<研究論文>

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol.5, No.2, December 1979

製品多段階在庫에 關한 研究

(A Study on a Multi-Stage Inventory of Finished Goods)

金 正 子*

Abstract

Inventories of finished products exist in each stage of the channel between production and consumption. An inventory has several functions, which make it possible to produce by economic lot size and to elevate services for consumer by shortening delivery time, etc….

Finished products may be inventoried in delivery-center as well as at the plant where production takes place. So, finshed products must be dealt with as multistage inventory problem, because an inventory functions differently according to its place.

The purpose of this study is to determine how much to carry in stock and what stage to carry Though there may be several channels between production and consumption, this study deals with only one main channel, that is, series of ncmpcnents and determines the optimal inventory policy by introducing the concept of selling probabilities.

1. 序 言

製品在庫는 生產과 消費를 연결하는 流通上의 各段階마다 존재하게 되며 經濟的 lot size에 의한 生產, 輸送의 現實, 納入時間短編등을 가능하게 함으로써 顧客에 대한 Service를 向上하게 하는 등의, 많은 機能을 하고 있다.

또 製品在庫는 工場倉庫, 配送 center라는 流通上의 在庫場所가 다르면 機能에 있어서도 다른面이 생기게 되기 때문에 多段在庫로서 問題를 취급하지 않으면 안된다. 本論文은 이러한 製品多段階在庫의 管理에 關하여 system이 選擇된 후에 언제나 問題가 되는 「在庫可能한 段階중에서 어디를 在庫點으로 하고 또 그 在庫중에서 어디를 在庫點으로 하고 또 그 在庫量은 어느정도 하면 될까」라는 것에 대하여 硏究할 것을 目的으로 한다.

이 論文에서는 (目的에 關한——具體的인 OR model을 構成하여 문제를 解析하며, 製品의 流通經路는 途中에 몇개인가 갈라지는 分岐型이 一般的이지만, 이 논문에서는 그 基本이 되는 한經路에 注目하여 直列로 된 n個의 在庫點에 대해서 '製品이 팔릴확율'이라는 槪念을 導入함으로써 最適在庫政策을 위한 기초적 자료를 얻고자 한다. Brayan, Hanssmann은 이 問題에 대하여 工程上의 반제품을 多段階在庫로 導入하여 偏微分法에 의해 最適化의 方法을 論했고 Simpscn은 生產工程을 在庫에 의해 분리된 工程의 연속으로 보지않고 工程間 在庫場所와 在庫量을 決定하는 法을 論했다.

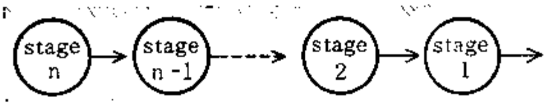
2. Model 槪要

直列로된 n個의 stage로 流通場所와 經路는 정해져 있고 量에 대해서만 問題를 취급하며 生產形態는 수요

---

*東亞大學校

예측에 의한 計劃生産으로서 單一製品만을 생산하며 管理방식으로는 期首에 管理 Center에서 指示하는데로 最適在庫量이 各 stage에 配分되고 各 stage에 品切이 생기면 바로 管理 center에 알려져 管理되어지는 것으로 한다.



1. Model의 槪念圖

2—1. Model의 前提

(1) 需要豫測

1期間의 需要量의 平均과 變動을 豫測하고 注文이 어떤 分布에 따른다고 豫測한 것으로 하며 注文量의 分布가 豫測되었을 때 그것에 대하여 在庫를 어떻게 配分할 것인가를 생각한다.

(2) 고객의 注文과 Cancel

고객의 注文은 stage 1에 대해서만 할 수 있으며 stage 1에 在庫가 없을 때는 stage 2에 注文이 移越되지만 stage 2에서 搬出을 기다릴 수 없는 고객은 注文을 Cancel하는 것으로 한다. 이 때 Cancel되지 않는 비율을 a_2로 한다. 즉 一般的으로 stage$(i-1)$에 在庫가 없을 때 2注文이 stage에 移越되는 비율을 a_i라면 a_i는 고객의 納期分布, 혹은 고객이 기다려주는 日數의 分布와 調達日數에 의해 求해진다.

즉, $a_i=\int_{ti}^{\infty} g(t)dt$이며 移越율이라 부르는데 이 값은 折衝効果등에 의해 上昇하는 것이 생각되지만 이 model에서는 價格割引, 數量割引 등은 없는 것으로 하고 또한 折衝効果에 의한 移越율 上昇은 생각지 않는다.

(3) Service율

Service율은 policy로 정하지 않고 期待利益最大라는 目標아래 問題를 解析하고 그 結果 Service율 몇%가 最適인가 라는 順序로서 進行하는 것으로 한다.

3. 定式化

i : stage 番號

r : 1期間注文量

I_i: stage i 在庫量

a_i: stage i에 注文移越율($a_1=1$, $a_{n+1}=0$)

P: 單位 販賣收入

l_i: stage i 單位當殘庫損失費

h_i: stage i 單位當 保管費

T_i: stage n→stage i 單位當 期首輸送費

C_i: stage i→stage 1 單位當 緊急發注費

CL: 單位當 品切損失費

販賣收入과 各費用을 정리하면 表1과 같다.

利益函數는 注文量의 범위에 의하여 $(n+1)$個 求하여진다.

〈case 1〉

$$G_1(r)=P-[l_1(I-r)+\sum_{k=2}^{n} l_k\cdot I_k]-[\sum_{k=1} h_k\cdot I_k$$

$$+\sum_{k=1}^{n} T_k\cdot I_k]$$

〈Case i〉

$$G_i(r)=[P\cdot\{\sum_{k=1}^{i-1} I_k+a_i(r-\sum_{k=1}^{i-1} I_k/a_k)\}]-[l_i\{I_i-(r-$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} I_k/a_k)a_i\}+\sum_{k=i+1}^{n} l_kI_k]-[CL\cdot\{\sum_{k=1}^{i-1} I_k/a_k\ (1-$$

$$a_k)+(r-\sum_{k=1}^{i-1} I_k/a_k)(1-ai)]-[\sum_{k=1}^{i-1} C_k\cdot I_k+a_ic_i$$

表 1. 販賣收入과 費用

Case	注文量의 範圍	販 賣 收 入	廢品在庫損失費用	緊急發注量	品切損失量	保管費用·輸送費用
1	$0\leqq r\leqq I_1$	$P\times r$	$l_1(I_1-r)+\sum_{k=2}^{n} l_k\cdot I_k$	0	0	$\sum_{k=1}^{n} h_k\cdot I_k$ $+\sum_{k=1}^{n} T_kI_k$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
i	$\sum_{k=1}^{i-1}\frac{I_k}{a_k}<r\leqq\sum_{k=1}^{i}\frac{I_k}{a_k}$	$P\times\left\{\sum_{k=1}^{i-1} I_k+a_i\times\left(r-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{I_k}{a_k}\right)\right\}$	$l_i\times\left\{I_i-a_i\left(r-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{I_k}{a_k}\right)\right\}+\sum_{k=i+1}^{n} l_k\cdot I_k$	$\sum_{k=1}^{i-1} C_k\cdot I_k+a_iC_i\left(r-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{I_k}{a_k}\right)$	$CL\times\left\{\sum_{k=1}^{i-1}\frac{I_k}{a_k}(1-a_k)+\left(r-\sum_{k=1}^{i-1}\frac{I_k}{a_k}\right)(1-a_k)\right.$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$n-1$	$\sum_{k=1}^{n}\frac{I_k}{a_k}<r<\infty$	$P\times\sum_{k=1}^{n} I_k$	0	$\sum_{k=1}^{n} C_k\cdot I_k$	$CL\times\left(r-\sum_{k=1}^{n} I_k\right)$	

$$\left(r-\sum_{k=1}^{i-1} I_k/a_k\right)\Big)-\left[\sum_{k=1}^{n} h_k\cdot I_k+\sum_{k=1}^{n} T_k\cdot I_k\right]$$

⟨case n+1⟩

$$G_{n+1}(r)=P\times\sum_{k=1}^{n} I_k-CL\cdot\left(r-\sum_{k=1}^{n} I_k\right)-\sum_{k=1}^{n} C_k\cdot I_k-\Big(\sum_{k=1}^{n}$$

$h_k\cdot I_k+\sum_{k=1}^{n} T_k\cdot I_k\Big)$ 利益函數가 連續인 것을 以下에 나타낸다.

$$G_1(I_1)=G_2(I_2)=P\cdot I_1-\sum_{k=2}^{n} l_k\cdot I_k-\sum_{k=1}^{n} h_k\cdot I_k-\sum_{k=1}^{n} T_k\cdot I_k$$

$$G_i\Big(\sum_{k=1}^{n} I_k/h_k\Big)=G_{i+1}\Big(\sum_{k=1}^{i} I_k/a_k\Big)=P\cdot\sum_{k=1}^{i} I_k-\sum_{k=i+1}^{n} l_k\cdot I_k$$

$$-CL\cdot\sum_{k=1}^{n} I_k/a_k(1-a_k)-\sum_{k=1}^{i} C_k\cdot I_k-\sum_{k=1}^{n} h_k\cdot I_k$$

$$-\sum_{k=1}^{n} T_k\cdot I_k$$

$$G_n\Big(\sum_{k=1}^{n} I_k/a_k\Big)=G_{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n} I_k/a_k\Big)=P\cdot\sum_{k=1}^{n} I_k-CL\cdot\sum_{k=1}^{n} I_k/$$

$$\cdot a_k(1-a_k)-\sum_{k=1}^{n} C_k\cdot I_k-\sum_{k=1}^{n} h_k\cdot I_k-\sum_{k=}^{n}$$

$$T_k\cdot I_k$$

4. 解 析

注文分布 함수를 $f(r)$로 하고 解析을 便利하게 하기 위해서

$$x_0=0,\ x_i=\sum_{k=1}^{i} I_k/a_k(i=1,\ 2\cdots n)\cdot x_{n+1}=\infty\cdots\cdots(1)$$

라고 두면

$$\text{期待利益 } E(G)=\sum_{i=1}^{n+1}\int_{xi-1}^{xi} G_i(r)\cdot f(r)\cdot dr\cdots\cdots(2)$$

로 나타낼 수 있다.

$E(G)$를 最大로 하는 I_1 $I_2\cdots I_n$이 各 stage에서의 最適在庫量이 된다.

$E(G)$를 I_j로 偏微分하면 利益函數連續性에 의해

$$\partial E(G)/\partial Ij=\sum_{i=1}^{n+1}\int_{xi-1}^{xi}\partial G_i(r)/\partial Ij\cdot f(r)dr\cdots\cdots(3)$$

된다.

$$y_i=\int_{xi-1}^{xi} f(r)\cdot dr\cdots\cdots(4)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_i=1\cdots\cdots(5)$$

(3)式은 $\partial E(G)/\partial Ig=-\sum_{H=1}^{j-1}(l_j+h_j+T_j)\ y_i+\sum_{i=1}^{n+1}$ $[P\cdot(1-a_i/a_j)-l_ja_i/a_j-(C_i-a_i/a_j\cdot C_j)+CL\cdot(1-a_i/a_j)-h_j-T_j]$ $y_i\cdots\cdots(6)$

된다.

期待利益이 最大가 되는 것은 I_j로서 偏微分한 값이 0이될 때 이기때문에 (6)式을 變形하면

$$a_j(P+l_j-C_j+CL)\sum_{i=j}^{n+1} y_i-\sum_{i=j}^{n+1} ai(P+l_i-C_i+CL)y_i$$
$$=a_j(l_j+h_j+T_j)j=1,2\cdots n\cdots\cdots(7)$$

이와같이 하여 y_i를 未知數로 하는 n個의 方程式과 (5)式에서 $y_i(i=1,2\cdots n+1)$를 未知數로 하는 $(n+1)$元 1次方程式. 얻어진다.

$(n+1)$元 1次方程式의 解를 $\partial E(G)/\partial I_{j+1}=0$해서 計算하면

$$a_{j+1}(P+l_{j+1}-C_{j+1}+CL)\cdot\sum_{i=j+1}^{n+1} y_i-\sum_{i=j+1}^{n+1} a_i(P+l_i$$
$$-C_i+CL)y_i=a_{j+1}(l_{j+1}+h_{j+1}+T_{j+1})\cdots\cdots(8)$$

(7)式과 8式에서

$$\sum_{i=j+1}^{n+1} y_i=\frac{a_j(l_j+h_j+T_j)-a_{j+1}(l_{j+1}+h_{j+1}+T_{j+1})}{a_j(P+l_j-C_j+CL)-a_{j+1}(P+l_{j+1}-C_{j+1}+CL)}\cdots\cdots(9)$$

$$Z_j=\sum_{i=j+1}^{n+1} y_i=1-\sum_{i=1}^{j} y_i\cdots\cdots(10)$$

$(n+1)$元 1次 方程式의 解는

$$\left.\begin{aligned}&y_1=1-\sum_{i=2}^{n+1}y_i=1-Z_1\\&y_j=\sum_{i=j}^{n+1} y_i-\sum_{i=j+1}^{n+1} y_i=Z_{j-1}-Z_j(j=2,3\cdots n)\\&y_{n+1}=\sum_{i=n+1}^{n+1} y_i=Z_n\end{aligned}\right\}\cdots(11)$$

各 stage의 費用이 주어지면 (9), (10)에서 Z_j (11)에서 y_j (4)에서 x_j가 求해진다.

$$I_j=a_j\Big(\sum_{i=1}^{j} I_i/a_i-\sum_{i=1}^{j-1} I_i/a_i\Big)=a_j(x_j-x_{j-1})\cdots\cdots(12)$$

I_j가 期待利益을 最大로하는 各 stage의 在庫量 즉 最適在庫量이 된다.

5. 解의 檢討

(5—1) 解가 만족해야 할 條件

model에서 期首에 各 stage I_i의 在庫量을 보내기 때문에

$$I_j\geqq 0\cdots\cdots(13)과$$

$(n+1)$元 1次方程式은

$$0\leqq y_j\leqq 1(j=1,2\cdots n+1)\cdots\cdots(14)$$

을 만족해야 한다.

(5—2) 製品이 팔릴 確率이 Z일 때 各 stage에서의 限界利益

條件 (14)가 만족하고 있는가를 吟味하기 위하여 偏微分에 의한 解法과 같은 생각으로 限界利益解法에 대하여 檢討해 보면 一般的으로

$$F_j(z)=a_j[(P-C_j)z-l_j(1-z)-(h_j+T_j)]-(1-a_j)\cdot CL\cdot Z\cdots\cdots(15)$$

. 팔릴確率이 $z(0\leqq z\leqq 1)$인 製品을 stage j에서 保有했을 때 限界利益을 나타냈다 하자. 팔릴확률이 z임에도 불구하고 製品을 어느 stage에도 在庫를 보유하지 않는 경우 注文을 cancel했을 때의 損失을 생각해 보자.

販賣收入 各種費用은 發生하지 않고 品切損失만이 問題된다. 期待損失은 팔릴확률이 Z인데도 불구하고 cancel하기 때문에 $-CL\cdot Z$가 된다. 이式은 $a_{n+1}=0$로서 (15)式에 포함된다.

즉 stage n까지의 在庫를 拂出한 후에는 注文의 繰越율이 0이된다고 생각하면 된다.

(5—3) $F_j(z)$의 性質에 關하여

(15)式을 Z에 關해서 정리하면

$F_j(z)=\{a_j(P+l_j-C_j+CL)-CL\}z-a_j(l_j+h_j+T_j)$

되고 z에 대하여 1次式이 되지만 기울기와 切片의 大小關係에 있어서 다음이 成立한다.

$$a_j(P+l_j-C_j+CL)-CL>a_{j+1}(P+l_{j+1}-C_{j+1}+CL)-CL\cdots\cdots(16)$$

$$\because\ a_j>a_{j+1}\ \ l_j\geqq l_{j+1}\ \ C_j<C_{j+1}$$

$$a_j(l_j+h_j+T_j)>a_{j+1}(l_{j+1}+h_{j+1}+T_{j+1})\cdots\cdots(17)$$

$$\because\ a_j>a_{j+1},\ l_j\geqq l_{j+1},\ h_j\geqq h_{j+1},\ T_j>T_{j+1}$$

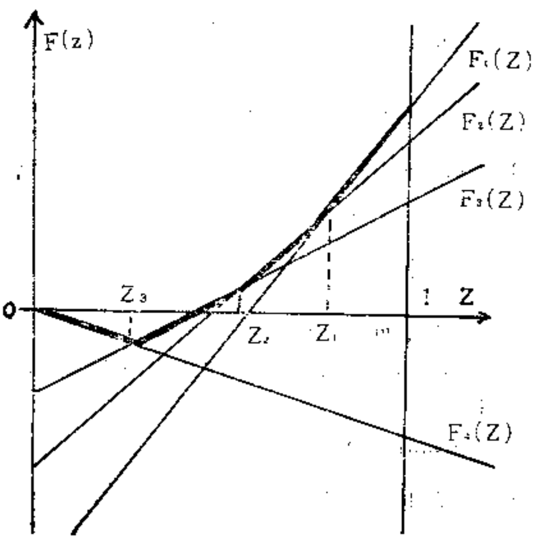


圖 2. 最適解 graph

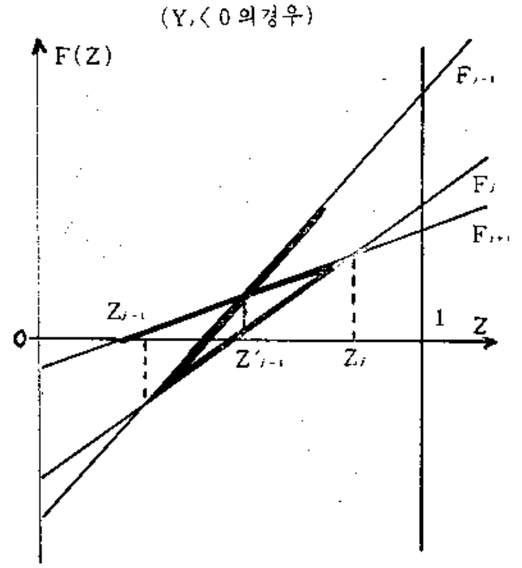


圖 3. 不 適 解

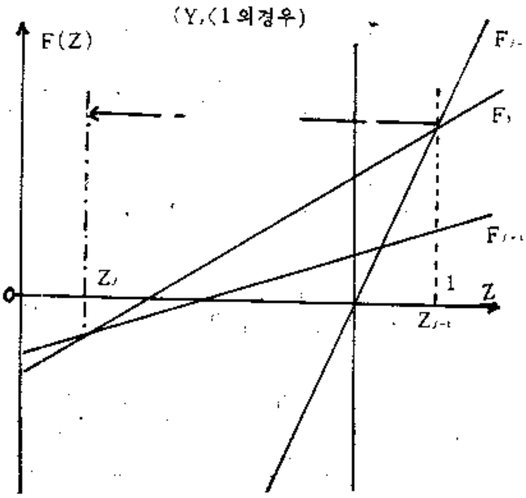


圖 4. 不 適 解

즉 stage番號가 적으면 기울기는 크게되고 切片은 負의 範圍로 작게 된다고 말할 수 있다.

(5—4) 不適解

式 (14)에서 解의 만족해야 할 條件을 나타냈으나 $F_j(z)$를 사용해서 graph로 說明하면 n=3인 경우 最適解는 다음과 같다.

$Z_1\leqq Z\leqq 1$인 경우에는 stage 1에서

$Z_2\leqq Z\leqq Z_1$에 경우에는 sage 2에서

$Z_3\leqq Z\leqq Z_2$에 경우에는 stage 3에서 재고를 보유

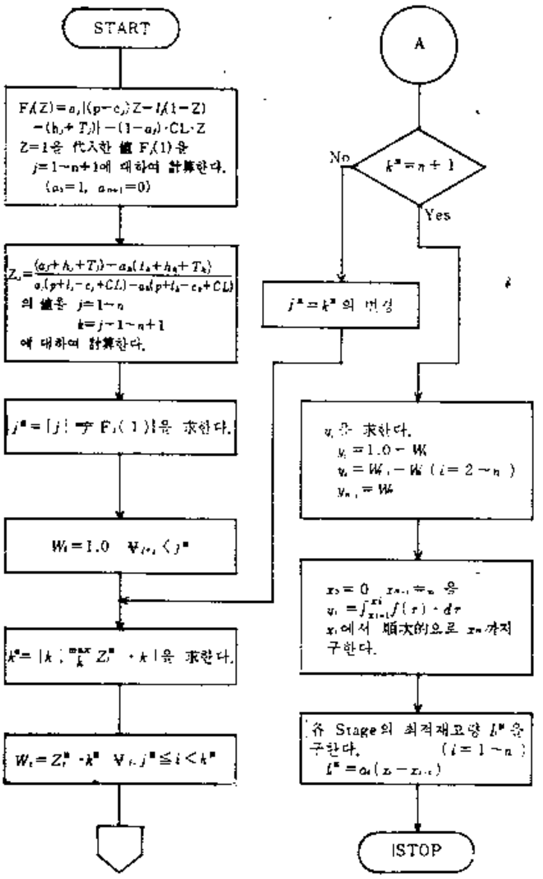
하고

$0 \leqq Z \leqq Z_3$의 범위에서는 在庫를 두지않고 cancel 하는것이 좋다는 것으로 된다. 그리고 $U \leqq y_j \leqq 1$를 만족하지 않는 경우 즉, 不適解는 圖 3, 圖 4와 같다.

$j^*\{j|j^{max}Fj(1)\}$되는 stage j* 에 在庫를 두고 j^* 보다 stage 番號가 작은 stage 에서는 在庫를 두지 않게 하면 된다.

따라서 最適在庫量을 決定하는 方法으로는 $0 \leqq z \leqq 1$ 범위의 graph 群 $\{F_j(z)\}$의 最大値를 따라 各 stage 의 在庫量을 決定해가면 된다.

(5—5) 最適解의 algorithm



6. 例　　解

費用은 販賣收入을 基準으로 $P=1$로 했을 때 注文의 豫測分布는 $N(1000, 400^2)$, $CL=0.4$의 最適在庫政策은 다음과 같다.

$F_1(1)=0.540$　　$F_2(1)=0.373$

$F_3(1)=0.095$　　$F_4(1)=0.032$

$F_5(1)=-0.4$

$W_1=0.558$　　$W_2=0.395$　　$W_3=0.395$

$W_4=0.226$

$x_1=940$　　$x_2=1108$　　$x_3=1108$

$x_4=1300$

$I^*_1=940$　　$I^*_2=143$　　$I^*_3=0$　　$I^*_4=87$

最適在庫量은 費用, 繰월율의 Balance 가 變化하면 달라진다.

表 2. 例解의 費用

	a_j	h_j	l_j	T_j	C_j
stage 1	1.0	0.30	0.10	0.16	0.00
stage 2	0.85	0.25	0.08	0.08	0.16
stage 3	0.55	0.25	0.08	0.05	0.20
stage 4	0.45	0.20	0.08	0.00	0.24

表 3. Zj·k 의 借

j \ k	1	2	3	4	5
1		.558	.441	.461	.373
2			.335	.395	.311
3				.568	.297
4					.226

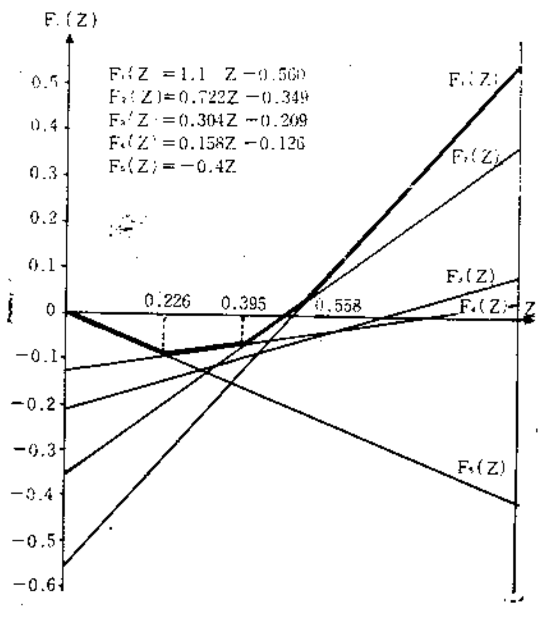


圖 5. 例解의 graph

7. 結 論

本論文에서는 製品在庫의 管理에 關하여 具體的인 model를 構成하고 解析했다. 數理解析上의 最適解를 求하는 algorithm을 作成했으나 構成要因, 前提條件을 될수 있는한 現實을 反映하고 있는 것으로 하기 위해선 pattern을 변화시킨 在庫 model 즉 多期間 在庫 model, 分岐型在庫 model 등에 대한 고찰이 期待되며 具體的으로는 生產계획, Marketing 전략 등과 結合시킨 製品在庫systen을 設計하는 것이 今後의 과제로 고찰이 기대된다.

參 考 文 獻

〔1〕 春日 井博：「總合在庫管理 system の設計」 日本經營出版會 1971 (pp. 392~429)

〔2〕 返町子：「在庫管理 (1)~(5)」オペレーションズリカ 1 チ Vol. 14 no. 9~12 1970

〔3〕 Simpson K. F Jr: 「In-process Inventory」 Operations Research Vol. 6, 1958

〔4〕 Hannsmann F: Optimal Inventoy Location and control in Production and Distribution Networks Operations Research Vol. 7, 1959

〔5〕 Hanssmann F: 「Opreations Researhc in production and Invneory control」 John Wily & Sons Inc 1962.

〔6〕 蒲生叡輝外：「流通 system 設計」 三一書房 1973 (p.p 388~394)