HONAM MATHEMATICAL JOURNAL
Volume 1, Number 1, July 1979

DE RHAM COHOMOLOGY에 關하여

KEE-AN LEE

ABSTRACT

In this explanation, we shall describle how the de Rham's cohomology on a n-dimensional C^∞-manifold is constructed. The Čech's cohomology defined by only topological structure of C^∞-manifold has a crack that it is dependent on the covering of a C^∞-manifold. At the end of explanation we shall prove that the de Rham's cohomology is isomorphic to Čech's cohomology which is made by simply covering.

n次元 C^∞ 多樣體에서 얻어진 微分形式과 外微分에 의하여 Rham complex가 얻어지고 이것으로 부터 얻어진 cohomology를 Rham cohomology라 한다. n次元 C^∞ 多樣體의 位相的 構造만으로 定義되여진 Čech cohomology가 있는바 이것은 多樣體의 被覆에 따라 그 cohomology 群이 달라지는 것이 흠이다. 여기서는 Rham cohomology와 單純被覆을 取하였을 때의 Čech cohomology가 同型이 된다는 것의 證明의 概要를 紹介하고 이것을 利用 Rham cohomology ring과 Čech cohomology ring이 同型임을 證明한다. 그리고 이 de Rham 理論이 幾何 및 解析學에 活用되는 一端을 記述하여 볼 豫定이다.

§1. 微分 形式

M를 n次元 C^∞ 多樣體라하자. 卽 座標近傍系 $\{U_\alpha\}_{\alpha\epsilon A}$와 座標寫像系 $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\epsilon A}$가 存在하고 $\alpha, \beta\epsilon A$에 對하여 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$이면 $\varphi_\alpha{}^0\, \varphi_\beta{}^{-1}$ 및 $\varphi_\beta{}^0\, \varphi_\alpha{}^{-1}$가 C^∞급 함수이고 M는 Hausdorff空間이고 paracompact 空間이다.

M에 의하여 定義된 Tangent boundle를 $\pi;\ T(M) \to M$라 하고 各 $x\epsilon M$에 對하여 이것의 tangent space $\pi^{-1}(x) = T(M)_x$라 하자. 이때 x의 座標近傍의 하나를 U_α라 하면 $\varphi_\alpha(x) = (x_\alpha{}^1, \cdots\cdots, x_\alpha{}^n)$라 할때 $T(M)_x$는 x次元 vector space로써

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha{}^1}, \cdots\cdots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha{}^n}\right)$$

를 base로 가지며 $T(M)_x$의 vector ξ_α는

$$\xi_\alpha = \sum_{\mu=1}^{n} \xi_\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x_\alpha{}^\mu}$$

등으로 表示가 된다.

$C(M)$는 M에서 R에 보내는 C^{∞}급 함수의 全體의 集合이라 하면 通常的인 加法과 乘法에 의하여 commutatrive ring with 1 이 된다.

$\mathfrak{X}(M) = \Gamma(T(M))$ = the set of all cross sections of Π: $T(M) \to M$라 하면 이것은 $C(M)$-module 임도 이미 잘 알려져 있는 事實이다. $X \in \mathfrak{X}(M)$와 $f \in C(M)$에 對하여 各 $x \in M$에 관하여

$$X(f)\ (x) = X(x)f = \sum_{\mu=1}^{n} X^{\mu}(x)\ \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha}{}^{\mu}}(x)$$

라하면 X^{μ}: $M \to R$는 C^{∞}급 함수이고

$$\begin{array}{l} X:\ C(M) \longrightarrow C(M) \\ \qquad\ \ \downarrow \qquad\qquad\quad \downarrow \\ \qquad\ \ f \ \longmapsto \ \ X(f) \end{array}$$

는 $f, g \in C(M)$, $\alpha, \beta \in R$에 對하여

$$X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$$
$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$$

등을 만족한다. 特히 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 및 $f \in C(M)$에 對하며

$$[X, Y]\ (f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

即 $X(x) = \sum_{\mu=1}^{n} X^{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$, $Y(x) = \sum_{\mu=1}^{n} Y^{\mu}(x)\ \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$라 하면

$$[X, Y]f(x) = \sum_{\mu=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} X^{\nu}(x) \frac{\partial Y^{\mu}}{\partial x^{\nu}}(x) - \sum_{\nu=1}^{n} Y^{\nu}(x) \frac{\partial X^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}(x)$$

되게 정의하면

$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $\alpha, \beta \in R$에 對하여

(i) $[\alpha X + \beta Y,\ Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$

(ii) $[X, Y] = -[Y, X]$

(iii) $[X,\ [Y, Z]] + [Y,\ [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

가 成立됨을 檢證할 수 있어서 $\mathfrak{X}(M)$는 R上의 Lie algebra됨을 안다.

Tangent bundle $T(M)$의 dual bundle $T^*(M)$를 생각하자. 勿論 Π^*: $T^*(M) \to M$는 M上의 vecter bundle이다. M의 点 x에 對한 fiber $\Pi^{*-1}(x) = T^*(M)_x$는 n次元 vector space 이고 $T(M)_x$의 base $\left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}{}^{1}}, \cdots\cdots, \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}{}^{n}}\right)$의 dual base를 $(dx_{\alpha}{}^{1}, \cdots\cdots, dx_{\alpha}{}^{n})$라 하면 이것이 $T^*(M)_x$의 base가 되며, $T^*(M)_x$의 vector를 η라 하면

$$\eta = \sum_{\mu=1}^{n} \eta_{\mu}^{\alpha}\, dx_{\alpha}^{\mu}$$

의 形式으로 쓰여진다. 이때 $\xi = \sum_{\mu=1}^{n} \xi_{\alpha}^{\mu} \dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha}^{\mu}}$이면

$$\xi \longmapsto \langle \xi, \eta \rangle = \sum_{\mu=1}^{n} \xi_{\alpha}^{\mu}\, \eta_{\mu}^{\alpha}$$

를 얻는다. 故로 各 $T^*(M)_x$의 元을 $T(M)_x$에서 R로 보내는 linear map이며, 이러한 linear map 전체가 $T^*(M)_x$이다.

지금 $f \in C(M)$와 各点 $x \in M$에 對하여

$$\begin{array}{rccl} df_x: & T(M)_x & \longrightarrow & R \\ & \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ & \xi & \longmapsto & \xi(f)\ (x) = \sum_{\mu=1}^{n} \xi^{\mu} \dfrac{\partial f}{\partial x^{\mu}}(x) \quad \left(\xi = \sum_{\mu=1}^{n} \xi^{\mu} \dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) \end{array}$$

되게 정의하면 (여기서 $\xi^{\mu}: M \to R$는 C^{∞}급 함수) $df_x \in T^*(M)_x$임을 알고 x을 M의 전체의 点으로 移動시키면 $T^*(M)$의 cross section df 를 얻는다. 이때 df 를 f의 微分이라한다.

앞서와 같이 $df_x \in T^*(M)_x$이므로 우리는

$$df_x = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}(x)\, dx^{\mu}$$

로 쓰여진다.

定義 1. $T^*(M)$의 p-dimensional exterior product bundle $\overset{p}{\Lambda}\, T^*(M)$의 cross section을 M上의 p-dimensional differential form라 한다. (여기서 $\overset{p}{\Lambda}\,\Pi^*: \overset{p}{\Lambda}\, T^*(M) \to M$는 M上의 $n\,C_p$次元 vector bundle이고, 各 $x \in M$에 對한 fiber의 base는 $dx_{\alpha}^{\mu_1} \Lambda \cdots\cdots \Lambda\, dx_{\alpha}^{\mu_p}$ $(\mu_1 < \cdots\cdots < \mu_p)$ 등으로된 nC_p개이다. p次의 微分形式全體는 $A^p(M)$로 表示하면

$$A^p(M) = \Gamma(\overset{p}{\Lambda}\, T^*(M)) = \text{the set of all cross sections}$$

$$\text{of } \overset{p}{\Lambda}\,\Pi^*: \overset{p}{\Lambda}\, T^*(M) \longrightarrow M.$$

이다. 이때 $A^0(M) = C(M)$ 이고 $p > n$이면 $A^p(M) = 0$ 이다. 따라서 $w \in A^p(M)$이고 $x \in M$, x의 좌표근방을 U_{α}라 하면

$$w(x) = \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_p} w_{\mu_1 \cdots \mu_p}(x)\ dx_{\alpha}^{\mu_1} \Lambda \cdots \Lambda dx_{\alpha}^{\mu_p}$$

로 表示되고 이때 $w_{\mu_1\cdots\mu_p}$: $M\rightarrow R$은 C^∞급 함수이다. 特히

$$A(M) = A^0(M) \oplus A^1(M) \oplus\cdots\cdots\oplus A^n(M)$$

(vector space의direct sum)라 놓으면

$$\begin{array}{ccc} A^p(M) \otimes A^q(M) & \longrightarrow & A^{p+q}(M) \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ w^p \otimes w^q & \longmapsto & w^p \Lambda w^q \end{array}$$

(이것을 exterior product라 함)에 의하여 $A(M)$은 R上의 algebra(**多元環**)이 **된다.**

$w\epsilon A^p(M)$와 $x\epsilon M$에 **對하여** $w(x)\epsilon \Lambda^p T^*(M)_x$이므로 $\xi_1,\cdots\cdots, \xi_p\epsilon T(M)_x$라 하면 $w(x)=\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p} w_{\mu_1\cdots\mu_p}(x)\ dx_\alpha^{\mu_1}\ \Lambda\cdots\Lambda dx_\alpha^{\mu_p}$일때

$$w(x)\ (\xi_1,\cdots,\ \xi_p)=\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p} Sgn(i)w\ \mu_1\cdots\mu_p\ (x)\ dx_\alpha^{\mu_1}(\xi_{i_1})\ \cdots dx_\alpha^{\mu_p}(\xi_{i_p})$$

$$=\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p} w_{\mu_1\cdots\mu_p}(x)\ \det\ (<\xi_{i_j},\ dx_\alpha^{\mu_i}>)$$

이다 여기서 sgn(i)는 $i_1,\cdots,i_p$가 $1,2\cdots\cdots p$의 **偶順列**이면 $+$, **奇順列**이면 $-$를 表示한다. 그리고 i_j, $i=1,\ 2,\cdots,\ p$이다. 그리하여 $w\epsilon A^p(M)$는

$$\begin{array}{rcl} w:\ \mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)\ (\text{p-times}) & \longrightarrow & C(M) \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ (X_1,\cdots,\ X_p) & \cdots\cdots\cdots\rightarrow & w(X_1,\cdots,\ X_p) \end{array}$$

(여기서 $x\epsilon M$에 **對하여** $w(X_1\cdots,X_p)\ (x)=w(x)\ (X_1(x),\cdots,\ X_p(x)$이다.)와 같이 $\mathfrak{X}(M)$에서 R에의 p**重線型寫像**이 된다. 特히 $f\epsilon C(M)$에 **對하여**

$$f\cdot w(X_1,\cdots,\ X_p))=w(X_1,\cdots,\ X_i,\ fX_{i+1},\cdots,\ X_p)$$

가 成立하므로

"p次의 **微分**形式은 $\mathfrak{X}(M)$에서 $C(M)$에의 $C(M)$-module로서의 p**重 交代線型寫像**을 주며 이 逆도 **眞**이다."인 結論을 얻을 수가 있다.

두개의 C^∞**多様體** M,N가 C^∞ 급함수 $\varphi: M\rightarrow N$을 생각하자 M의 点 x에 **對하여** $\varphi(x)=y$라 하고 $\xi\epsilon T(M)_x$와 $C(N)\ni f$에 대하여

$$\bar{\xi}(f)=\xi(\varphi^*(f))=\xi(f\cdot\varphi)$$

라고 정의하자. 이때 $\bar{\xi}: C(N)\rightarrow R$는 線型임이 分明하고 $f,g\epsilon C(N)$에 대하여

$$\bar{\xi}(f\cdot g)=\bar{\xi}(f)\cdot g(y)+f(y)\cdot\bar{\xi}(f)$$

가 成立됨을 檢證할 수 있다. 따라서 $\bar{\xi}\epsilon T(N)_{\varphi(x)}=T(N)_y$이다. 이때

$$
\begin{array}{rccc}
d\varphi_{(x)}: & T(M)_x & \longrightarrow & T(N)_{\varphi(x)} \\
 & \Cup & & \Cup \\
 & \xi & \cdots\cdots\cdots & \bar{\xi}
\end{array}
$$

라고 정의하고 $d\varphi_x$를 x에서의 φ의 微分이라고 말한다. 勿論 $d\varphi_x$는 linear map이다. 이것을 좀더 分明히 表示하여 보면 다음과 같다. x, y의 局所座標를 各各 $(x^1, \cdots, x^n)$ 및 $(y^1, \cdots, y^m)$라 하면 $\varphi(x)=y$에서

$$y^\nu=\varphi^\nu(x^1, \cdots\cdots, x^n) \quad (\nu=1,2,\cdots,m)$$

을 얻는다. $\xi=\sum_{\mu=1}^{n}\xi^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$라 하면

$$\bar{\xi}=d\varphi_x(\xi)=\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n}\xi^\mu\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}$$

이다. $f\epsilon C(N)$에 對하여

$$\bar{\xi}(f)=\xi(f\cdot\varphi)=\sum_{\mu=1}^{n}\xi^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}(f\cdot\varphi)=\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{n}\xi^\mu\frac{\partial f}{\partial x^\nu}\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial x^\mu}$$

임을 表示하여 준다. 만약$\psi:N\to L$가 C^∞ 多樣體 사이의 C^∞급 함수이면 $x\epsilon M$에 對하여

$$d(\psi o\varphi)_x=d\psi_{\varphi(x)}\cdot d\varphi_x$$

가 成立함도 分明하다.

지금 $w\epsilon A^p(N)$라 하고 $\varphi:M\to N$은 C^∞ 多樣體 사이의 C^∞급 함수라고 하자. 이때

$$
\begin{array}{rccc}
\varphi^*: & A^p(N) & \longrightarrow & A^p(M) \\
 & \Cup & & \Cup \\
 & w & \cdots\cdots\cdots\to & \varphi^*(w)
\end{array}
$$

는 다음과 같이 정의되어 진다. $x\epsilon M$와 $\xi_1, \cdots \xi_p\epsilon T(M)_x$에 대하여

$$\varphi^*(w)(x)(\xi_1, \cdots, \xi_n)=w(\varphi(x))(d\varphi_x(\xi_1), \cdots, d\varphi_x(\xi_p))$$

라 한다. 이때 $\varphi^*(w)(x)\epsilon\overset{p}{\Lambda}T^*(M)_x$임은 分明하다. 따라서 $\varphi^*(w)$ (또는 $\varphi^*w)\epsilon A^p(M)$이다. $\varphi^*(w_1+w_2)=\varphi^*w_1+\varphi^*w_2$이고 $\varphi^*(w_1\Lambda w_2)=\varphi^*w_1\Lambda\varphi^*w_2$가 成立한다.

定義 2. (外微分(exterior differentation))

$$\begin{array}{ccc} d: A^p(M) & \longrightarrow & A^{p+1}(M) \\ \Cup & & \Cup \\ w & \cdots\cdots\cdots\cdots & dw \end{array}$$

여기서 dw는 다음과 같이 정의된다. $X_1, \cdots, X_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$에 對하여

$$dw(X_1, \cdots, X_{P+1}) = \sum_{i=1}^{P+1} (-1)^{i-1} X_i \; w(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots X_{P+1})$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} w([X_i, X_j], X_1 \cdots, \check{X}_i, \cdots, \check{X}_j, \cdots X_{P+1})$$

와 같이 定義한다. 여기서 $\check{X}_i$는 X_i가 除外된다는 뜻이다. 이때 d 또는 dw를 外微分이라 한다.

定理 3. $dw \in A^{p+1}(M)$이다.

證明. dw가 線型임은 곧 알 수 있다. 따라서 dw가 $C(M)$-module로써의 交代線型임을 증명하면 된다. 즉 $f \in C(M)$에 對하여 $dw(fX_1, \cdots, X_{P+1}) = f \cdot dw(X_1, \cdots, X_n)$임을 증명하면 된다. dw의 定義의 첫 項은 $x \in M$에 대하여

$$\sum_{i=1}^{P+1} (-1)^{i-1} X_i(w(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{P+1}))\,(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{P+1} (-1)^{i-1} X_i(x)\,(w(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{P+1}))$$

이고 $w(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{P+1}) \in C(M)$임에 우선 留意하여야 한다.

$dw(fX_1, \cdots, X_{P+1})$의 첫 項은 다음과 같이 된다.

$$fX_1 \; w(X_2, \cdots, X_{P+1}) + \sum_{i=2}^{P+1} (-1)^{i-1} X_i \; w(fX_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{P+1})$$

$$= fX_1(w(X_2, \cdots, X_{P+1})) + \sum_{i=2}^{P+1} (-1)^{i-1} X_i(fw(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{P+1}))$$

$$= fX_1 \; w(X_2, \cdots, X_{P+1}) + \sum_{i=2}^{P+1} (-1)^{i-1} f \; X_i(w(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{P+1})$$

$$+ \sum_{i=2}^{P+1} (-1)^{i-1}(X_i f) \; w(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{P+1})$$

$$= f \left(\sum_{i=1}^{P+1} (-1)^{i-1} X_i \; w(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{P+1}) \right)$$

$$+ \sum_{i=2}^{P+1} (-1)^{i-1}(X_i f) \; w(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{P+1})$$

$dw(fX_1, \cdots, X_{P+1})$의 第2項은 다음과 같다. $(g \in C(M))$

$$\begin{aligned}[fX_1, X_j] &= fX_1(X_j g) - X_j(fX_1(g)) \\ &= fX_1(X_j g) - f\, X_j(X_1(g)) - X_j(f) \cdot X_1(g)\end{aligned}$$

이므로

$$[fX_1, X_j] = f[X_1, X_j] - (X_j f) \cdot X_1$$

을 얻게 된다. 따라서

$$\sum_{j=2}^{P+1} (-1)^{1+j}\, w([fX_1, X_j], X_2, \cdots, \check{X}_j, \cdots, X_{P+1})$$

$$+ \sum_{2 \leq i < j} (-1)^{i+j}\, w([X_i, X_j], fX_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, \check{X}_j, \cdots, X_{P+1})$$

$$= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f\, w([X_i, X_j], X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, \check{X}_j, \cdots, X_{P+1})$$

$$- \sum_{i=2}^{P+1} (-1)^{i+2} (X_i f)\, w(X_1, X_2, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{P+1})$$

이 된다. 따라서 dw의 첫 項의 第2項과 第2項의 둘째 項은 서로 부호가 다르기 때문에 없어지고 結局

$$dw(fX_1, X_2, \cdots, X_{P+1}) = f\, dw(X_1, X_2, \cdots, X_{P+1})$$

을 얻는다.

M의 開集合을 U라 할 때 定義로부터

$$dw \mid U = d(w \mid U)$$

임은 곧 알 수 있다. ($w \in A^P(M)$이므로 $w: M \to \Lambda^P T^*(M)$, $dw: M \to \Lambda^{P+1} T^*(M)$에 留意하자.) 이때 $x \in U$에 對하여(단 x의 局座標는 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$이다).

$$w \mid U = \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_P} f_{\mu_1 \cdots \mu_P}(x)\, dx^{\mu_1} \Lambda \cdots \Lambda\, dx^{\mu_P}$$

이며, $f_{\mu_1 \cdots \mu_P}: U \longrightarrow R$는 C^∞급 함수이다.

定理 4. $dw \mid U = d(w \mid U) = d\left(\sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_P} f_{\mu_1 \cdots \mu_P}\, dx^{\mu_1} \Lambda \cdots \Lambda dx^{\mu_P}\right)$

$$= \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_P} df_{\mu_1 \cdots \mu_P}\, \Lambda dx^{\mu_1} \Lambda \cdots \Lambda dx^{\mu_P}$$

證明. 지금 우리는 M의 open set U에 對하여 생각하고 있으니 이 U上에서 $w=f\,dx^1 \wedge\cdots\wedge dx^p$라 하여 $dw=df\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^p$ 됨을 증명하면 된다.

$X\in\mathfrak{X}(M)$는 $x\in M$에 대하여 $X(x)=\sum_{\mu=1}^{n} X^{\mu}(x)\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}$이므로 $dw\left(\dfrac{\partial}{\partial x\mu},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu_{p+1}}}\right)$ ($\mu_1<\cdots<\mu_{p+1}$: μ_i는 1에서 n 사이의 수)에 의하여 dw의 값은 完全히 決定된다. 이때 便宜上

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}},\cdots\cdots,\quad X_{p+1}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu_p}}$$

라 놓자. 그러면 $x\in M$, $f\in C(M)$에 對하여

$$\begin{aligned}
[X_i,\ X_j](f)(x)&=X_i^{(x)}(X_jf)-X_j^{(x)}(X_if)\\
&=\left(\frac{\partial 1}{\partial x^{\mu_i}}-\frac{\partial 1}{\partial x^{\mu_j}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x^{\mu_1}}(x)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^{\mu_p}}(x)\right)=0
\end{aligned}$$

이므로 $[X_i,\ X_j]=0$ 되고 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^p\ (X_1,\cdots,\check{X}_i,\cdots,X_{p+1})$

$$=\begin{vmatrix}\langle X_1,\ dx^1\rangle,\cdots,\ \langle X_{p+1},\ dx^1\rangle\\ \vdots\\ \langle X_1,\ dx^p\rangle,\cdots,\ \langle X_{p+1},\ dx^p\rangle\end{vmatrix}=\text{constant}$$이다.

따라서

$$\begin{aligned}
&d(f\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^p)(X_1,\cdots,X_{p+1})\\
&=d(f(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^p)(x_1,\cdots,X_{p+1})\\
&=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}X_i(f(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^p)(X_1,\cdots,X_{p+1}))\\
&=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}(X_if)(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^p)(X_1,\cdots,X_{p+1})\\
&+\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}f\,X_i(\underbrace{(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^p)(X_1,\cdots,X_{p+1})}_{=\text{cont}})\\
&=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}(X_if)(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^p)(X_1,\cdots,X_{p+1})\\
&=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}X_if\ det(\langle X_j,\ dx^{\mu}\rangle)
\end{aligned}$$

(where $j=1,2,\cdots\check{i},\cdots,\ p+1,\ \mu=1,2,\cdots p$).

$$=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x^{\mu_j}}(x)\right)det(\langle X_j,\ dx^{\mu}\rangle)$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \langle X_i, \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x) dx^\mu \rangle \det(\langle X_i, dx^k \rangle)$$

$$= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \langle X_i, df_x \rangle \det(\langle X_i, dx^k \rangle)$$

$$= \begin{vmatrix} \langle X_1, df \rangle & \langle X_1, dx^1 \rangle \cdots\cdots & \langle X_1, dx^p \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle X_{p+1}, df \rangle & \langle X_{p+1}, dx^1 \rangle \cdots & \langle X_{p+1}, dx^p \rangle \end{vmatrix}$$

$$= df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p \; (X_1, \cdots, X_{p+1}) \quad Q.E.D.$$

定理 5. (i) $d(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha d w_1 + \beta d w_2 \; (\alpha, \beta \in R)$

(ii) $w^p \in A^p(M)$, $w^q \in A^q(M) \Rightarrow d(w^p \wedge w^q) = dw^p \wedge w^q + (-1)^p \, w^p \wedge dw^q$

(iii) $d(dw) = 0$

(iv) $\varphi : M \to N$가 C^∞ 多樣體 사이의 C^∞ 급함수라면

$$d(\varphi^* w) = \varphi^*(dw)$$

우리가 必要로 한 것은 (iii)이며, (iii)의 證明은 (ii)을 必要로 하기 때문에 (ii)와 (iii)만을 증명하기로 한다.

ii의 證明. $w^p = f dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$, $w^q = g dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}$일때만 증명하면 된다.

$$d(w^p \wedge w^q) = d((fg) dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q})$$

$$= d(fg) \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q} \text{ (앞 정리에 의함)}$$

$$= (df \cdot g + f \cdot dg) \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}$$

$$= df \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \wedge g dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}$$

$$+ (-1)^p f dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dg \wedge dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}$$

$$= dw^p \wedge w^q + (-1)^p w^p \wedge dw^q.$$

(iii)의 證明: 첫째: $f \in C(M)$에 對하여

$$d(df) = d\left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right) \wedge dx^\mu \text{ (앞 정리에 의함)}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\mu} dx^\nu \wedge dx^\mu$$

$$= \sum_{\mu < \nu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} (dx^\mu \wedge dx^\nu + dx^\nu \wedge dx^\mu) = 0$$

그리고 $d(dx^\mu)=d(1\cdot dx^\mu)=d1\Lambda dx^\mu=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial 1}{\partial x^\nu}dx^\nu\Lambda dx^\mu=0$이다. 따라서 (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} d(dw)&=d(d(fdx^{\mu_1}\Lambda\cdots\Lambda dx^{\mu_p}) \\ &=d(df\,\Lambda dx^{\mu_1}\Lambda\cdots\Lambda dx^{\mu_p}) \\ &=d(df)\Lambda dx^{\mu_1}\Lambda\cdots\Lambda dx^{\mu_p}-df\Lambda d(dx^{\mu_1}\Lambda\cdots\Lambda dx^{\mu_p}) \\ &\quad\ \underset{0}{\parallel}\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underset{0}{\parallel} \\ &=0 \quad Q.E.D. \end{aligned}$$

§2. Rham cohomology와 Čech cohomology.

우리는 M을 n次元 C^∞ 多樣體라 할 때

$R(M)$: $o\longrightarrow A^0(M)\xrightarrow{d}A^1(M)\xrightarrow{d}A^2(M)\longrightarrow\cdots\cdots\longrightarrow A^n(M)\longrightarrow o$인 複體를 얻었음을 전節에서 증명하였다. 이때의 複體는 $C(M)$-module로써의 複體이지만 $R\subset C(M)$이므로 Rham complex $R(M)=R$는 R-module로써의 (즉 real vectao space로써의) complex로 간주한다. 이 복체에서 얻은 Cohomology group을

$$H^p(M:R)$$

로 表示하고

$$H^*(M:R)=\bigoplus_p H^p(M:R)$$

를 Rham cohomology ring이라 한다.

Čech complex를 形成하자. M의 open covering을 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\epsilon A}$라 하자. A에서 任意로 $p+1$個를 뽑아낸 順序組$(\alpha_0, \alpha_1,\cdots, \alpha_p)$에 對하여 하나의 實數 $Cd_0\cdots\alpha_p$를 대응시킨다. 그러나 만약 $U\alpha_0\cap\cdots\cap U\alpha_p=\phi$이면 항시 $C\alpha_0\cdots\alpha_p=0$이라고 規約을 한다. 여기서

$$\begin{array}{l} C:\{\alpha_0\cdots\alpha_p \mid \alpha_i\epsilon A,\ i=0\cdots,\ p\}\longrightarrow R \\ \qquad\quad \Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Downarrow \\ \qquad\ \alpha_0\cdots\alpha_p\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\longrightarrow C\alpha_0\cdots\alpha_p \end{array}$$

이다. 이렇게 정의한 C를 P-cochain이라 한다. 또 하나의 P-cochain C'에 對하여

$$(\alpha C+\beta C')_{\alpha_0\cdots\alpha_p}=\alpha C\alpha_0\cdots\alpha_p+\beta C'\alpha_0\cdots\alpha_p\ (\alpha,\ \beta\epsilon R)$$

되게 정의하면 p-cochain의 全體의 集合 $C^p(\mathcal{U})$는 R-module(real vecter space)가 된다. 지금

$$\delta : C^p(\mathcal{U}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U})$$

를 $(\delta C)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i C_{\alpha_0\cdots\check{\alpha}_i\cdots\alpha_{p+1}}$ $(c \in C^p(\mathcal{U})$ 및 $U\alpha_0 \cap \cdots\cdots \cap U\alpha_{p+1} = \phi$이면 $(\delta c)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+1}} = 0$ 되게 정의하여 주면 R-module homomorphism임은 곧 알 수이다. 이때 $\delta\delta = 0$임은 $U\alpha_0 \cap \cdots \cap U\alpha_{p+1} \neq \phi$일 때 $c \in C^p(\mathcal{U})$에 대하여 $\delta(\delta C) = \delta\delta C = 0$됨을 보면 充分하다.

$$\begin{aligned}\delta(\delta C)_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+2}} &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i (\delta C)_{\alpha_0\cdots\check{\alpha}_i\cdots\alpha_{p+2}} \\ &= \sum_{i=0}^{p+2} \sum_{j<i} (-1)^{i+j} C\alpha_0\cdots\check{\alpha}_j\cdots\check{\alpha}_i\cdots\alpha_{p+2} \\ &+ \sum_{i=0}^{p+2} \sum_{j>i} (-1)^{i+j+1} C\alpha_0\cdots\check{\alpha}_i\cdots\check{\alpha}_j\cdots\alpha_{p+2} \\ &= 0\end{aligned}$$

그리하여 우리는 R-module로써의 complex

$$C(\mathcal{U}) : o \longrightarrow C^\circ(\mathcal{U}) \xrightarrow{\delta} C'(\mathcal{U}) \longrightarrow \cdots\cdots$$

을 얻는다. 이 complex에서 얻은 cohomology를

$$H^p(\mathcal{U}) = H^p(C(\mathcal{U}))$$

라고 놓고 p-dimensional Čech cohomology group이라 한다. 그런데 $C(\mathcal{U}) = \bigoplus_p C^p(\mathcal{U})$는 다음의 乘法에 의하여 乘法的 複體가 된다. $C \in C^p(\mathcal{U})$, $C' \in C^q(\mathcal{U})$에 대하여 $\alpha_0\cdots\alpha_{p+q}$을 選出하고 $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_{p+q}} = \phi$이면 $(C.C')_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+q}} = 0$, $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_{p+q}} \neq \phi$이면

$$(C.C')_{\alpha_0\cdots\alpha_{p+q}} = C_{\alpha_0\cdots\alpha_p} C'_{\alpha_p\cdots\alpha_{p+q}}$$

되게 정의한다. 이렇게 하여

$$H^*(\mathcal{U}) = \bigoplus_p H^p(\mathcal{U})$$

는 cohomology ring이 된 바 이것을 $\mathcal{U}$에따른 Čech cohomology ring이라 한다. 그런데 $H^*(\mathcal{U})$는 M의 open covering $\mathcal{U}$에 따라 달라져서 큰 不便이 있다. 그러므로 covering $\mathcal{U}$에 相關없이 M의 Topology에만 의존한 cohomology ring을 만들 必要가 있다. 여기에는 直極

限이라는 매우 便利한 武器가 있다.

M의 open covering을 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\mathcal{V}=\{V_\beta\}_{\beta\in B}$을 取하자. $\mathcal{V}$가 $\mathcal{U}$의 細分이라 함은 어떤 $\mathcal{V}$의 member에도 그것을 內容하는 $\mathcal{U}$의 member가 있다는 뜻이다. 따라서 이 경우 $V_\beta\in\mathcal{V}$에 대하여 $\lambda(\beta)\in A$로써 $V_\beta\subset U_{\lambda(\beta)}$인 것을 各 V_β에 정하여 두자. 이때

$$\lambda: C^p(\mathcal{U})\longrightarrow C^p(\mathcal{V})$$

를 다음과 같이 정의한다. 各 $C\in C^p(\mathcal{U})$에 對하여

$$(\lambda C)_{\beta_0\cdots\beta_p}=\begin{cases}C_{\lambda(\beta_0)\cdots\alpha(\beta_p)} & if\ V_{\beta_0}\cap\cdots\cap V_{\beta_p}\neq\phi\\ o & if\ V_{\beta_0}\cap\cdots\cap V_{\beta_p}=\phi\end{cases}$$

이것은 $\lambda\delta=\delta\lambda$임을 λ,δ의 定義에서 알 수 있기 때문에 $\lambda: C(\mathcal{U})\longrightarrow C(\mathcal{V})$는 chain map가 되고 따라서

$$\lambda^*: H^*(\mathcal{U})\longrightarrow H^*(\mathcal{V}).$$

를 유도한다. 그런데 $V_\beta\in\mathcal{V}$에 대하여 다른 $\lambda'(\beta)\in A$ with $V_\beta\subset U_{\lambda'(\beta)}$를 取하여도

$$\lambda'^*: H^*(\mathcal{U})\longrightarrow H^*(\mathcal{V})$$

을 얻는다. 이때 다음의 補題가 있다.

補題 6. $\lambda^*=\lambda'^*$

證明. λ,λ'의 chain homo topy만 만들면 證明은 끝이 난다.

$$\varphi^p: C^p(\mathcal{U})\longrightarrow C^{p-1}(\mathcal{V})$$

를 다음과 같이 정의한다. $C\in C^p(\mathcal{U})$에 대하여

$$(\varphi^p c)_{\beta_0\cdots\beta_{p-1}}=\begin{cases}\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^i C_{\lambda(\beta_0)\cdots\lambda(\beta_i)\,\lambda'(\beta_i)\cdots\lambda'(\beta_{p-1})} & \\ & if\ V_{\beta_0}\cap\cdots\cap V_{\beta_{p-1}}\neq\phi\\ o & if\ V_{\beta_0}\cap\cdots\cap V_{\beta_{p-1}}=\phi\end{cases}$$

이때 $\varphi'{}_o\delta=\lambda'-\lambda$ ($C^o(\mathcal{U})$上에서)

$\delta_o\varphi^p+\varphi^{p+1}{}_o\delta=\lambda'-\lambda$ ($C^p(\mathcal{U})$上에서)

됨을 알 수 있고 $\varphi=\{\varphi^1,\cdots,\varphi^p\cdots\}$는 λ,λ'의 chain homotopy이다. 지금 $\mathcal{V}$가 $\mathcal{U}$의 細分임을 $\mathcal{V}>\mathcal{U}$라 표시하고 이 경우 $\lambda^*: H^*(\mathcal{U})\to H^*(\mathcal{V})$를

$$\varphi_{\sigma V}^{\sigma U}: H^*(^\sigma U) \rightarrow H^*(^\sigma V)$$

로 表示하면 $^\sigma U$, $^\sigma V$에 對하여 $^\sigma W < ^\sigma U$, $^\sigma W < ^\sigma V$인 M의 open covering $^\sigma W$가 존재하며, $^\sigma W < ^\sigma U < ^\sigma V$인 경우

$$\varphi_{\sigma V}^{\sigma W} = \varphi_{\sigma V}^{\sigma U} \cdot \varphi_{\sigma U}^{\sigma W}$$

그리고 $\varphi_{\sigma U}^{\sigma U} = 1H^*(^\sigma U)$ 등이 성립한다. 따라서 $\{H^p(^\sigma U), \varphi_{\sigma V}^{\sigma U}\}$는 直極限系를 만들며 故로

$$H^*(M) = \varinjlim H^*(^\sigma U)$$

인 ring $H^*(M)$가 존재한다. 이 $H^*(M)$를 Čech cohomology ring이라 한다. 勿論$H^*(M)$는 M의 topology에만 依存한다. 우리는 de Rham cohomology ring $H^*(M: R)$와 Čech cohomology ring $H^*(M)$를 定義하였다.

§3. de Rham 理論

Rham 理論은 다음 定理를 뜻 한다.

定理 7. M이 C^∞-多樣體이면 $H^*(M:R)$과 $H^*(M)$은 同型이다.

이것의 證明은 다음를 利用하여야 證明이 된다.

定義 8. (單純被覆(simplecovering)) C^∞ 多樣體의 M의 局所的으로 有限인 open covering $^\sigma U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 이 各 $\alpha \in A$에 對하여 $\overline{U_\alpha}$는 compact이고 $\bigcap_{i=1}^{p} U_{\alpha_i} \neq \phi(\alpha_i \in A)$이면 ($p$는 任意)

$\bigcap_{i=1}^{p} U\alpha_i$에서 R^n의 開立方體 $= \{(x^1, \cdots x^n) | \text{各 } i = 1, \cdots n\text{에 對하여 } -1 < x^i < 1\} = Q^n$에 보내는 同位相寫像으로 C^∞급 함수가 존재하면 open covering $^\sigma U$를 M의 單純被覆이라 한다.

그런데 M이 C^∞多樣體이면 恒時 M은 單純被覆을 가짐이 證明된다(秋月: 調和積分論上).

定理 9. $^\sigma U$가 M의 單純被覆이면 同型寫像

$$\theta_{\sigma U}: H^*(M:R) \xrightarrow{\cong} H^*(^\sigma U)$$

즉 各 $p = 0, 1, \cdots\cdots. n$ (M이 n次인 경우)에 對하여

$$\theta_{\sigma U}: H^p(M:R) \xrightarrow{\cong} H^p(^\sigma U)$$

($p > n$이면 $H^p(M:R) = 0$이므로 $H^p(^\sigma U) = 0$ 이다)가 존재한다.

이 定理 9를 利用하여 定理 7를 證明하여 보기로 하자.

定理 7의 證明: 任意의 M의 open covering $\mathcal{U}$에 對하여 simple covering $\mathcal{V}$가 $\mathcal{U}<\mathcal{V}$되게 존재한다. 이때

$$\begin{tikzcd} H^*(\mathcal{U}) \arrow[r, "\varphi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}"] & H^*(\mathcal{V}) \arrow[r] \arrow[dr, "\vartheta_{\mathcal{V}}^{-1}"', "\cong"] & \varinjlim H^*(\mathcal{U}) = H^*(M) \arrow[d, "\exists!\,\Phi"] \\ & & H^*(M:R) \end{tikzcd}$$

에서 $\exists!\ \Phi$: $H^*(M) \longrightarrow H^*(M:R)$이 존재한다. 이 경우 **單純被覆**으로 $\mathcal{V}<\mathcal{W}$이면

$$\begin{tikzcd} H^*(\mathcal{V}) \arrow[r, "\varphi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}"] \arrow[dr, "\vartheta_{\mathcal{V}}^{-1}"', "\cong"] & H^*(\mathcal{W}) \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta_{\mathcal{W}}^{-1}", "\cong"'] & H^*(M) \arrow[dl, "\Phi"] \\ & H^*(M:R) & \end{tikzcd}$$

가 成立한다. 얼마던지 細分인 單純被覆을 取할 수 있기 때문에 Φ: $H^*(M) \xrightarrow{\cong} H^*(M:R)$는 同型 寫像이야 한다. Q. E. D.

§4. de Rham 論理의 活用

de Rham 理論의 活用은 幾何的인 面과 解析的인 面의 두가지로 나눌 수 있다.

(i) 位相空間의 硏究는 同位相인 空間들에 不變인 幾何的 量의 追究에 있다. 그러기 위하여 位相空間에 Homology, cohomology 또는 homotopy 群 등을 定義하였다. 그러나 同位相인 空間에 對한 이들의 群들은 同型임이 證明되였지만, 이들의 群이 同型인 두 空間은 반드시 同位相은 아니다. 그리하여 다시 이들 群을 分析하므로써 어떤 量을 찾아,

同位相 $\rightleftarrows$ 그 量이 同一하다.

인 關係를 滿足시키도록 數學은 努力하고 있다. 이것의 하나의 例가 Euler-Poincaré 標數이다. 特히 이것은 位相空間이 多樣體일 때, 그것의 cohomology群의 元(cohomology class)로 定義된 pontrjagin類, Stiefel-Whitney類 및 Chern類에서 誘導된 Potrjagin數, Chern數의 特殊 경우로써 Euler-Poincaré 標數가 說明된다. 勿論 위 特殊類는 多樣體의 位相構造 및 微分 構造(解析 構造)에 對한 不變量인 것이다.

de Rham cohomology는 多樣體 M의 vector bundle E와 E上의 接續(connection)이 주어졌을때 이것의 曲率로부터 M의 어떤 cohomology class를 構成하는데 도움이 되며 Pontrjagin 類 및 chern 類가 된다. 즉 de Rham cohomology 類에 의하여 C^∞多樣體의 幾何的 性質인

曲率에 對한 解析的 解釋의 可能을 가져오게 되였다.

(ii) de Rham 複體의 一般化가 楕圓型 複體의 槪念이다. 우선 de Rham 複體는 調和積分論과 相通이 되여 多樣體上의 幾何的 量을 楕圓型 偏微分方程式의 解로 實現할 수 있다는 것을 分明히 하였다는 것과 이것이 곧 大域的 解析學(global Anaylsis)의 발판이 되였다는 보다 큰 成果을 de Rham 理論이 거두었다. 더 나아가서 Compact인 多樣體의 楕圓型 複體에 의하여 指標를 정의할 수 있고 이것이 幾何的量으로 表示할 수 있다는 것이 Atigoh-Singer의 理論이다. 이 理論의 證明은

첫째: Cobordism 論에 의한 것

둘째: K-theory(equivalent)에 의한 것

셋째: 熱傳導方程式에 의한 解析的 方法

등의 3種類가 있다. 오늘날 多樣體論에서 가장 精巧한 理論이 Atiyah Singer의 理論이라고 한바 이 것의 端서가 de Rham 理論이 되었다는 것을 생각할 때 de Rham理論의 數學에서의 位置는 곧 우리들은 알 수 있을 것이다.

끝으로 數學에서는 여러가지 技巧를 써서 數學 自體를 매우 理解하기 어렵고 複雜하게 만들지마는 이러한 複雜한 技巧를 빨리 습득하여야만 이 最尖端의 정수한 數學理論에 到達할 수 있다는 것을 이 글을 通하여 讀者가 알아준다면 筆者는 더 이상 기쁜일이 없을 것이다.

Jeonbug National University