<研究論文>

Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol.5, No.2, December 1979

戰鬪時間의 制限性을 考慮한 多數 對 多數 戰鬪模型*

(Stochastic Combats with Time Limitation)

裵 道 善**
權 泰 榮***

Abstract

The fundamental stochastic duel of Williams and Ancker is combined with the probabilistic linear, square and mixed laws of Brown and Smith when the battle time is limited and interfiring times are continuous. The Probability of a given side's winnig or a draw is derived in a recursive equation with Laplace transforms. Examples with negative exponential firing times are given. In linear law an exact closed form solution is obtained, whereas for square and mixed laws only square (2×2) duels are considered.

1. 序 論

大規模 戰鬪現象을 現實性 있게 解析, 描寫하기 爲하여 많은 硏究가 進行되어 왔다. 그 中 代表的인 것은 1916年 Lanchester[9]가 發表한 線型 및 集中法則(linear and square laws)인바 이는 大規模 戰鬪를 微分方程式으로 表現한 決定型接近(deterministic)으로 生存者의 數를 平均値, 또는 期待値로 提示한다. 그러나 戰鬪現象의 不確實性을 考慮할 때 推計的 接近으로 解析하는 것이 加一層 現實的 描寫가 될 수 있을 것이다.

推計的 接近에 依해서도 많은 硏究[2]가 進行되었는 바, Robertson[12]은 分隊規模의 多數人員(cluster duel)이 相互 可視 狀態에서 同時射擊을 했을 경우의 推計的 戰鬪模型을 提示했고, Brown[4]은 確率的 線型 및 集中法則에 對한 略算解法을 硏究했으며, Smith[13]는 이를 더욱 發展, 再整理하고 確率的 混合法則(mixed law)을 追加하였다. 한편 Williams와 Ancker[15]는 推計的 基本戰鬪模型(fundamental duel)을 開發, 戰鬪模型에 새로운 可能性을 提示했으며, Williams[14]는 이 理論을 Lanchester 方程式에 連結하였다.

위에서 言及된 推計的 戰鬪 模型은 戰鬪時間의 無制限性을 前提한 것이다. 그러나 戰鬪時間의 制限은 戰術的 戰略的 決心을 하는데 있어서 重要할 뿐만 아니라 軍需支援計劃을 樹立하는 데에도 意味깊은 要素이다. Ancker[1, 3]는 1對1 戰鬪模型에서 戰鬪時間의 制限을 硏究했으나 多數 對 多數의 戰鬪에 關해서는 아직까지 時間의 制限性이 考慮된 바 없다.

本 硏究는 多數 對 多數의 大規模 戰鬪에서 交戰時間이 限定되고, 武器의 發射時間(interfiring times)이 連續型確率變數일 때 確率的 線型(linear), 集中(square) 및 混合(mixed) 法則에서 어느 한 便이 勝利할 確率과 비길 確率을 各各 求하였다. 아울러 各 法則마다 發射時間이 指數分布를 할 경우의 交戰結果를 誘導하였고, 感度分析을 實施하여 逐次進入式射擊(standby firing)과 集中式射擊(concentrated fring)의 相對的 優位性을 比較, 分析하였다.

* 本硏究는 韓國科學財團의 硏究費 支援에 의하여 이루어진 것임.

** 韓國科學院
*** 國防部

$$P^*(s;\bar{m},n)=\left(\frac{1}{s}\right)k^*(s;\bar{m};n)$$
$$=\left(\frac{1}{s}\right)[g^*(s;\bar{m},n)\cdot k^*(s;\bar{m},n-1)+g^*(s;m,\bar{n})\cdot k^*(s;\overline{m-1},n)]$$
$$=g^*(s;\bar{m},n)\cdot P^*(s;\bar{m},n-1)+g^*(s;m,\bar{n})\cdot P^*(s;\overline{m-1},n) \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

이 때 境界條件은 $P^*(s;\bar{m},o)=\frac{1}{s}$과 $P^*(s;\bar{o},n)=0$이다.

式(7)을 變形하면

$$K^*(s;\bar{m},n)=g^*(s;\bar{m},n)\cdot k^*(s;\bar{m},n-1)+g^*(s;m,\bar{n})\cdot k^*(s;\overline{m-1},n) \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

이 되고 境界條件은 $k^*(s;\bar{m},o)=1$, $k^*(s;\bar{o},n)=0$이다.

假定 (i)—(v)에 依據 線型法則(linear law)인 경우 式(7), (8)의 $g^*(s;\bar{m},n)$과 $g^*(s;m,\bar{n})$을 求하기로 한다. Williams와 Ancker〔15〕의 基本戰鬪模型 結果를 利用하면 靑軍의 戰鬪員 A가 相對便의 戰鬪員 1名과 時間間隙 $(t,t+dt)$동안 交戰했을 때 勝利할 確率密度函數 $h_A(t)$와 이의 Laplace變換 $h_A^*(s)$는 다음과 같이 表示된다.

$$h_A(t)=\sum_{n=1}^{\infty} p_A q_A^{n-1} f_A^{(n)}(t),$$
$$h^*(s)=\frac{P_A f_A^*(s)}{1-q_A f_A^*(s)} \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

여기서 $f_A^{(n)}(t)$는 $f_A(t)$의 n次 convolution이고, $q_A=1-p_A$이다. 그러면 線型法則의 경우 모든 正의 整數 $i(i\leq m)$에 對해서 $g_I(t;i)=h_A(t)$임을 알 수 있다. 式(2), (4) 및 (9)를 利用하면 式(7)과 (8)의 $g^*(s;\bar{m},n)$과 $g^*(s;m,\bar{n})$은 各各 다음과 같이 表現된다.

$$g^*(s;\bar{m},n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h^*_A(s+z)\cdot h_B(-z)\frac{dz}{z}$$
$$g^*(s;m,\bar{n})=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h_A^*(-z)\cdot h_B^*(s+z)\frac{dz}{z} \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

다음 集中法則(square law)인 경우는 假定 (i)—(v)에 依據 式(7)—(8)의 $g^*(s,\bar{m},n)$과 $g^*(s;m,\bar{n})$이 다음과 같이 誘導된다. 먼저 $h_A(t;i)$를 靑軍이 集中射擊術을 使用할 때 確率密度函數 $g_I(t;i)$라고 한다면, 이는 앞의 假定과 式(9)를 誘導한 方式에 따라

$$h_A(t;i)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-q_A^i)(q_A^i)^{n-1}f_A^{(n)}(t),$$

$$h^*_A(S;i)=\frac{(1-q^i_A)f^*_A(S)}{1-q^i_A f_A^*(S)} \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

이 되고 式(2), (4), (11)과 假定(iv)를 利用하면 $g^*(s;\bar{m},n)$과 $g^*(s;m,\bar{n})$이 다음과 같이 表示된다.

$$g^*(s;\bar{m},n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h^*(s+z;m)\cdot h_B^*(-z;n)\frac{dz}{z}$$
$$g^*(s;m,n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h^*_A(-z;m)\cdot h^*_B(s+z;n)\frac{dz}{z} \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

끝으로 混合法則(mixed law)에서는 式(2), (4), (9), (11)에 依해 $g^*(s;\bar{m},n)$과 $g^*(s;m,\bar{n})$을 다음과 같이 導出된다.

$$g^*(s;\bar{m},n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h^*_A(s+z;m)\cdot h^*_B(-z)\frac{dz}{z}$$
$$g^*(s;m,\bar{n})=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} h_A^*(-z;m)\cdot h_B^*(s+z)\frac{dz}{z} \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

式(7)—(8)에서 使用된 $P^*(s;\bar{m},n)$과 $k^*(s,\bar{m},n)$의 逆轉換(inverse)은 쉽게 求해 지지 않으나 Dubner와 Abate〔6〕의 數値解析 逆轉換方法(numerical inversion techniques)을 使用해서 풀 수 있다.

다음 戰鬪時間이 無制限인 경우 戰鬪員이 m名인 靑軍(Ⅰ)이 戰鬪員이 n名인 紅軍(Ⅱ)을 이길 確率 $P(\bar{m},n)$은 式(3)과 (7)로부터 다음과 같이 求해진다.

$$P(\bar{m},n)=\lim_{s\to 0} s\cdot P^*(s;\bar{m},n)$$
$$=H(\bar{m},n)\cdot P(\bar{m},n-1)+H(m,\bar{n})\cdot P(\overline{m-1},n) \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

여기서 境界條件은 $P(\bar{m},o)=1$, $P(\bar{o},n)=0$이며 $H(\bar{m},n)$과 $H(m,\bar{n})$은 線型法則인 경우 式(10), 集中法則인 경우 式(12), 混合法則인 경우 式(13)에 各各 $s=0$를 代入하여 얻는다. 式(14)는 Morse와 Kimball〔10〕의 表現과 形式上 一致하나, 그들은 式(3), (5)와 같은 個別 武器의 具體的 特性, 武裝狀態(特히 heterogeneous한 경우) 및 時間의 制限性을 反映한 것이 아니다.

4. 適用例

가. 線型法則인 경우

發射時間 間隙이 指數分布를 하고 그 確率密度函數

가 各各

$$f_A(t)=r_Ae^{-r_At},\ f_B(t)=r_Be^{-r_Bt}$$

라 할 때 이들의 Laplace變換은

$$f_A^*(s)=\frac{r_A}{s+r_A},\ f_B^*(s)=\frac{r_B}{s+r_B}$$

이 된다. 여기서 r_A, r_B는 戰鬪員 A, B의 發射率(rate of fire)이다. 이 式들을 式(9), (10)에 代入하면

$$g^*(s;\bar{m},n)=\frac{\lambda_A}{s+\lambda_{AB}},$$

$$g^*(s;m,\bar{n})=\frac{\lambda_B}{s+\lambda_{AB}}\cdots\cdots\cdots(15)$$

가 된다. 여기서 $\lambda_A=r_Ap_A,\ \lambda_B=r_Bp_B,\ \lambda_{AB}=\lambda_A+\lambda_B$이다.

式(8)과 (15)로부터

$$k^*(s;\bar{m},n)=\sum_{x=0}^{m-1}\binom{x+n-1}{x}\left(\frac{\lambda_A}{s+\lambda_{AB}}\right)^n\left(\frac{\lambda_B}{s+\lambda_{AB}}\right)^x\cdots\cdots\cdots(16)$$

을 얻고 이의 逆轉換은 다음과 같다.

$$k(t;\bar{m},n)=\sum_{x=0}^{m-1}\binom{x+n-1}{x}\frac{\lambda_A{}^n\lambda_B{}^x}{\Gamma(n+x)}t^{n+x-1}e^{-\lambda_{AB}t}\cdots\cdots\cdots(17)$$

여기서 $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy$이다.

따라서 式(6)과 (17)로부터 確率 $P(T;\bar{m},n)$을 다음과 같이 求할 수 있다.

$$P(T;\bar{m},n)=[1-I_\eta(m,n)]-L(T;\bar{m},n)\cdots\cdots\cdots(18)$$

여기서 $\eta=\frac{\lambda_B}{\lambda_{AB}}$,

$$I_\eta(m,n)=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\int_0^\eta x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx,$$

$$L(T;\bar{m},n)=(1-\eta)^n\sum_{x=0}^{m-1}\binom{x+n-1}{x}\eta^x\sum_{i=0}^{n+x-1}\frac{\lambda^i_{AB}}{i!}e^{-\lambda_{AB}T}$$

確率 $P(\bar{m},n)$은 式(14), (16) 및 (18)로부터 求하면 다음과 같다.

$$P(\bar{m},n)=1-I_\eta(m,n)\cdots\cdots\cdots(19)$$

兩便이 비길 確率 $P(T;m,n)$은 式(18)로부터

$$P(T;m,n)=L(T;\bar{m},n)+L(T;m,\bar{n})\cdots\cdots\cdots(20)$$

紅軍에 對해서도 같은 方法으로 $P(T;m,\bar{n})$과 $P(m,\bar{n})$을 求할 수 있다.

上記 結果를 電算機로 模擬하고 그림 1에 圖示하였다. 여기서 우리는 다음과 같은 事實을 發見할 수 있다.

(a) 交戰時間이 짧을 때는 戰鬪員의 武器性能(λ_A)에 依한 勝利効果가 人員(m) 增加에 依한 效果보다 크고, 反對로 交戰時間이 길어지면 逐次進入된 人員(m) 增加效果가 λ_A보다 크며, 一定交戰時間以後의 時間延長은 意味가 없다.

(b) 武器性能(λ_A)이 나쁠수록 兵力增加에 依한 靑軍의 勝利確率이 높다.

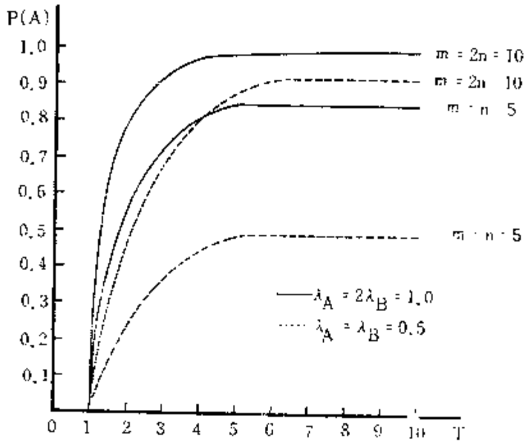

그림 1. 兩便이 線型射擊術로 交戰할 경우 交戰時間 및 兵力數의 效果

나. 集中法則인 경우

線型法則에서와 마찬가지로 $f_A(t)$, $f_B(t)$는 모두 指數分布를 한다고 假定한다. 그러면 式(11), (12)로부터 다음式을 얻을 수 있다.

$$g^*(s;\bar{m},n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{r_A(1-q_A{}^m)}{s+z+r_A(1-q_A{}^m)}\cdot\frac{r_B(1-q_B{}^n)}{-z+r_B(1-q_B{}^n)}\frac{dz}{z}$$

$$=\frac{r_A(1-q_A{}^m)}{s+r_A(1-q_A{}^m)+r_B(1-q_B{}^n)}\cdots\cdots(21)$$

式(7)과 (21)로부터

$$P^*(s;\bar{m},n)=\left(\frac{r_A(1-q_A{}^m)}{s+r_A(1-g_A{}^m)+r_B(1-q_B{}^n)}\right)\cdot P^*(s;\bar{m},n-1)+\left(\frac{r_B(1-q_B{}^n)}{s+r_A(1-q_A{}^m)+r_B(1-q_B{}^n)}\right)\cdot P^*(;s\overline{m-1},n)\cdots\cdots(22)$$

만일 p_A, p_B가 充分히 작은 값이라면 $r_A(1-q_A{}^m)\doteqdot m\lambda_A$, $r_B(1-q_B{}^n)\doteqdot n\lambda_B$가 되고 式(22)는 다음과 같이 變形된다.

$$P^*(s;\bar{m},n)=\left(\frac{m\lambda_A}{s+m\lambda_A+n\lambda_B}\right)\cdot P^*(s;\bar{m},n-1)$$

$$+\left(\frac{n\lambda_B}{s+m\lambda_A+n\lambda_B}\right)\cdot P^*(s;\overline{m-1},n) \quad \cdots\cdots(23)$$

式(22), (23)의 境界條件은 $P^*(s;\overline{m},o)=\frac{1}{s}$, $P^*(s;\bar{o},n)=0$ 인데 이 式의 一般解를 求하기는 어렵고 여기서는 $m=n=2$ 인 경우만을 다룬다. 式(22), (23), 그리고 그림 2를 利用하면 모든 交戰中間狀態(i,j)에 對하여 $P^*(s;\bar{i},j)$와 $P^*(s;i,j)$를 求할 수 있다.

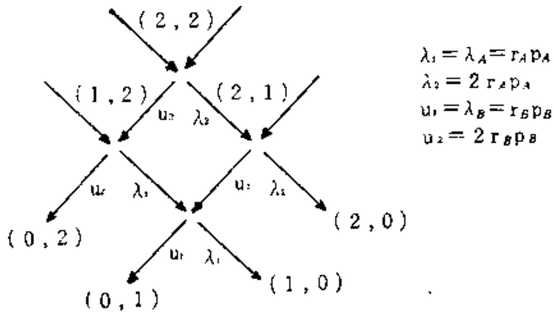

그림 2. $m=n=2$ 인 경우의 交戰 흐름圖

$$P^*(s;\overline{1},1)=\left(\frac{1}{s}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1+u_1}\right),$$

$$P^*(s;\overline{2},1)=\left(\frac{1}{s}\right)\cdot\left\{\left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2+u_1}\right)+\left(\frac{\lambda_1}{s+\lambda_2+u_1}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1+u_1}\right)\right\},$$

$$P^*(s;\overline{1},2)=\left(\frac{1}{s}\right)\cdot\left\{\left(\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1+u_2}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_1}{s+\lambda^1+u_1}\right)\right\},$$

$$P^*(s;\overline{2},2)=\left(\frac{1}{s}\right)\left\{\left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2+u_2}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2+u_1}\right)+\left(\frac{\lambda_1}{s+\lambda_2+u_1}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1+u_1}\right)+\left(\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2+u_2}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1+u_2}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1+u_1}\right)\right\} \quad \cdots\cdots(24)$$

위의 式들을 轉換시키면

$$P(T;\overline{1},1)=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}\{1-e^{-(\lambda_1+u_1)T}\} \quad \cdots\cdots(25)$$

$$P(T;\overline{2},1)=\frac{\lambda_2(\lambda_1+u_1)+\lambda_1u_1}{(\lambda_2+u_1)(\lambda_1+u_1)}+\frac{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_1u_1}{(\lambda_2+u_1)(\lambda_2-\lambda_1)}e^{-(\lambda_2+u_1)T}+\frac{\lambda_1u_1}{(\lambda_1+u_1)(\lambda_1-\lambda_2)}e^{-(\lambda_1+u_1)T} \quad \cdots\cdots(26)$$

$$P(T;\overline{1},2)=\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1+u_1)(\lambda_1+u_2)}+\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1-u_2}\right)\left\{\frac{e^{-(\lambda_1+\mu_1)T}}{\lambda_1+\mu_1}-\frac{e^{-(\lambda_1+u_2)T}}{\lambda_1+u_2}\right\} \quad \cdots\cdots(27)$$

$$P(T;\overline{2},2)=Co+C_1e^{-(\lambda_2+\mu_2)T}+C_2e^{-(\lambda_2+u_1)T}+C_3e^{-(\lambda_1+u_2)T}+C_4e^{-(\lambda_1+u_1)T} \quad \cdots\cdots(28)$$

여기서

$$Co=\frac{\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)[\lambda_2(\lambda_1+u_1)+\lambda_1u_1]+\lambda_1^2u_2(\lambda_2+u_1)}{(\lambda_2+u_2)(\lambda_1+u_1)(\lambda_2+u_1)(\lambda_1+u_2)}$$

$$C_1=\frac{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)[\lambda_2(\lambda_1+u_1-\lambda_2-u_2)+\lambda_1u_1]+\lambda_1^2u_2(u_2-u_1)}{(\lambda_2+u_2)(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1+u_1-\lambda_2-u_2)(u_2-u_1)}$$

$$C_2=\frac{\lambda_2^2(\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_1\lambda_2u_1}{(\lambda_2+u_1)(\lambda_1-\lambda_2)(u_1-u_2)}$$

$$C_3=\frac{\lambda_1^2u_2}{(\lambda_1+u_2)(\lambda_2-\lambda_1)(u_2-u_1)}$$

$$C_4=\frac{\lambda_1[\lambda_2u_1(u_2-u_1)+\lambda_1u_2(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1+u_1)(\lambda_1+u_1-\lambda_2-u_2)(\lambda_2-\lambda_1)(u_2-u_1)}$$

上記式 (25), (26)—(27), 그리고 (28)은 各各 基本戰鬪模型, 三角戰鬪模型(triangular duels), 그리고 四角戰鬪模型(square duels)의 解이다. 各戰鬪員의 武裝種類가 相異한 경우의 $P^*(s;\bar{i},j)$ 및 $P(i;j)$는 上記式 (25)—(28)에서 λ_1, λ_2, u_1, u_2, 代身에 $r_{A2}p_{A2}$, $r_{A1}p_{A1}$, $r_{B2}p_{B2}$, $r_{B1}p_{B1}$을 使用하면 된다.

그림 3은 集中法則인 경우 交戰時間이 經過함에 따라 靑軍이 勝利할 確率이 變化되는 것을 表示한 것으로 武器性能 效果보다는 兵力 增加 效果가 크고 一定期間 以後의 交戰時間은 勝利할 確率에 영향을 주지 못함을 알 수 있다.

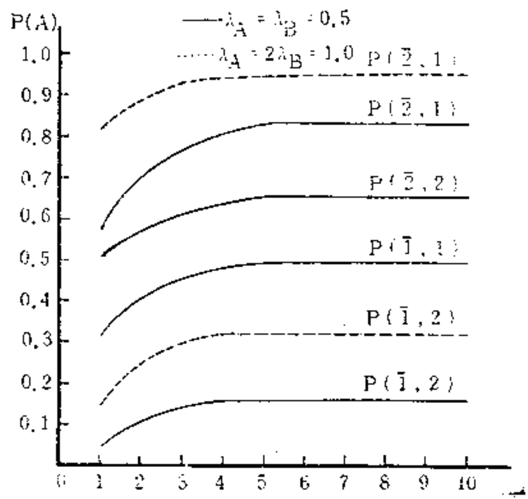

그림 3. 集中法則인 경우 靑軍이 勝利할 確率

다. 混合法則인 경우

靑軍은 集中射擊, 紅軍은 逐次進入式 線型射擊術을 使用하고, 兩側의 發射時間(interfiring times)은 指數

分布를 한다고 假定한다. 이 경우 靑軍의 $P^*(s;\overline{m},n)$은 式(2), (9), (11), (13)으로부터 다음과 같이 誘導된다.

$$P^*(s;\overline{m},n)=\left(\frac{r_A(1-q_A^{m})}{s+r_A(1-q_A^{m})+r_Bp_B}\right)\cdot$$
$$P^*(s;\overline{m},\ n-1)+\left(\frac{r_Bp_B}{s+r_A(1-q_A^{m})+r_Bp_B}\right)\cdot$$
$$P^*(s;\overline{m-1},n)\cdots\cdots(30)$$

이 때의 境界條件은 $P^*(s;\overline{m},o)=\frac{1}{s}$, $P^*(s;\bar{o},n)=0$이다. 이 때도 一般解를 求하기는 大端히 어렵다. $m=n=2$인 간단한 경우 $P^*(s;\overline{2},n)$와 $P(\overline{2},2)$는 式(24)와 (28)에서 λ_1, λ_2 n_1 및 u_2를 r_Ap_A, $r_A(1-q^2_A)$, r_Bp_B 등으로 各各 代置시키면 얻을 수 있다.

그림 4는 $T=\infty$인 경우 $R=\lambda_A/\lambda_B$에 對하여 $P(\overline{2},2)$를 模擬한 結果이다. 이로부터 우리는 $R=1$일 때 集中射擊術이 線型射擊術보다 優秀함을 알 수 있고, 武性器能의 勝利確率에 미치는 限界效果는 R이 增加할수록 減少됨을 發見할 수 있다.

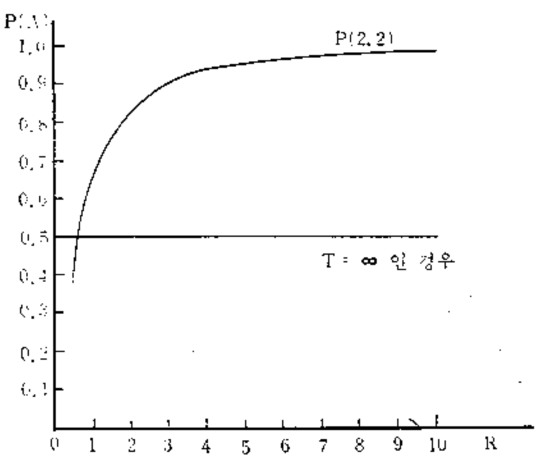

그림 4. 混合法則인 경우 武器性能增加效果

5. 論 結

이 論文은 大規模 多數 對 多數 戰鬪에 있어서 時間의 制限性을 追加한 推計的 模型을 開發한 것으로서 線型, 集中 및 混合法則을 反復形式의 一般式으로 誘導하였다. 適用例에서 보인 바와 같이 이 研究는 1) 交戰時間이 勝利할 確率에 미치는 效果, 2) 武器體系의 性能水準이 勝利할 確率에 미치는 영향, 3) 戰鬪員의 增加가 勝利에 미치는 效果, 等을 定量的으로 提示, 武器體系를 設計하거나 戰術, 戰略的 指揮決心을 하는데 有用하게 應用될 수 있을 것이다. 適用例에서 線型法則에 限해서 closed form으로 完全解를 求했는데 集中및 混合法則에 對해서도 效果的인 略算 近似解를 求하는 方法이 研究되어야 하겠다.

參 考 文 獻

[1] Ancker, C.J., Jr., "Stochastic Duels of Limited Time-Duration", *Journal of Canadian Operational Research Soiety*, Vol. 4, 69-81, 1966.

[2] Ancker, C.J., Jr., "The Status of Developments in the Theory of Stochastic Duels-II", *Operations Research*, Vol. 15, 338-406, 1967.

[3] Ancker, C.J., Jr. and Gafarian, A.V., "The Distribution of Time-Duration of Stochastic Duels," *Naval Research Logistics Querterly*, Vol. 12, 275-294, 1965.

[4] Brown, R.H., "Theory of Combat: The Probability of Winning," *Operation Research*, Vol. 11, 418-425, 1963.

[5] Butkov, E., *Mathematical Physics*, Addisson-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1973.

[6] Dubner, H. and Abate, J., "Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transforms," *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 15, 115-123, 1968.

[7] Kwon, T.Y. and Bai, D.S., "Stochastic Square Duels wich Continuous Interfiring Times", *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol. VII, No. 1, 61-80, 1978.

[8] Kwon, T.Y. and Bai, D.S., "Stochastic Duels with Random Detection," *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol. VII, No. 2, 121-130, 1978.

[9] Lanchester, F.W., *Aircraft in Wafare: The Dawn of the Fourth Arm*, Constable, London, 1916.

[10] Morse, P.M. and Kimball, G.E., *Methods of Operstions Research*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1970.

[11] Rau, J.G., *Optimization and Probability in Systems Engineering*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, N.Y., 1970

[12] Robertson, J.J., "A Method of Computing Surival Probabilities of Several Targets Versus Several Weapons," *Operations Reseach*, Vol, 4,

546-557, 1956.

[13] Smith, D.G., "The Probability Distribution of the Number of Survivors in a Two-Sided Combat Situation," *Operational Reseach Quarterly*, Vol. 16, 429-437, 1965.

[14] Williams, T., *Stochastic Duels*-II, SP-1017/003/00, Systems Development Corporation, Santa Monica, Calif. 1963.

[15] Williams, T. and Ancker, C.J., Jr., "Stochastic Duels," *Operations Research*, Vol. 11, 803-817, 1963.