Journal of the KSQC
Vol. 7, No. 2 (1979)

시스템 信賴性의 最適推定

(On Optimal Estimates of System Reliability)

金 載 周*

Abstract

In this paper the Rao-Blackwell and Lehmann-Scheffé Theorem are used to drive the minimum variance unbiased estimators of system reliability for a number of distributions when a system consists of n components whose random life times are assumed to be independent and identically distributed. For the case of a negative exponential life time, we obtain the maximum likelihood estimator of the system reliability and compair it with minimum variance unbiased estimator of the system reliability.

I. 序 論

n個의 要素로 구성된 시스템이 존재하고 T_i를 i번째 要素의 寿命을 나타내는 確率変数라 하면 임무기간 t에서 시스템 信賴性은 다음과 같이 정의된다. [1]

$R(t, k, n)$ = P[적어도 $(k+1)$ 要素가 임무시간 t에서 作動한다.]

$$= P[\text{적어도 } (k+1)\ T_i > t]. \qquad (1)$$

여기서 t는 주워진 상수이고 $k=0, 1, \cdots n-1$이며 $i=1, 2, \cdots, n$이다.

(1)식을 다시 검토하면 $R(t, n-1, n)$는 直列系의 信賴性을 나타내고 $R(t, o, n)$는 並列系의 信賴性을 나타낸다.

本 論文의 主된 目的은 $T_1, T_2, \cdots, T_n$가 서로 独立으로 다같이 負의 指数分布(negative exponential distribution) 거나 와이불分布(weibull distribution) 를 할때 $R(t, k, n)$의 唯一한 最小分散不偏推定量(unique minimum variance unbiased estimator)를 찾고 負의 指数分布의 경우는 $R(t, k, n)$의 最尤推定量(maximum likelihood estimator)을 찾아 最小分散不偏推定量과 비교검토코져 한다.

(1)式을 다시 쓰면

$$P[\text{적어도 } (k+1)\ T_i > t] = 1 - P[\text{적어도 } (n-k)\ T_i \leq t] \qquad (2)$$

이므로 $R(t, k, n)$의 最小分散不偏推定量을 찾는다는 것은 크기n의 確率標本(random sample)에서 유도된 $(n-k)$번째의 順序統計量(order statistic), $T_{(n-k)}$, 의 累積分布函数(cumulative distribution function)의 最小分散不偏推定量을 찾으면 된다는 것을 알수 있다. 간략하게 하기 위하여 이후로 부터는 唯一한 最小分散不偏推定量을 UMVUE, 最尤推定量을 MLE, 로 表記한다.

II. 負의 指数寿命分布

$T_1, T_2, \cdots, T_n$가 서로 独立으로 密度函数

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t > o, \lambda > o \qquad (3)$$

를 따라 분포할때 시스템 信賴性

$R(t, k, n) = 1 - P[T_{(n-k)} \leq t]$ 이고,

$F(t) = P[T_i \leq t] = 1 - e^{-\lambda t}$ 이므로 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ 에서 유도된 i번째의 順序統計量 $T(i)$의 累積分布函数

* 서울大学校 計算統計学科 教授

(cdf)는

$$P[T(i) \leq t] = \sum_{j=i}^{n} (-1)^j [F(t)]^j [1-F(t)]^{n-j}$$

$$= \sum_{j=i}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} [e^{-\lambda t}]^{n-l} \quad (4)$$

로 주워진다. 統計量 $W=\sum_{i=1}^{n} T_i$는 λ에 대한 充足統計量(sufficient statistic)이고 W의 密度函數(pdf)는

$$f_W(w : \lambda) = \frac{\lambda^n w^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda w},\ w>o,\ \lambda>o \quad (5)$$

이다. 이들分布族은 指数分布族(exponential family)에 속하므로 完備族(complete family)가 된다.
(4)式에서 W의 函数로 $(e^{-\lambda t})^{n-l}$의 UMVUE를 $g_n(t, w, l)$라 하고 $g_n(t, w, l)$를 Lehmann-Scheffé 定理[4]와 Rao-Blackwell 定理[7]를 이용하여 찾으면 다음과 같이 된다[9].

$$g_n(t, w, l) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t(n-l)}{W}\right)^{n-1}, & W > t(n-l) \text{ 일때} \\ 0 & \text{그 外점에서} \end{cases} \quad (6)$$

$P[T(i) \leq t]$의 UMVUE를 $\hat{P}[T(i) \leq t]$라 하면

$$\hat{P}[T(i) \leq t] = \sum_{j=o}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{l=o}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} \left[1 - \frac{t(n-l)}{W}\right]_+^{n-1}$$

(7)가 된다. 단, 여기서 $[Y]_+$는 $Y \geq 0$이면 Y가 되고 $Y<0$이면 0된다는 것을 뜻한다.
$R(t, k, n)$의 UMVUE를 $\hat{R}(t, k, n)$라 하면

$$\hat{R}(t, k, n) = 1 - \hat{P}[T_{(n-k)} \leq t]$$

$$= 1 - \sum_{j=n-k}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{l=o}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} \left[1 - \frac{t(n-l)}{W}\right]_+^{n-1} \quad (8)$$

이다.
(8)式에서 $k=o$ 즉 並列系(parallel system)인 경우는

$$\hat{R}(t, o, n) = 1 - \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left[1 - \frac{tk}{W}\right]_+^{n-1} \quad (9)$$

이고, $k=n-1$ 일때는 즉, 直列系(series system)에서는

$$\hat{R}(t, n-1, n) = \left[1 - \frac{tn}{W}\right]_+^{n-1} \quad (10)$$

이다.
(10)式은 E. L. Pugh[5]의 결과와 일치한다.
즉 Pugh의 결과는 여기서 구한 결과의 특별한 경우에 해당된다고 볼 수 있다.

Ⅲ. Weibull 寿命分布

$T_1, T_2, \cdots, T_n$가 서로 独立으로 密度函数

$$f(t) = P\theta(\theta t)^{P-1} e^{-(\theta t)^{p-1}}\quad t \geq o,\ \theta>o,\ p>o \quad (11)$$

를 따라 分布할때 시스템 信賴性의 UMVUE를 P가 既知(known)인 경우에 한하여 찾아 보고자 한다.

P가 알려져 있다면 $W=\sum_{i=1}^{n} T_i^p$는 θ에 관하여 充足統計量이고 그의 密度函数는

$$g(w;\theta) = \frac{\theta^{np} W^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\theta^p w}\quad w>o,\ \theta>o,\ p>o \quad (12)$$

이므로, W의 分布族은 完備族임을 알 수 있다.
따라서 Lehmann-Scheffé 定理와 Rao-Blackwell 定理를 적용할 수 있고 그것을 적용하여 구한 결과는 다음과 같다.

$R(t, k, n)$의 UMVUE를 $\hat{R}(t, k, n)$라 하면

$$\hat{R}(t, k, n) = 1 - \sum_{j=(n-k)}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{l=o}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} \left[1 - \frac{t^p (n-1)^p}{W}\right]_+^{n-1} \quad (13)$$

특히 $k=o$ 일때는

$$\hat{R}(t, o, n) = 1 - \sum_{k=o}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left[1 - \frac{(tk)^p}{W}\right]_+^{n-1} \quad (14)$$

로 되고, $k=n-1$ 일때는

$$\hat{R}(t, n-1, n) = \left[1 - \frac{(nt)^p}{W}\right]_+^{n-1} \quad (15)$$

로 된다. (15)式은 $R, F.$ Tate[6]의 결과와 유사하다.

Ⅳ. 시스템 信賴性의 MLE와 그의 偏倚(bias)

여기서는 시스템의 要素들이 서로 独立으로 다같이 負의 指数分布를 따를때 시스템 信賴性의 MLE를 구하고 그의 偏倚를 검토하고자 한다. Weibull 分布의 경우도 같은 방법으로 구할 수 있을 것이다. $T_1, T_2, \cdots, T_n$가 서로 独立으로 (3)式을 따를때 시스템 信賴性은

$$R(t, k, n) = 1 - \sum_{j=(n-k)}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{l=o}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} e^{-(n-l)\lambda t}$$

(16)과 같이 된다.
(16)式의 MLE를 $R^*(t, k, n, \hat{\lambda})$라 할때
Zehna[8] 定理를 사용하여 구하면 다음과 같이 된다.

$$R^*(t, k, n, \hat{\lambda}) = 1 - \sum_{j=n-k}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} e^{-(n-l)t\hat{\lambda}}$$

단 $$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} T_i} \tag{17}$$

$\hat{\lambda}$의 密度函数를 $g(\lambda : \lambda)$라 하면

$$g(\hat{\lambda} : \lambda) = \frac{(\lambda n)^n}{\Gamma(n)} \hat{\lambda}^{-(n+1)} e^{-\frac{n\lambda}{\hat{\lambda}}}, \quad o < \hat{\lambda} < \infty \tag{18}$$

로 주워진다.

$$E(R^*) = \int_o^R R^*(t, k, n, \lambda) g(\hat{\lambda} : \lambda) d\hat{\lambda}$$

$$= 1 - \sum_{j=n-k}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{l=o}^{j} \binom{j}{l} \int_o^\infty \frac{(\lambda n)^n}{\Gamma(n)} \hat{\lambda}^{-(n+1)}$$

$$exp\left[-(n-l)t\hat{\lambda} - \frac{n\lambda}{\hat{\lambda}}\right] d\hat{\lambda}$$

여기서 $\frac{\lambda n}{\hat{\lambda}}$를 x로 치환하면

$$= \frac{-1}{(n-1)!} \int_o^\infty x^{n-1} exp(-x) R\left(\frac{n}{x}t, k, n\right) dx \tag{19}$$

(19)式은 R와 n의 函数이므로 R^*는 R의 不偏推定量(unbiased estimator)가 되지 못한다.

(19)式은 시스템의 각 要素(component)의 信賴性의 MLE도 眞의 信賴性과는 偏倚(biased) 되어 있음을 나타내고 있다. 만일 이러한 要素들을 直연결했을 때의 시스템 신뢰성은 眞의 시스템 信賴性과는 곱셈 법칙에 의하여 그 差가 매우 크리라 예상된다.

여기서 R의 不偏推定量을 구할 필요성을 느끼게 되고 不偏推定量 가운데서 最小分散不偏推定量이 最適推定量이 됨을 알 수 있다.

다음 절에서는 UMVUE와 MLE를 비교하여 例示코자 한다.

V. 例

동일 안정된 製造工程에서 생산된 部品들의 寿命分布가 負의 指数分布를 한다는 것을 알고 있다고 하자. 그 工程에서 생산된 部品의 롯트에서 4個를 임의로 샘플하여 수명을 측정한 결과 수명시간이 8.2, 3.6, 20.4, 0.9였다고 하고 그 롯트에서 4개의 부품을 다시 뽑아 I절에서 언급한 바와 같은 시스템을 만들고 그 시스템의 임무시간(mission time)이 2 시간일때 시스템 信賴性 R의 推定値;UMVUE($\hat{R}$) 와 MLE(R^*)를 구하면 다음과 같다.

計算式:

$$\hat{R}(2, k, 4) = 1 - \sum_{j=4-k}^{4} (-1)^j \binom{4}{j} \sum_{l=o}^{j} (-1)^l \binom{j}{l}$$

$$\left[1 - \frac{2 \times (4-l)}{33.1}\right]_+^{4-1}$$

$$R^*(2, k, 4, \frac{4}{33.1}) = 1 - \sum_{j=4-k}^{4} (-1)^j \binom{4}{j} \sum_{l=o}^{j} (-1)^l \binom{j}{l}$$

$$e^{-(4-l)\frac{8}{33.1}} \qquad k = 0, 1, 2, 4.$$

$\hat{R}$와 R^*의 比較表

推定値 / K	UMVUE($\hat{R}$)	MLE(R^*)	$\hat{R} - R^*$
0	0.999999999	0.997875077	0.002124922
1	0.994705594	0.966786416	0.027919178
2	0.887096791	0.796220593	0.090876198
3	0.436050896	0.380310456	0.055740440

$\hat{R} - R^*$의 부호가 전부 陽인 것을 감안하면 R^*는 R보다는 眞의 R를 推定함에 있어서 과소평가 되고 있음을 나타낸다.

VI. 結 論

본 論文에서는 単一製品 혹은 서로 独立으로 같은 分布를 따르는 어떤部品의 결합으로 이루워지는 시스템(장치) 信頼性의 最適推定量으로 UMVUE를 특수한 몇개의 寿命分布에서 구하고 일반적으로 널리 使用되고 있는 MLE와 비교 검토 하였다. MLE는 不偏性을 만족하지 못하므로 UMVUE를 使用하여 信賴性推定에 임한다면 生産者 입장에서는 좀더 정확하게 품질보증에 임할수 있다고 보며 신뢰성 설계 단계에 본 논문의 결과를 이용하면 소비자요구품질을 설계하는데 도움이 되리라 믿는다.

REFERENCES

[1] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975); Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability Models, Holt, Rinehart and Wiston,. Inc., New York.

〔2〕 David, H. A. (1970) ; Order Statistics. New-York: John Wiley and Sons.

〔3〕 Fisher, R. A. (1929) ; "Tests of Significance in Harmonic Analysis," Proc. Roy. Soc. A, 125, 54-59.

〔4〕 Lehmann, E. L. and Scheffé, H. (1950) ; "Completeness, Similar Regions, and Unbiased Estimation." Sankhyā, 10, 305-340.

〔5〕 Pugh, E. L. (1963) ; "The Best Estimate of Reliability in the Exponential Case." Opns. Res., 11, 57-61.

〔6〕 Tate, R. F. (1959) ; "Unbiased Estimation: Functions of Location and Scale Parameters." Ann. Math. Statist., 30, 341-366.

〔7〕 Wilks, S. S. (1962) ; Mathematical Statistics John Wiley and Sons, New York.

〔8〕 Zehna. P. W. (1966) ; "Invariance of Maximum Likelihood Estimation" Ann. Math. Statist. 37. 755

〔9〕 Park. C. J and Jae Joo Kim. (1978) ; "The Minimun Variance Unbised Estimation of System Reliability" Jaurnal of the Korean Institude of Industrial Engineers Vol 4, NO. 1 29-32