韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1979. 6. Vol. XVII No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1979. Vol. XVII No. 2

Fuzzy 集合에 對하여

서울大學校 師範大學 朴 漢 植

§1. 序 論

"키 큰 사람의 모임"은 키가 크다고 하는 것에 對한 規準이 模糊하므로 集合이라고 할 수 없다. 이것이 一般集合論에서 다루는 態度인데, 이러한 모임도 하나의 集合으로 取扱하자는 見解가 1965年 Calfornia 大學의 L. A. Zadeh 가 "Fuzzy Sets"라는 論文을 發表하므로서 表面化되었다[1]. 이 論文이 發表되기 以前에도 이러한 것에 對한 硏究가 없는 것은 아니다. vagueness, ambivalance, ambiguity 라 하는 모호성에 對한 定性的인 硏究도 있고 또 모호성을 取扱하는 定量的인 方法으로서 確率의 槪念이 使用되어 왔다. 그러나 이것으로서 現實에 存在하는 모든 모호성은 處理할 수 없는 것에서, 이 理論이 새로 登場했다고 볼 수 있을 것 같다.

fuzzy 集合의 槪念이 發表된 以後, 이것에 對한 批判도 많으나 現實에 모호한 現象이 많이 存在하고 있는 것에서, fuzzy 集合의 槪念은 世界 各國의 硏究者의 興味를 끌고 硏究成果도 많이 發表되고 있다. 1965年에 單 2編뿐인 硏究論文이 10年 뒤인 1975年에는 227編의 論文이 發表되고 있다[2]. fuzzy 理論에 關聯된 國際會議(1978年, 1979年)를 들면 다음과 같다.

- Trienical IFAC World Congress (Fuzzy Decision Making and Applications), Helsinki, June 12-16 (1978)
- Int. Cong. of Cybernetics and Systems (Fuzzy Systems), Amsterdam, Aug. 21-25 (1978)
- Int. Conf. on Cybernetics and Society (Fuzzy Sets and Systems), Tokyo, Nov. 3-7(1978)
- Joint National Meeting of ORSA/TIMS (Fuzzy Sets), New York, May 1-3(1978) (Fuzzy Aspects of Managerial Decision-Making), Los Angeles, Nov. 13-15(1978)
- IEEE Conf. on Decision and Control(Fuzzy Set Theory and Applications), Sandiego, Jan. 10-12 (1979)
- 3rd Workshop on Fuzzy Reasoning-Theory and Applications, London, Sept. 15(1978)
- Int. Colloq. on Fuzzy Set Theory and Applications, Maresille, Sept. 20-22(1978)
- 8th EURO Working Group on Fuzzy Sets, Amsterdam, April 9-11 (1979)
- 6th Int. Conf. on Artificial Intelligence (Fuzzy Reasonings), Tokyo, Aug. 20-24 (1979)

그리고 1978年부터는 North-Holland 社에서 專門雜誌가 創刊하기 시작하였는데, 그 題目은

International Journal for Fuzzy Sets and Systems

로서 年 4回 發行되고 있다.

이러한 狀況에서도 아직 우리나라에서는 이 理論을 認知하고 있는 사람이 적은 것 같아서 여기에 fuzzy 理論의 槪要를 紹介할까 한다.

卽 §1에서 fuzzy 集合의 槪要를 §3에서 type 2 fuzzy 集合을 §4에서 fuzzy 論理를 說明하겠다. 그리고 §3, §4에서 必要한 擴張原理를 §2에서 說明한다. 이들 記述의 大部分과 文獻은 [13]에 따른 것이다.

§1. Fuzzy 集合

全體集合 U에서의 fuzzy 集合 A는

$$\mu_A:\ U \to [0,1] \qquad (1)$$

인 membership 函數 μ_A에 依해서 特性지워지는 集合으로서, 값 $\mu_A(u)(\in[0,1])$는 A에서의 $u(\in U)$의 所屬度를 나타낸다.

A가 通常的인 集合인 경우는 式 (1)에서의 單位區間[0,1]이 {0,1}이 되고, μ_A는 特性函數가 된다. 卽 $\mu_A(u)$의 값이 0 또는 1만의 값을 취하는 경우가 一般的인 集合의 경우가 된다. 또 [0,1]을 束 L이나 環 R로 置換한 경우 fuzzy 集合은 *L-fuzzy* 集合이나 *R-fuzzy* 集合으로 擴張 定義된다[3],[4].

fuzzy 集合의 表記法으로서는 다음의 方法이 자주 使用된다. 먼저 全體集合 U가 有限일 때 fuzzy 集合 A는 다음과 같이 나타내어진다.

$$A=\mu_A(u_1)/u_1+\mu_A(u_2)/u_2+\dots+\mu_A(u_n)/u_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i)/u_i,\quad u_i\in U \qquad (2)$$

여기서 +는 算術合이 아니며 合集合을 나타낸다. 이것을 또 一般集合論에서 集合을 나타내는 것과 같이

$$A=\{(u_1|\mu_A(u_1)),\ (u_2|\mu_A(u_2)),\dots,$$
$$(u_n|\mu_A(u_n)),\dots\}$$

으로 나타내기도 한다. U가 連續인 경우 式 (2)의 一般化로서

$$A=\int_U \mu_A(u)/u$$

와 같은 積分記號를 使用해서 나타낸다.

例 1. "several"라는 漠然한 數의 表現을 fuzzy 集合(A라 하자)으로 나타내면 U가

$$U=1+2+\cdots+10$$

와 같이 1에서 10까지의 자연수의 集合인 경우

$$A=0.5/3+0.8/4+1/5+1/6$$
$$+0.8/7+0.5/8$$

과 같이 된다. □

fuzzy 集合을 實數에서 論하는 경우, 그 *membership* 函數를 다음의 3개의 標準函數를 利用해서 나타내면 便利하다.

먼저 S 函數라고 하는 것을 말하면 다음과 같이 媒介變數 a,b,c를 사용해서 나타내어진다.

$$S(u;a,b,c)=\begin{cases}0 & u\leq a\\ 2\left(\frac{u-a}{c-a}\right)^2 & a\leq u\leq b\\ 1-2\left(\frac{u-c}{c-a}\right)^2 & b\leq u\leq c\\ 1 & u\geq c\end{cases}$$

여기서 媒介變數 $b\left(=\frac{a+b}{2}\right)$는 S 函數의 값이 0.5가 되는 點이다.

다음에 Π 函數와 Z 函數는 S 函數를 利用해서 다음과 같이 나타내어진다.

$$\Pi(u;\ b,\ c)=\begin{cases}S\left(u;\ c-b,\ c-\frac{b}{2},\ c\right) & u\leq c\\ 1-S\left(u;\ c,\ c+\frac{b}{2},\ c+b\right) & u\geq c\end{cases}$$

$$Z(u;a,b,c)=1-S(u;a,b,c)$$

例 2. "young"를 나타내는 fuzzy 集合 A의 membership 函數는 Z 函數를 사용해서

$$\mu_A(u)=Z(u;10,25,40)$$

과 같이 나타내어진다. □

fuzzy 集合에 關한 演算으로서 다음과 같은 것을 定義한다[5].

A, B를 U에서의 fuzzy 集合이라고 하면 各 $u\in U$에 對하여

部分集合

$$A\subseteq B \Longleftrightarrow \mu_A(u)\leq\mu_B(u)$$

相等關係

$$A=B \Longleftrightarrow \mu_A(u)=\mu_B(u)$$

合集合

$$A \cup B \Longleftrightarrow \mu_{A\cup B}(u)=\mu_A(u)\vee\mu_B(u)$$

交集合

$$A \cap B \Longleftrightarrow \mu_{A\cap B}(u)=\mu_A(u)\wedge\mu_B(u)$$

餘集合

$$\bar{A} \quad \Longleftrightarrow \mu_A(u)=1-\mu_A(u)$$

代數積

$$AB \quad \Longleftrightarrow \mu_{AB}(u)=\mu_A(u)\mu_B(u)$$

代數合

$$A\dot{+}B \Longleftrightarrow \mu_{A\dot{+}B}(u)=\mu_A(u)+\mu_B(u)-\mu_A(u)\mu_B(u)$$
$$=1-(1-\mu_A(u))(1-\mu_B(u))$$

여기서 $\vee, \wedge$는 *max*, *min*을 또 $+, -$는 一般 덧셈, 곱셈을 나타낸다. 위의 定義에서 一般 集合論에서와 마찬가지로 fuzzy 集合에 對해서도 De Morgan의 法則을 비롯한 類似한 法則들이 成立한다.

그리고 또 다음의 限界合, 限界差, 限界積은 fuzzy 推論의 議論에서 使用하기 시작한 演算이며[6], 冪, scalar 積 등은 very, more or less 등 言語修飾語에 對한 演算으로서 使用되고 있다.

限界合

$$A\oplus B \Longleftrightarrow {}_{A\oplus B}\mu(u)=1\wedge(\mu_A(B)+\mu_B(u))$$

限界差

$$A\ominus B \Longleftrightarrow \mu_{A\ominus B}(u)=0\vee(\mu_A(u)-\mu_B(u))$$

限界積

$$A\circledcirc B \Longleftrightarrow \mu_{A\circledcirc B}(u)=0\vee(\mu_A(u)+\mu_B(u)-1)$$

冪

$$A^\alpha \Longleftrightarrow \mu_{A^\alpha}(u)=\mu_A(u)^\alpha \quad (\alpha\text{는 양수})$$

scalar 積

$$\alpha A \Longleftrightarrow \mu_{\alpha A}(u)=\alpha\mu_A(u)$$

左冪

$${}^\alpha A \Longleftrightarrow \mu_{\alpha_A}(u^\alpha)=\mu_A(u)$$

이상의 여러 가지 演算에 對한 代數的性質은 [5]; [7] 등을 보면 된다.

§2. 擴張原理

擴張原理의 概念은 다음에 說明하는 type 2 fuzzy 集合, fuzzy 數, fuzzy 眞理값 등에 對한 演算을 定義하는데 使用되는 概念이며, 點에 作用하고 있는 寫像이나 演算을 fuzzy 集合에도 作用시키려고 하는 것이다[8].

擴張原理 1. f를 U에서 V에의 寫像이라 하고, A를 U에서의 fuzzy 集合, 卽

$$A=\int_U \mu_A(u)/u$$

라고 하면 寫像 f에 의한 fuzzy 集合 A의 像은 다음과 같이 주어진다.

$$f(A)=\int_U \mu_A(u)/f(u) \tag{3}$$

□

例 3. 작은 數를 나타내는 fuzzy 集合을 A라 하고

$$A=1/0+1/1+0.8/2+0.6/3+0.4/4+0.2/5$$

□

라 하여 $f(u)=u^2$이라고 하면 $f(A)$는 다음과 같이 된다.

$$f(A)=A^2=1/0+1/1+0.8/4+0.6/9+0.4/16+0.2/25$$

□

擴張原理 2. f를 $U\times V\rightarrow W$인 寫像($f(u,v)=u*v$로 놓는다)이라 하고 $A=\int_U \mu_A(u)/u$, $B=\int_V \mu_U(v)/v$를 U, V에서의 fuzzy 集合이라고 하면 二項演算$*$은 A, B에 擴張定義되고

$$A*B=\int_W (\mu_A(u)\wedge\mu_B(v))/(u*v) \tag{4}$$

로 주어진다. 여기에서 $\wedge$는 *min*을 뜻한다.

□

例 4. $U=V=1+2+\cdots+10$으로 하고, 2, 6을 각각 "2 정도" "6 정도"를 나타내는 fuzzy 集合(fuzzy 數라고도 한다), 즉

$$\underset{\sim}{2}=0.6/1+1/2+0.8/3$$
$$\underset{\sim}{6}=0.8/5+1/6+0.7/7$$

이라 하고 $f(u,v)=u\times v$($=u$와 v의 積)라 하면

$$\underset{\sim}{2}\times\underset{\sim}{6}=(0.6/1+1/2+0.8/3)\times(0.8/5$$

$+1/6+0.7/7)$
$=(0.6\wedge 0.8)/(1\times 5)+(0.6\wedge 1)$
$/(1\times 6)+(0.6\wedge 0.7)/(1\times 7)+\cdots$
$=0.6/5+0.6/6+0.6/7+0.8/10$
$+1/12+0.7/14+0.8/15$
$+0.8/18+0.7/21$
$=\underset{\sim}{12}$

가 되고 "약 12 정도"를 나타내는 fuzzy 數를 얻는다. ■

이 例에서 알 수 있는 바와 같이 fuzzy 數의 元素의 個數가 많아지면 式 (4)에 의한 計算이 번잡하게 된다. 이것을 解決하는 方法으로서 α level 集合을 使用하는 方法을 생각할 수 있다. 이를테면 fuzzy 數 A, B의 α *level* 集合(一般으로 區間이 된다)을

$$A_\alpha=[a_1, a_2],\quad B_\alpha=[b_1, b_2]$$

라고 하면 區間 A_α와 B_α의 덧셈은

$$A_\alpha+B_\alpha=[a_1+b_1,\ a_2+b_2]$$
$$=(A+B)_\alpha$$

가 되고, 이것을 各 level 마다 보태가면 A+B를 얻는다[9].

例 5. $\underset{\sim}{2}$를 "2 정도"를 나타내는 fuzzy 數 即

$$\underset{\sim}{2}=\int_1^2 u-1/u+\int_1^3 3-u/u$$

라고 하면, $\underset{\sim}{2}$에 對한 四則演算의 結果는 다음과 같다.

$$\underset{\sim}{2}+\underset{\sim}{2}=\int_2^4\frac{u}{2}-1/u+\int_4^6-\frac{u}{2}+3/u$$

$$\underset{\sim}{2}-\underset{\sim}{2}=\int_{-2}^0\frac{u}{2}+1/u+\int_0^2-\frac{u}{2}+1/u$$

$$\underset{\sim}{2}\times\underset{\sim}{2}=\int_1^4\sqrt{u}-1/u+\int_4^9-\sqrt{u}+3/u$$

$$\underset{\sim}{2}\div\underset{\sim}{2}=\int_{\frac{1}{3}}^1\frac{-4}{u+1}+3/u+\int_1^3\frac{4}{u+1}-1/u$$

■

이 경우, $\underset{\sim}{2}$의 α level 集合은 $\underset{\sim}{2}_\alpha=[\alpha+1,\ 3-\alpha]$가 되고 $\underset{\sim}{2}_\alpha+\underset{\sim}{2}_\alpha=[2\alpha+2,\ 6-2\alpha]$가 되어 있다.

§3. Type 2 fuzzy 集合

지금까지 fuzzy 集合에서의 所屬度는 區間 [0, 1] 속의 값을 택하였다. 이를테면 $\mu_A(u)=0.8$ 등. 그런데 現實에는 所屬度가 分明히 0.8 또는 0.3 等과 같이 되는 것이 아니고 "높다" "0.8 정도", "0.3 정도" 等 모호한 경우가 많다. 이와 같은 것을 說明하기 위하여 所屬度가 [0, 1]에서의 fuzzy 集合으로 나타내어지는 fuzzy 集合(*Type 2 fuzzy* 集合)이 提案되고 [10], fuzzy 論理, 推論等에 빈번하게 應用되고 있다.

U에서의 Type 2 fuzzy 集合은

$$\mu_A: U\to[0,1]^{[0,1]}$$

인 fuzzy membership 函數 μ_A에 의해서 特性지워진 fuzzy 集合이며, 값 $\mu_A(u)$는 *fuzzy* 所屬度라고 하며, [0, 1] 위에서의 fuzzy 集合이다.

fuzzy 所屬度에 對한 演算은 擴張原理 (3), (4)를 使用하므로서 다음과 같이 된다[11]. fuzzy 所屬度 $\mu_A(u)$, $\mu_B(u)$를 [0, 1] 위의 fuzzy 集合으로 하고

$$\mu_A(u)=\int_0^1 f(v)/v;\quad \mu_B(u)=\int_0^1 g(w)/w$$

로 나타낸다. f, g는 $[0,1]\to[0,1]$인 membership 函數이며, $v, w\in[0,1]$이다. 그러면

上限 : $\mu_A(u)\sqcup\mu_B(u)$

$$=\left(\int_0^1 f(v)/v\right)\sqcup\left(\int_0^1 g(m)/w\right)$$
$$=\int_0^1(f(u)\wedge g(m))/(v\vee w)$$

下限 : $\mu_A(u)\sqcap\mu_B(u)$

$$=\int_0^1(f(v)\wedge g(w))/(v\wedge w)$$

否定 : $\neg\mu_A(u)=\int_0^1 f(v)/(1-v)$

단, $\vee$, $\wedge$는 *max*, *min*을 나타낸다.

例 6. $\mu_A(u)=\text{high}$

$=0.4/0.7+0.7/0.8+0.9/0.9+1/1$

$\mu_B(u)=\text{low}$

$=1/0+0.9/0.1+0.7/0.2+0.4/0.3$

이라고 하면 $\mu_A(u)\sqcup\mu_B(u)$는

$\text{high}\sqcup\text{low}=0.4/0.7+0.7/0.8+0.9$
$/0.9+1/1=\text{high}$

가 된다. 마찬가지로

high⊓low=low, ¬high=low

를 얻는다.

§4. Fuzzy 眞理값

[0, 1] 위의 fuzzy 集合으로서 나타내어진 fuzzy 所屬度는 관점을 바꾸면 眞理값을 나타내고 있다고 말할 수 있다. 이를테면 여자다운 fuzzy 所屬度로서 *high, veryhigh, medium, low, not low* 等을 생각할 수 있는데, A양의 여자다움에 對한 fuzzy 所屬度가 very high 라고 하면, 이것은 "A양은 여자답다"라는 命題의 眞理값이 very high 卽 very true라고 바꾸어 말할 수 있다. 이와 같이 high를 true, low를 false, medium을 borderline, not low를 not false 등으로 봄으로서 所謂 二値論理나 多値論理에서 볼 수 없는 眞理값을 얻는다. 이와 같은 眞理값을 fuzzy 眞理값, 또는 言語眞理값이라 하고 fuzzy 推論이나 論理에 應用되고 있다[10].

이들 fuzzy 眞理값은 眞理값 空間이 [0, 1]인 위에서의 fuzzy 集合으로서 定義되어 있으므로 論理合, 論理積, 否定 등의 演算은 fuzzy 所屬度에 對한 上限, 下限, 否定의 演算을 그대로 使用할 수 있다.

fuzzy 眞理값을 使用한 興味 있는 例를 들어 보자. 지금 "홍길동은 대학생이다"인 命題에 對한 답이 No(거짓)이면 홍길동은 대학생이 아니다"라는 命題가 된다. 이와 같이 命題에 對한 眞理값에서 새로운 命題가 얻어짐을 알 수 있다. 다음에 命題 "Tom is young"에 對한 眞理값이 very true이면 Tom은 어느 정도의 젊음일까. 이와 같은 命題는 一般으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(X \text{ is } F) \text{ is } \tau \qquad (5)$$

이 例에서는 (Tom is young) is very true가 된다. X는 對象名이며, F는 fuzzy 槪念이며 τ는 fuzzy 眞理값이다. 式 (5)에서 얻어지는 命題를

$$X \text{ is } G$$

라고 하면 fuzzy 槪念(集合) G는 F와 τ에서

$$\mu_G(u)=\mu_\tau(\mu_F(u))$$

와 같이 求해진다[6], [12].

例 7. $\mu_{young}(u)=Z=(u:10, 25, 40)$라 하고

$$\mu_{very\ true}(v)=\mu_{true}(v)^2$$
$$=S(v:0.5, 0.75, 1)^2$$

라고 하면

$$\mu_G(u)=\mu_{very\ true}(\mu_{young}(u))$$
$$\fallingdotseq Z(u:10, 17.5, 25)^2$$
$$=\mu_{quite\ young}(u)$$

가 된다. 따라서 (Tom is young) is very true에서 "Tom is quite young"이 얻어진다.

그러면 F와 G가 같은 경우, 이를테면(Tom is young) is τ.인 命題에서 "Tom is young"를 얻을 fuzzy 眞理값 τ_0는 어떤 것이겠는가 고 하면

$$\mu_{\tau 0}(v)=v \qquad (v\in[0, 1])$$

가 되는 경우이다. 이 眞理값을 "*u-true*"라 한다. 卽 (X is F) is u-true이면 "X is F"를 얻는다. 또 (X is F) is very u-true이면 "X is very F"인 結論을 얻는다. 이와 같이 u-true를 使用해서 얻어지는 結論은 우리들의 直觀에 맞는 것에서 u-true를 所謂 true로 보고 議論해 나가는 경우도 있다.

逆으로 "X is F"와 그것에 對한 命題 "X is G"가 주어진 경우, "X is G"에 의한 "X is F"의 眞理값 τ는 擴張原理를 使用해서 다음과 같이 주어진다[12].

$$\tau=T_r(X \text{ is } F/X \text{ is } G)$$
$$=\int_0^1 \mu_G(u)/\mu_F(u) \qquad (6)$$

例 8. F를 small, G를 not small이라고 하면, 여기에서

$$\text{small}=1/0+1/1+0.8/2+0.6/3$$
$$+0.4/4+0.2/5$$

$$\text{not small}=0.2/2+0.4/3+0.6/4$$
$$+0.8/5+1/6+\cdots+1/10$$

이라고 하면

$$\tau=T_r(X \text{ is small}/X \text{ is not small})$$

은

$\tau=1/0+0.8/0.2+0.6/0.4+0.4/0.6+0.2/0.8+0/1$

이 된다. 一般으로 T_τ(X is F/X is not F)=u-false가 되고 $\mu_{u\text{-}false}(v)=1-v$로 주어진다. 또

T_τ(X is F/X is F)=u-true

가 된다.

式 (6)에서 얻어지는 τ와 (X is F) is τ에서 "X is G"를 유도하는 τ는 一般으로 一致하지 않으나 F를 特性짓는 函數 μ_F가 1對 1이면 一致한다.

參考文獻

[1] Zadeh, L. A.: "Fuzzy sets", Inf. and Control, 8, p. 338 (1965).

[2] Gaines, B. R. and Kohout, L. J.: "The fuzzy decade: a bibliography of fuzzy systems and closely related topics", *Int. J. Man-Machine Studies*, 9, pp. 1-68(1977).

[3] Goguen, J. A. "L-fuzzy sets" *J. Math. Anal. Appl.* 18, pp. 145-174 (1967).

[4] Goguen, J. A. "Concept representation in natural and artificial languages: axioms, extension and applications for fuzzy sets. *Int. J. Man-Machine Studies*, 6, pp. 513-561 (1974).

[5] Kaufmann, A. *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*. New York: Academic Press, 416 pp. 1975.

[6] Zadeh, L. A. *Calculus of fuzzy restriction in Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes*. New York: Academic Press, pp. 1-39 (1975).

[7] Mizumoto, M. & Tanaka, K. Fuzzy sets under various operations. *4th Int. Cong. on Cyb. & Sys.*, Amsterdam, Aug. 21-25(1978).

[8] Zadeh, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ). *Inform. Sciences*. 8, pp. 199-249; 8, pp. 301-357; 9, pp. 43-80 (1975).

[9] Mizumoto, M. & Tanaka, K. Algebraic properties of fuzzy numbers. *Proc. Int. Conf. on Cyb. & Society*, Washington, Nov. 1-3 (1976).

[10] Zadeh, L. A. The conceptof a linguistic variable and its application to approximate reasoning (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) *Inform. Sciences*. 8, pp. 199-249; 8, pp. 301-357, 9, pp. 43-80 (1975).

[11] Mizumoto, M. & Tanaka, K. Some properties of fuzzy sets of type 2. *Inform. Control*. 31, pp. 212-230, (1976).

[12] Zadeh, L. A. PRUF-A meaning representation language for natural languages. *Int. J. Man-Machine Studies*, 10, pp. 395-460 (1978).

[13] 水本 雅晴, "最近の Fuzzy 集合理論" 數理科學 No. 191, pp. 15-20 (1979).