어서 連續生産의 形態를 取하는 境遇가 많으며 生産手段의 急速한 機械化自動化가 이를 더욱 促進하고 있다. 連續生産體系에서의 샘플링檢査方式은 1943年에 Dodge에 依하여 처음 發表되어 CSP-1으로 命名되었는 바 [1],[2], 이것은 매우 簡便하고도 效率性있는 檢査方式으로 認定되어 널리 使用되어 왔다. 그 後 CSP-1의 檢査方式을 一部 變形한 두가지의 새로운 方式 CSP-2, CSP-3가 Dodge와 Torrey에 依하여 發表되었고 [3], 1955년에는 Lieberman과 Solomon의 共同硏究에 依하여 多股階 連續生產型 샘플링檢査(Multi-level Continuous Sampling Plans)[5]로 發展되기에 이르렀다.

Dodge는 그의 첫 論文[1]에서 平均出檢品質(AOQ)을 計算하였으며 그 上限値 即 平均出檢品質限界(AOQL)를 品質保證의 基準値로 삼아 그에 따른 檢査計劃을 使用者가 選擇하도록 하였다. 그 후 여러 사람에 依한 檢査方式의 變形에도 이 AOQL 保證方式은 그대로 받아들여져 使用되었다. 그러나 이와같이 널리 使用되고 있는 連續生產에서의 AOQL 保證方式은 몇가지 問題點을 갖고 있으며, 一般的으로 品質保證의 基準値가 어떤 값으로 指定된 後 그에 따라 檢査計劃을 決定하게 된다는 것을 考慮할 때, 保證方式의 改善은 매우 重要한 課題로 생각된다.

本 硏究는 AOQL의 槪念에 工程平均不良率의 事前分布를 反映시켜 一定한 確率的 制約을 줌으로써 보다 現實的이고 또한 經濟的인 새로운 保證方式을 提案하고 있다. 또 이를 設計基準으로 하여 檢査計劃을 樹立하는 過程을 說明하며 工程平均不良率의 事前分布를 모를 境遇의 檢査計劃 設計에 對하여도 說明한다. 本 硏究는 가장 基本이 되며 널리 쓰이고 있는 CSP-1을 中心으로 論議를 進行하였으나 其他 多少 變形된 檢査方式에도 類似한 槪念으로 適用할 수 있을 것이다.

II. CSP-1의 槪要

連續生產型 샘플링檢査는 物品이 콘베이어 또는 其他 形態의 作業라인을 따라 生產되는 順序대로 檢査하는方式으로서 그 節次가 簡便하며 工程의 狀態에 따라 檢査水準이 有機的으로 變化하는 等 工程管理上의 長點도 있어, 連續生產形態의 比重이 큰 오늘날 그 效用性이 매우 높은 샘플링檢査方式이라 할 수 있다. 連續生產型 샘플링檢査는 非破壞實驗檢査를 하고 各個 物品의 品質이 良·不良의 二種으로 分類되는 物品에 使

*現代重工業(株)
**韓國科學院

用되며 檢査 도중 發見된 不良品은 缺點을 고쳐주거나 良好品으로 바꾸는 것을 原則으로 하고 있다. 그 基本이 되는 CSP-1의 檢査方式을 略術하면 다음과 같다.

1) 物品을 100% 모두 檢査하되 連續해서 良好品이 i個 發見되기까지 檢査를 계속한다.

2) i個의 物品이 連續하여 良好品으로 判定되면 100%檢査를 中斷하고 f의 比率로 샘플링檢査를 實施한다.

3) 만일 어느 採取된 物品이 不良으로 判定되면 즉시 100%檢査를 始作한다. 즉 1)로 돌아간다.

4) 모든 發見된 不良品은 그 缺點을 고쳐주거나 良好品으로 바꾸어 넣는다.

위에서부터 CSP-1의 檢査計劃은 i와 f의 값으로 決定되어짐을 알 수 있다. 즉 CSP-1에서 檢査計劃을 樹立한다는 것은 i,f의 값을 決定한다는 것과 같은 것이다.

이제 i,f의 값을 결정하는 방법에 대해 설명하고자 한다. 工程平均不良率이 p이라고 할 때, u를 不良品이 發見된 以後 100%檢査를 받을 物品 個數의 期待値라 하면 Dodge의 計算에 依해

$$u=\frac{1-q^i}{pq^i},\ \text{단}\ q=1-p \tag{1}$$

이고, 샘플링檢査를 始作한 後 첫 不良品이 發見되기까지 檢査與否를 막론하고 샘플링檢査를 거쳐갈 物品 個數의 期待値를 v라 하면

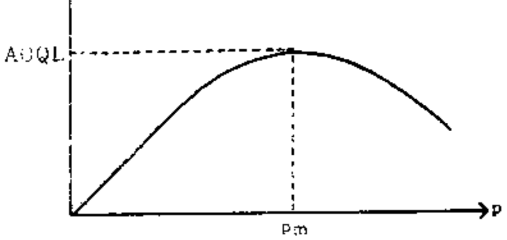
$$v=\frac{1}{fp} \tag{2}$$

이 된다. 그러면 平均檢査比率(Average Fraction Inspected ; 以下 AFI라 칭함)은

$$\mathrm{AFI}=\frac{u+fv}{u+v} \tag{3}$$

$$=\frac{f}{f+(1-f)q^i} \tag{4}$$

로 구하여지며 平均出檢品質(Average Outgoing Quality ; 以下 AOQ라 칭함)은



〈그림 1〉 AOQ 曲線과 AOQL

$$\mathrm{AOQ}=p(1-\mathrm{AFI})$$

$$=p\left(1-\frac{f}{f+(1-f)q^i}\right) \tag{2}$$

가 된다. 이 AOQ는 〈그림 1〉과 같이 最大値 AOQL$=\max_p$AOQ를 갖는다. 즉 위의 (5)式이 $p=p_m$일 때 最大가 된다고 하면

$$\mathrm{AOQL}=p_m\left[1-\frac{f}{f+(1-f)q_m{}^i}\right] \tag{6}$$

단 $q_m=1-p_m$

으로 표시된다.

한편 (5)式의 미분을 通하여 p_m이 方程式

$$(i+1)p_m-1=\frac{1-f}{f}(1-p_m)^{i+1} \tag{7}$$

의 解임을 알 수 있고 (6)式과 (7)式으로부터

$$\mathrm{AOQL}=\frac{1-f}{fi}(1-p_m)^{i+1} \tag{8}$$

의 關係를 얻게 되어 指定된 AOQL에 對하여 i,f 중 어느 하나만 먼저 定해주면 나머지 하나를 구할 수 있다.

따라서 無數히 많은 i,f의 組合이 같은 AOQL 값을 갖게 되므로 이들로 이루어진 AOQL의 等價線이 그려진다[1]. 使用者는 指定된 AOQL의 等價線으로부터 適切한 i,f의 組合을 선택하게 되는데, 檢査員에게 割當되는 作業量 等을 考慮하여 선택하는 것이 常例이며 또 i는 使用하기 간편한 수로 하고 너무 작은 f값은 部分的으로 나쁜 品質을 捕捉하지 못할 위험이 높아 이를 피할 것이 권고되고 있다.

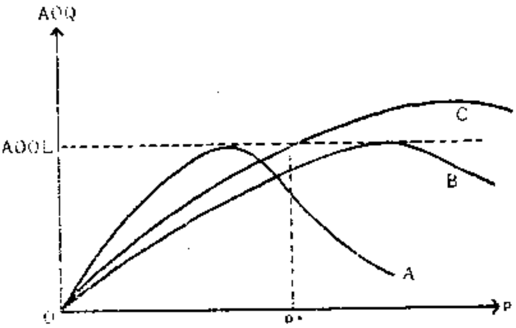
이와 같이 指定된 AOQL값을 갖는 여러 i, f의 組合들 중에서 使用上의 便宜에 따라 선택하는 것은 같은 AOQL값을 갖는 i,f의 組合을 「同級」의 것으로 看做하기 때문이다. 그러나 工程平均不良率의 事前分布形態에 對한 情報의 內容에 따라서는 이를 同級으로 보기 어려운 境遇도 있으며 결과적으로 AOQL 槪念에 依한 檢査計劃의 設計가 非經濟的인 것으로 알려질 때도 있다. 그러므로 이러한 工程平均不良率의 事前分布에 關한 情報를 AOQL에 反映시키는 것은 保證方式의 現實性을 높인다는 面에서, 또 情報의 效果的인 活用이라는 面에서 意義있는 것이라 하겠다.

Ⅲ. AOQL$_g$ 保證方式

Ⅲ.1. 불량률의 事前分布를 아는 경우

實際에 있어서 工程平均不良率의 移動범위와 대강의 分布形態가 경험적으로 알려져 있는 境遇가 많으나 이러한 情報는 AOQL을 基準으로하여 檢査計劃을 設計하는 때에는 反映되지 못하므로 結果的으로 非經濟的인 檢査計劃이 되는 境遇가 적지 않다. AOQL 保證方式에서는 같은 AOQL값을 갖는 i,f의 組合들을 同級

의 것으로 看做하여 그 중 하나를 選擇하게 되어 있으나 工程平均不良率의 分布形態에 關한 情報에 따라서는 이들을 同級으로 보기 어려운 境遇가 있다는 事實이 다음 〈그림 2〉에 表現되어 있다. 즉 그림과 같이 檢

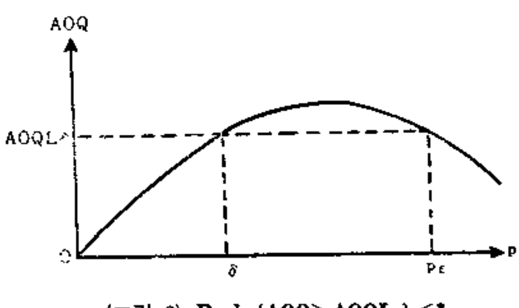


〈그림 2〉 檢査計劃 A,B,C의 AOQ 曲線

査計劃 A, B, C의 AOQ 曲線이 있다면 工程平均不良率에 對하여 아무 情報로 갖지 못한 狀況에서는 當然히 AOQL이 A와 같은 檢査計劃B를 A와 同級으로 看做하게 될 것이다. 그러나 만일 經驗으로부터 工程平均不良率이 p^*보다 클 可能性이 거의 없다는 것을 알고 있는 境遇에는 檢査計劃C를 A와 同級의 것으로 보는 것이 마땅하며 이 때 檢査計劃B는 그 AOQL보다는 p^*때의 AOQ값으로 評價되어야 할 것임을 알 수 있다. $AOQL_\delta$ 保證方式은 이런 原理에 工程平均不良率의 事前分布를 應用한 것이다. 여기서는 事前分布의 形態를 베타分布로 가정하였는데 이 베타分布는 母數의 선택에 따라 매우 伸縮性있는 形態를 지니므로 現實에 잘 附合될 수 있다.

이제 다음과 같이 기호를 定義한다.

p_δ ; i個의 物品이 連續하여 良好品으로 判定되었을 때, 工程平均不良率이 이보다 클 確率이 δ가 되는 不良率



〈그림 3〉 Prob. {AOQ>$AOQL_\delta$}<δ

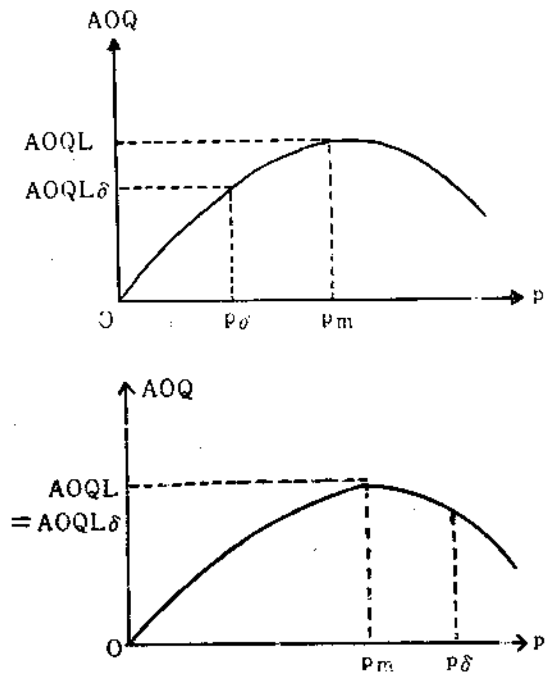
$AOQL_\delta$; 工程平均不良率이 $(0, p_\delta]$의 區間에 存在할 때 AOQ가 갖는 可能한 最大의 값

위와 같이 定義하면 i個의 連續된 良好品이 發見되었을 때 〈그림 3〉에서와 같이

$$\text{Prob.}\{AOQ > AOQL_\delta\} = \text{Prob.}\{p_\delta < p < p_\varepsilon\} < \text{Prob.}\{p > p_\delta\} = \delta$$

임을 알 수 있다.

이 關係를 엄밀히 表現하면 100%檢査에서 샘플링檢査로 넘어갈 때 $AOQL_\delta$보다 큰 AOQ를 誘發할 工程平均不良率에 놓여있을 확률이 δ보다 작다는 意味이다. 한가지 注意해야 할 點은 定義로부터 〈그림 4〉의 가에서와같이 $p_m > p_\delta$의 경우에는 $AOQL_\delta < AOQL$이지만, 〈그림 4〉의 나에서와 같이 $p_m \le p_\delta$의 경우에는 $AOQL_\delta = AOQL$이 된다는 것이다.



〈그림 4〉 AOQL과 $AOQL_\delta$

따라서 $p_\delta \ge p_m$되게 하는 i, f의 組合에 대하여는 AOQL 값을 그대로 $AOQL_\delta$로 使用하게 된다.

이제 工程平均不良率이 다음과 같이 베타分布를 한다고 가정한다.

$$f(p\,;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}, & 0<p<1,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

여기에서 $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,$

$\alpha>0,\ \beta>0.$

한편 i個의 物品이 連續하여 良好品일 確率은 $(1-p)^i$이므로 i個의 物品이 連續하여 良好品으로 判定되었을 때의 工程平均不良率의 事後確率密度函數는 베이

즈 定理(Bayes theorem)에 依하여

$$f(p\,;\,\alpha,\beta|i)=\frac{f(p\,;\,\alpha,\beta)(1-p)^i}{\int_0^1 f(p\,;\,\alpha,\beta)(1-p)^i dp} \qquad (9)$$

로 구해지고 이 중에서 分母는

$$\int_0^1 f(p\,;\,\alpha,\beta)(1-p)^i dp=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta+i-1}dp$$
$$=\frac{B(\alpha,\beta+i)}{B(\alpha,\beta)} \qquad (10)$$

과 같이 정리되므로 (9), (10)에서

$$f(p\,;\,\alpha,\beta|i)=\frac{1}{B(\alpha,\beta+i)}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta+i-1}$$
$$=f(p\,;\,\alpha,\beta+i) \qquad (11)$$

의 關係를 얻게 된다. 한편 p_δ의 定義는

$$\int_{p_\delta}^1 f(p\,;\,\alpha,\beta|i)dp=\delta \qquad (12)$$

이므로 여기에 (11)를 代入하고 變形하면

$$\int_0^{p_\delta} f(p\,;\,\alpha,\beta+i)dp=1-\delta \qquad (13)$$

의 式을 얻게 되므로 α, β, i가 주어지면 p_δ를 베타分布의 確率表에서 찾거나 직접 적분하여 찾을 수 있다.

그러면 (5)式으로부터 $p_\delta<p_m$일 때

$$\mathrm{AOQL}_\delta=p_\delta\left[1-\frac{f}{f+(1-f)(1-p_\delta)^i}\right] \qquad (14)$$

가 되고 이로부터

$$f=1-\frac{\mathrm{AOQL}_\delta}{\mathrm{AOQL}_\delta+(p_\delta-\mathrm{AOQL}_\delta)(1-p_\delta)^i} \qquad (15)$$

의 式을 얻으므로 AOQL_δ와 i를 定해주면 이에 맞는 f값을 구할 수 있다.

또 Dodge는 (5)式을 미분하여 극대값을 구하는 과정에서

$$(i+1)p_m-1=\frac{1-f}{f}(1-p_m)^{i+1} \qquad (16)$$

의 관계를 밝혔다. 이제 $g(p)$를

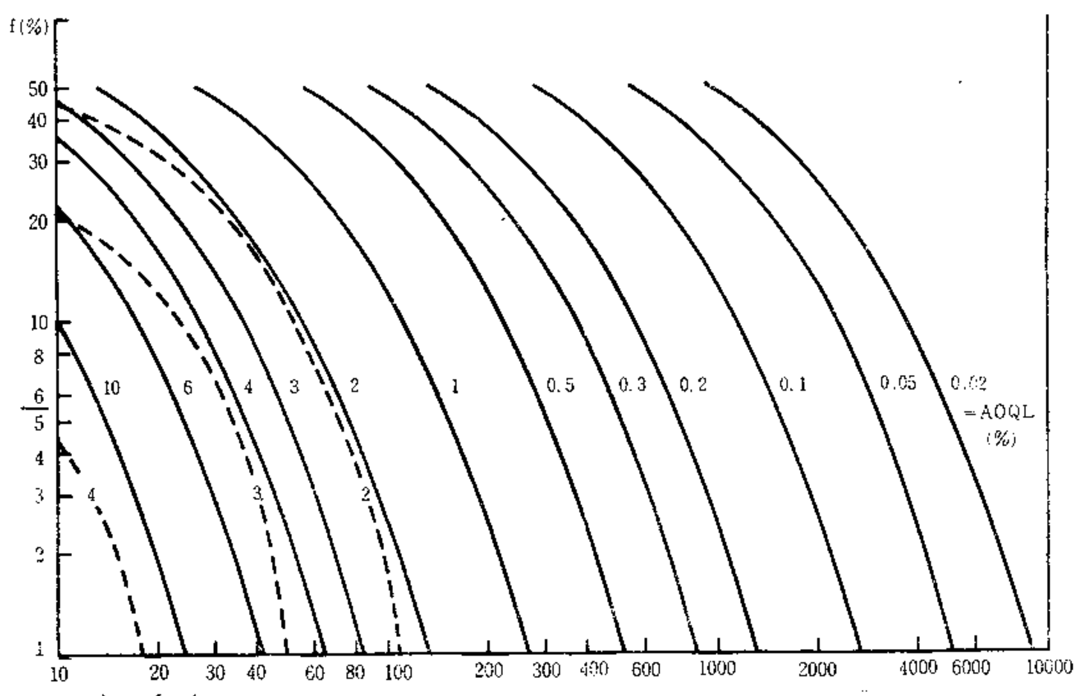
$$g(p)=\frac{1-f}{f}(1-p)^{i+1}-(i+1)p+1 \qquad (17)$$

과 같이 定義하면 $g(p_m)=0$이며 또

$$\frac{d}{dp}g(p)=-(i+1)\frac{1-f}{f}(1-p)^i-(i+1)<0 \qquad (18)$$

이므로 $g(p)$는 p에 대해 단조감소함수이며 $p_\delta<p_m$의 조건은 곧 $g(p_\delta)>0$의 조건이 된다. 따라서 (15)式으로 구하여진 i, f의 조합은 $g(p_\delta)>0$를 만족시킬 때에만 意味가 있고 $g(p_\delta)\leq 0$가 되면 $p_\delta \geq p_m$을 뜻하므로 (15)式은 成立하지 않으며 이때의 AOQL_δ 값은 AOQL과 일치하게 된다.

여기서 한 例로 $\alpha=2$, $\beta=98$인 경우, 즉 工程平均不良率이 기대치 0.02 표준편차 0.014인 베타分布를 갖는 경우에 $\delta=0.05$로 取한 AOQL_δ의 等價線이 〈그림 5〉에 나타나 있다. 〈그림 5〉에는 AOQL 等價線이 그려져있고 AOQL_δ 等價線은 굵은 線으로 表示되어 있으므로 쉽게 比較해 볼 수 있다. AOQL=3%이고 $i=30$때 $f=0.14$가 되는데 比해 같은 값의 AOQL_δ를 保證할 때는 $f=0.064$가 된다. 이것을 $p=0.02$때를 基



〈그림 5〉 AOQL(—)과 AOQL_δ의 等價線($\delta=0.05$)

準하여 比較해 보면 AOQL保證時 AFI=0.204인 反面 $AOQL_\delta$ 保證時에는 AFI=0.112가 되어 45%에 달하는 검사비용의 절감이 이루어진다. 實際 使用上의 問題로 母數推定의 誤差가 있을 危險을 생각할 수 있는데 이는 分散을 充分히 크게 잡아 줌으로써 줄일 수 있다.

Ⅲ.2. 불량율의 事前分布를 모르는 경우

工程平均不良率의 正確한 事前分布의 形態를 모르고 있는 경우에도 工程平均不良率이 어느 정도는 넘지 않는다는 것은 경험적으로 짐작하고 있는 경우가 大部分이다. 이때, 그 工程平均不良率의 上限을 p_u라 하면 0에서부터 p_u까지의 矩形分布를 使用함으로써 安全하고 經濟的인 檢査計劃의 設計를 할 수 있다. 實際不良率의 分布는 0에서 p_u까지의 區間에서 左側으로 치우치는 境遇가 大部分이므로 矩形分布를 使用하면 實際의 分布를 使用했을 때보다 p_δ를 크게 할 것으로 期待되기 때문에 安全하다고 볼 수 있는 것이다. 이제 불량률 p는 矩形分布

$$f(p)=\begin{cases}\dfrac{1}{p_u}, & 0\le p\le p_u,\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

를 따른다고 가정한다.

i個의 連續된 良好品이 發見되었을 때의 工程平均不良率의 事後確率密度函數는

$$f(p|i)=\frac{\dfrac{1}{p_u}(1-p)^i}{\displaystyle\int_0^{p_u}\frac{1}{p_u}(1-p)^i dp}=\frac{(1-p)^i}{\displaystyle\int_0^{p_u}(1-p)^i dp} \quad (19)$$

로 구해지고 이 중 分母는

$$\int_0^{p_u}(1-p)^i dp=\frac{1}{i+1}[1-(1-p_u)^{i+1}] \quad (20)$$

로 정리되므로 (19)式은

$$f(p|i)=\frac{(i+1)(1-p)^i}{1-(1-p_u)^{i+1}} \quad (21)$$

이 된다.

한편 p_δ의 定義로부터

$$\int_0^{p_\delta}f(p|i)dp=1-\delta \quad (22)$$

이고, 여기에서 左迅은 (21)式으로부터

$$\int_0^{p_\delta}f(p|i)dp=\frac{i+1}{1-(1-p_u)^{i+1}}\int_0^{p_\delta}(1-p)^i dp=\frac{1-(1-p_\delta)^{i+1}}{1-(1-p_u)^{i+1}} \quad (23)$$

로 되므로

$$p_\delta=1-[1-(1-\delta)\{1-(1-p_u)^{i+1}\}]^{\frac{1}{i+1}} \quad (24)$$

로 p_δ가 얻어진다. p_δ를 얻은 後의 과정은 Ⅲ.1.의 (14)式以下와 同一하다.

Ⅳ. 結 論

一般的으로 샘플링檢査에서는 品質保證의 基準値가 指定된 후 이에 附合하도록 檢査計劃이 設計되므로 어떠한 保證方式을 採擇하느냐 하는 問題는 대단히 重要한 것이다. 連續生産型 샘플링檢査에는 CSP-1을 비롯한 여러 檢査方式이 있으나 이들 모두가 品質保證과 檢査計劃設計의 基準으로서 AOQL을 使用하고 있다. 그러나 實際로 連續生産型 샘플링檢査를 使用할 때의 出檢不良率은 指定된 AOQL에 훨씬 未達하는 境遇가 大部分이므로 AOQL의 實際的인 意味에 미흡함을 느끼게 되며 보다 現實的인 意味를 지니는 品質保證基準이 必要한 것으로 判斷된다.

本 硏究에서 提示한 $AOQL_\delta$ 保證方式은 現實性을 높이기 위하여 종래의 AOQL 槪念에 實際 工程內容을 反映시킨 것으로서 많은 境遇 檢査費用을 절감하는 定全한 方法이 될 것이다. 이 $AOQL_\delta$ 保證方式의 使用時 留意할것은 工程平均不良率의 分布形態 또는 그 上限値를 정확히 推定하기 어렵다는 점이다. 그러나 이에 對하여는 安全한 立場을 取하여 分散을 充分히 크게 잡아주는 等의 方法으로 해결할 수있다. 또 한가지는 計算上의 문제로 베타分布의 累積確率을 직접 계산해야 할 경우에는 약간의 콤퓨터作業이 必要할 것이라는 點이다. 이 경우에도 일단 $AOQL_\delta$의 等價線을 求한 뒤에는 AOQL保證때와 같이 적절한 檢査計劃을 간편히 찾아 낼 수 있다. AOQL에는 여러가지 問題點들이 指摘되어 보다 根本的인 代案이 要求되는 것도 事實이나, AOQL의 槪念은 널리 使用되어 왔으므로 이와 같이 그 槪念을 최대한 살린 代案의 必要性은 現實的으로 크다고 생각된다.

參 考 文 獻

[1] Dodge, H. F., "A Sampling plan for continuous production," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 14, No. 2, pp. 264-279, 1943.

[2] Dodge, H. F., "Sampling plans for continuous production," *Industrial Quality Control*, Vol. 4, pp. 5-9, November 1947.

[3] Dodge, H. F. and Torrey, M. N., "Additional continuous sampling inspection plan," *Industrial Quality Control*, Vol. 5, pp. 7-12, March 1951.

[4] Lieberman, G. J."A note on Dodge's continuous inspection plan," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 24, No. 3, pp. 480-484, 1953.

[5] Lieberman, G. J. and Solomon, H., "Multi-level continuous sampling plans," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 26, No. 4, pp. 686-704, 1955.

[6] Wetherill, G.B. *Sampling Inspection and Quality Control*, Methuen and Co. LTD., 1969.