韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1979. 6. Vol. XVII No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1979. Vol. XVII No. 2

Eulerian graph와 Eulerian matroid의 관계

서울大學校 師範大學 김 연 식

1. 서 론

Connected graph G가 *Eulerian graph*라는 말은 G의 모든 edge를 포함하는 closed path가 존재할 때를 말한다. 곧 G가 Euler circuit를 포함할 때를 말한다. 그러나 *binary matroid* $M(S,C)$가 *Eulerian*이라는 말은 E가 M의 disjoint인 circuit들의 합으로 표시될 때를 말한다.

여기서 주의할 점은 Eulerian matroid의 정의가 Eulerian graph에서도 비슷하게 적용된다는 점이다. 곧 Eulerian graph $G(V,E)$는 E가 G의 disjoint circuit들의 합으로 표시되기 때문이다. 그렇다면 Eulerian graph의 정의와 같은 성질을 Eulerian matroid에서도 가질 수 있을 것 같다. 사실 *binary matroid* M이 *Eulerian*이란 말은 적당한 binary matroid M^+가 존재하여 M^+의 한 circuit S에 M^+를 contracting한 것이 M이라는 것과 동치이다. 이 note에서는 이것을 밝히려 한다.

먼저 여기에 사용하는 용어를 정리해 둔다.

2. 보조 정리

S를 finite set라고 하고 $\mathbf{C}$를 다음 조건 (C1), (C2, (C3)를 만족하고 S의 subset들의 collection이라고 하자.

(C1) $\phi \notin \mathbf{C}$

(C2) $\forall C,\ C' \in \mathbf{C}:\ C \subset C' \Rightarrow C = C'$

(C3) $\forall e \in S,\ \forall C,\ C'(\neq) \in \mathbf{C}:\ e \in C \cap C' \Rightarrow$

$$\exists C'' \in \mathbf{C}:\ C'' \subset C \cup C' - \{e\}$$

이때 $(S,\mathbf{C})$를 *matroid* $M(S,\mathbf{C})$라고 한다. 또 $\mathbf{C}$의 원 C를 $M(S,\mathbf{C})$의 *circuit*라고 하고 circuit를 포함하지 않은 S의 subset를 *independent*라고 한다. S의 maximal independent subset를 $M(S,\mathbf{C})$의 *base*라고 한는.

임의의 matroid M이 주어졌을 때 M의 모든 base의 S에서의 complement 전체를 새로운 base로 갖는 matroid M^*을 처음 matroid M에 대한 *dual matroid*라고 한다.

matroid $M(S,\ \mathbf{C})$에서 S의 independent subset이 아닌 S의 subset를 *dependent*라고 한다. 그러면 circuit는 minimal dependent 임을 알 수 있다. Matroid M에 대한 dual matroid M^*의 circuit를 M의 *cocircuit*라고 한다.

Matroid $M(S,\mathbf{C})$가 *Euler matroid*라는 것은 S가 disjoint인 circuit $C_1, C_2, \dots, C_n$으로 $S = C_1 + C_2 + \dots + C_n$과 같이 표시될 때를 말한다. 또 $M(S,\mathbf{C})$의 모든 circuit가 짝수개의 원을 가질 때 $M(S,\mathbf{C})$를 *bipartite matroid*라 한다. Matroid $M(S,\mathbf{C})$를 *binary*라고 하는 것은 임의의 circuit C와 임의의 cocircuit C'에 대하여 $|C \cap C'| \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$인 때를 말한다.

다음 Lemma의 증명은 생략한다.

Lemma 1. Binary matroid $M(S,\mathbf{C})$가 Euler라는 것은 M의 dual matroid M^*가 bipartite일 때 그때만을 말한다.

Matroid $M(S,\mathbf{C})$의 circuit(또는 cocircuit)

의 임의의 collection의 symmetric difference를 M의 cycle(또는 cocycle)이라고 한다.

Lemma 2. Matroid $M(S, C)$가 binary 라는 것은 다음 두 조건과 동치이다.

(B1) M의 circuit 전체는 minimal non-empty cycle 전체와 같다.

(B1) cycle space는 cocycle space의 orthogonal complement 이다.

Matroid $M(S, C)$가 주어지고 A가 S의 subset일 때 M의 A에의 *contraction* $M \cdot A$ 라는 것은 matroid $M \cdot A$의 circuit 전체의 집합이 $\{C_i \cap A \mid C_i \in C\}$의 minimal member들의 집합이 되어 있을 때를 말한다.

Theorem. Binary matroid $M(S, C)$가 Euler라는 것은 다음과 동치이다.

S를 circuit로 갖는 적당한 binary matroid M^+가 존재하여 M^+를 S에 contracting한 matroid가 $M(S, C)$이다.

3. 정리의 증명

$M = M^+ \cdot S$인 binary matroid M^+가 존재하여 S가 M^+의 circuit가 될 때 binary matroid M이 Euler임을 밝히자.

이것은 Lemma 1에 의하여 binary matroid M의 dual matroid M^*가 bipartite임을 밝히면 된다.

$M = M^+ \cdot S$이므로 C^+가 M의 cocircuit$\Longleftrightarrow$ C'가 M^+의 cocircuit이고 $C' \subset S$. 따라서 C'가 M의 임의의 cocircuit이면 C'는 M^+의 cocircuit이고 $C' \subset S$이다. 그런데 M^+는 binary이므로 $|C' \cap S| \equiv 0 (\text{mod } 2)$. 그러므로 $|C'| = |C' \cap S| \equiv 0 (\text{mod } 2)$. 따라서 M^*는 bipartite이다.

다음에 그역을 밝히자.

Matroid $M(S, C)$가 Euler라고 하자.

먼저 $S \in C$인 경우는 $M = M \cdot S$이므로 M^+를 M으로 놓으면 된다. 따라서 $S \notin C$인 경우만 생각하자.

$C = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$이라고 놓고 $S \cap S' = \phi$인 $S' = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$을 사용하여 $S^+ = S \cup S'$라고 하자. S^+의 subset의 어떤 collection F를 다음과 같이 정의한다.

$$F = \{C_i \cup \{s_i\} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Z를 F에 의하여 symmetric difference의 결합으로 만들어진 전체 collection이라고 하고 C^+를 Z에 속하는 minimal non-empty set 전체의 집합이라고 하자.

Lemma 2의 (B1)에 의하여 binary matroid M^+가 $M^+(S^+, C^+)$임을 알 수 있다. 이제 $M = M^+ \cdot S$, $S \in C^+$임을 밝히면 증명은 끝난다.

첫째 $S \in C^+$임을 보이자. 그런데 $S \in Z$이므로 $S \in C^+$임을 보이려면 S가 Z 안에서 minimal non-empty set임을 보이면 된다. 만약 $A \in Z$, $A \subset S$인 A를 생각하면 $A \cap S' = \phi$이다. $A \in Z$이므로 A는 F의 원들을 symmetric difference로 결합하여 나타낼 수 있다. 그런데 모든 i에 대하여 $s_i \notin A$이므로 $A = S$이다. 따라서 $S \in C^+$. 둘째 $M = M^+ \cdot S$임을 보이자. 이것을 밝히려면 두 matroid M, $M^+ \cdot S$가 같은 circuit의 집합을 가짐을 밝히면 된다.

$H = \{C \cap S \mid C \in C^+\}$라고 하자. 그러면 $M^+ \cdot S$의 circuit 전체의 집합은 H에 속하고 minimal non-empty set 전체의 집합이 된다. 이제 임의의 $C \in C^+$는 C^+의 정의에 의하여 F에 속하는 원들의 symmetric difference로 표시될 수 있다. 또 $(A \triangle B) \cap S = (A \cap S) \triangle (B \cap S)$이므로 F의 정의에 의하여 H에 속하는 원은 $C \cup \{S\}$에 속하고 원들의 symmetric difference로 나타내어진다. 가정에 의하여 S는 M의 disjoint인 circuit들의 합으로 나타내어지므로 H는 M의 cycle space인 K의 subset이 된다.

그런데 모든 i에 대하여 $C_i \cup \{s_i\} \in C^+$이므로 $C_i \in H$ 따라서 $C \subset H$ 또 C는 K 안에서의 minimal non-empty set들의 전체 집합이므로 C는 H 안에서의 minimal non-empty set

들의 전체 집합이다. 곧 $\boldsymbol{C}$가 $M^{+}\cdot S$의 circuit 전체의 집합이다. 그러므로 $M=M^{+}\cdot S$이다.

參考文獻

[1] G.N. Minty, On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, *J. Math. Mech.* 15(1966), 485-520.

[2] W.T. Tutte, Lectures on Matroids, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 69 B1 (1965), 1-47.

[3] Rabe von Randow, *Introduction to the theory of Matroids*, Springer-Verlag (1975).