論 文

BIVARIATE ANALYSIS에 依한 月流量에 模擬發生에 關한 研究

A STUDY ON SYNTHETIC GENERATION OF MONTHLY STREAMFLOW BY BIVARIATE ANALYSIS

徐 炳 夏*
Byung Ha Seo
尹 龍 男**
Yong Nam Yoon
姜 琯 沅***
Kwan Won Kang

SYNOPSIS

The sequences of monthly streamflows constitute a non-statonary time series. The purely stochastic model has been applied to data generation of non-stationary time series. Two different methods - - single site and multi-site generation - - have been used on the hydrologic time series.

In this study the synthetic generation method by bivariate analysis, studied by Thomas Fiering, one of multi-site models, has been applied to the historical data on monthly streamflows at two sites in Nakdong River, and also for validity of this model the single site Thomas Fiering model applied. Through statistical analysis it has been shown that the performance of bivariate Thomas Fiering model was better than that of the other.

By comparison of mean and standard deviaion between the historical and the generated, and cross correlogram interpretation, it has been known that the model used herein has good performance to simultaneously generate the monthly streamflows at two sites in a river basin.

序 論

水資源시스템의 正確한 分析이나 最適한 開発計劃을 遂行하기 위해서는 充分히 긴 期間동안에 觀測된 過去 水文資料를 획득한다는 것이 무엇보다도 重要하다. 어느 流域의 水文事象을 나타내는 水文解析의 結果가 資料의 不充分때문에 過少評価되었을 경우 発生될 수 있는 工学的危険(Engineering Risk)과 過大評価했을 경우의 경제적인 損失을 防止하기 위해서도 이는 절대적으로 必要불가결한 요건이다. 그러나 실제적으로 어느流域의 水資源開発計劃은 오랜기간동안에 걸쳐서 이루어지는 것이 아니라, 経済開発과 병행하여 樹立되는것이 常例이기 때문에 그 流域의 水文解析에 必要한 過去의 資料는 그 크기가 적은 경우가 대부분이다. 이로 인한 問題点들을 改善하고 水文量解析에 지금까지 適用되어 왔던 確定論的方法(Deterministic Method)의 欠点을보완하기 위하여 水文学者들은 近代統計学과 確率論의 새로운 理論들을 水文解析에 応用한 推計学的水文学(Stochastic Hydrology)이라 불리우는 새로운 学問体係를 定立하였다. 이 分野의 研究는 主로 물의 순환과정의復合的인 諸現象들을 推計的인 모델(Stochastic Model)로 나타내고저 하는 것으로 그 모델技法(Modeling Technique)에는 많은 方法들이 開発되었다.

본래 水文現象은 時間에 따라 連続的으로 変하는 連続型資料(Continuous Data)이나 우리가 획득할 수있는 觀測資料들은 離散的(Discrete Data)이다. 이 資料들

---

* 仁荷工業専門大学 助教授

** 陸士副教授(工博)

*** 仁荷大学教授(工博)

을 発生時間順으로 同一한 시간간격에 따라 나열하면 時系列(Time Series)을 이루며 이것을 水文時系列(Hydrologic Time Series)이라 한다. 水文時系列의解析에는 주어진 時系列資料로부터 推計学的인 情報를 推出하고 그 特性을 把握하여 이 系列에 맞는 推計学的인 모델을 선정한 후에 주어진 資料를 Sample Size가 더큰 資料로 拡張하는 模擬発生技法(Synthetic Generation Technique)이 많이 応用되고 있다. 이 技法은 水文時系列資料들에 내포되어 있는 여러가지 統計的인 特性以外에 偶然成分(Random Component)까지도 抽出하여 推計学的으로 模擬発生할 수 있기때문에 chow(1)는 確定論的인 方法보다도 어떤 水資源시스템을 分析하는데 좀더 合理的으로 検討될 수 있는 可能性이 있다고 지적하였다.

水文資料는 그들의 確率分布가 時間에 따라 変하지 않는 定常時系列(Stationary Process)과 変하는 非定常時系列(Non-Stationary Process)로 나눌수 있다. 流域内에서 自然的이건 人工的이건간에 어떤 変化가 時間에 따라 일어나며 또한 観測方法의 一貫性이 결여될 경우가 허다하므로 水文時系列은 厳密한 의미에서 非定常時系列을 이룬다. 河川의 年流出量과같은 時系列은 時間間隔이 긴 資料이기 때문에 傾向成分(Trend Component)이나 週期成分(Periodic Component)이 時間에 따라 変하지 않는다고 보아 弱한 意味의 定常時系列로 解析하는 것이 보통이다. 그러나 月流量과 같이 그의 統計的 変数(平均値 및 分散등)가 週期性 및 偶然性을 나타낼 경우에는 非定常時系列로 解析한다. 전형적인 水文時系列은 傾向成分과 週期成分으로 確定成分(Deterministie Compenent)과 偶然成分(Stationary Stochastic Random Component)로 나눌수 있다. 非定常時系列을 解析하는데 두가지 方法이 있는 바 그하나는 Correlogram 이나 Speetrum 分析에 의하여 確定成分을 把握한후 推計学的 모델에 의하여 解析하는 定常分析(Stationarity Approach)이고, 다른하나는 時系列을 完全한 非定常系列로 보아 解析하는 非定常分析(Non-Stationarity Approach)이다.

本研究에서는 非定常時系列인 月流量을 推計学的으로 模擬発生하는 方法에 対하여 간단히 소개하고 二変量解析(Bivariate Analysis)(2)인 Thomas Fiering 모델의 Algorithm 을 把握하고 그의 発生過程에 따른 計算을 本校에 設置되어 있는 PDP 11/34에 의해 完了하여 그 결과를 제시하였으며 単一地点(Single Site) Thomas Fiering 모델에 의한 결과와 比較하고 観測値와의 比較分析을 최종적으로 行하였다.

1. 水文資料의 模擬発生

資料의 模擬発生技法(Data Generation Techniques)이나 Monte Carlo Simulation 技法(3)은 水文学에 널리 사용되어 왔다. 이들 技法들은 確率分布(Probability Distribution)를 알고 있을때 그로부터 資料의 크기가 큰 資料를 模擬発生하는데서부터 複雑한 水資源시스템의 確率的인 事象의 変化를 把握하는데까지 널리 応用되고 있다. 水文学에서의 模擬技法의 応用은 最近의 일만은 아니다. 그예로서 이미 1927年에 Sudler (4)는 貯水池容量의 確率分布型을 알기위하여 1,000年 間의 流出量을 모의 発生시켰다. 또한 Burges와 Linsley (5)는 貯水池의 貯留量의 頻度分布를 결정하기 위하여 年流入量과 月流入量을 Markov 모델을 써서 모의 発生시켰는데 年流入量 모델보다 月流入量 모델에 의한 資料를 썼을때 貯留量分布를 더 쉽게 결정할 수 있음을 보여 주었다. 이밖에 水資源 시스템의 分析이나 水文資料의 拡張에 이 技法을 적용한 예는 Benjamin 과 Cornell(6) Fiering(7) 및 Fiering 과 Jackson(8) 등에서 많이 볼수 있는데, 特히 近年에 와서 高速電子計算機의 出現에 힘 입어 더욱더 広範囲하게 이 技法을 応用하는 것이 可能하게 되었다.

現在까지 開発되어 水文資料解析에 널리 使用되고있는 推計学的 모델에는 主로 年資料(Annual Hydrologic Data)의 模擬発生을 위한 Monte Carlo法, 一次 Markov(Ist order Markov)모델, 高次 AR(Higher order Autoregressive)모델, MA(Moving Average)모델, ARMA(Autoregressive Moving Average)모델 및 ARIMA(Autoregressive Integrated Moving Average) 모델등이 있으며(9), 月資料(Monthly Data)에 主로 쓰이는 Roesner와 Yevjevich(10)의 方法, 単一地点(Single Site)이나 多地点(Multi Site)解析을 위한 Thomas Fiering 모델(11), 및 多地点解析을 위한 Matalas 모델(12)등을 들수있다. 이들 모델中 어느 모델을 選択할 것인 가의 결정을 위해서 取扱되는 水文変量의 特性, 즉 推計学的 独立性(Stochastic Independency)여부, 確率分布型의 推定可能여부 및 決定変数(Decision Variables)의 重要度등을 考慮해야하며 또한 水資源 시스템의 分析時 長期計劃인가 短期計劃인가에 따라서도 그 모델의 選択은 달라진다.

本 研究에서는 오개地点의 月流量의 過去観測値를 入力資料로 하여 二変量 解析(Bivariate Analysis)을 위하여 개발된 Thomas Fiering 모델의 模擬発生過程에따라 電算處理하여 그 結果를 얻었다. 낙동강流域의 왜관 및 현풍 오개地点의 月流量의 과거기록치를 入力資料로 使用하였으며, 150年間의 月流量資料를 模擬発生

시키고 처음 50年間의 月流量은 버리고 나머지 100년간의 月流量資料를 択하여 過去觀測値와 比較分析하였다.

2. Thomas Fiesiny方法에 의한 모의 발생

Thomas Fiering(13)은 同一河川의 2개地点에서의 非定常時系列인 月流量 $Y_t^{(1)}, Y_t^{(2)}$의 統計学的인 特性因子들을 推出하여 同時에 두 地点의 月流量의 과거 觀測値보다 資料의 크기가 큰 月流量資料로 模擬発生하는 方法을 開発하였다. 그 발생과정을 설명하면 다음과 같다.

1) 過去의 觀測値로 부터 얻어진 時系列 資料 $Y_t^{(1)}$과 $Y_t^{(2)}$를 発生時間에 따라 月別로 나열하고 그의 月平均値(Monthly Mean Streamflow)와 標準偏差(Monthly Standard Deviation)를 구하고 非定常時系列인 月流量을 다음식에 의하여 平均値 0, 標準偏差 1인 定常時系列로 變換한다(14). 變換된 時系列을 $y_t^{(1)}, y_t^{(2)}$로 놓으면

$$\left.\begin{aligned} y_t^{(1)} &= (Y_t^{(1)} - \bar{y}_t^{(1)})/S_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} &= (Y_t^{(2)} - \bar{y}_t^{(2)})/S_t^{(2)} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

로 표시되며 여기서 $\bar{y}_t^{(1)}, \bar{y}_t^{(2)}$와 $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}$는 月流量의 月平均値와 標準偏差이다.

2) Thomas Fiering 모델의 模擬発生式(Generating Equation)은 다음과 같이 주어지며 이式에 (1)式에 의하여 얻어진 定常化(Standardization)된 月流量資料를 使用한다.

$$\left.\begin{aligned} y_t^{(1)} &= b_{11}\, y_{t-1}^{(1)} + b_{12}\, y_{t-1}^{(2)} + Z_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} &= b_{21}\, y_{t-1}^{(1)} + b_{22}\, y_{t-1}^{(2)} + Z_t^{(2)} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

t : 모의발생에 해당되는 月을 표시

여기서 $y_t^{(1)}, y_t^{(2)}$: t月의 1, 2地点에서의 모의 발생된 계산치(變換된 값)

$y_{t-1}^{(1)}, y_{t-1}^{(2)}$: (t−1)月의 1, 2地点에서의 계산치(變換된 값)

bij : 두 時系列의 相互相関性을 把握하여 결정되는 모델変数

$Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)}$: 正規分布乱数(Normally Distributed Random Number)를 変換한 모델의 遇然成分(Random Component)

3) 모델変数(parameters)의 算定

가) t月의 모의발생 (2)式에서의 bij를 $B_t(i,j)$로 표시하고 그 算定式을 나타내면 다음과 같다.

$$B_t(1,1) = \frac{1}{D}\{S_{t,t-1}(1,1)\, S_{t-1,t-1}(2,2) - S_{t,t-1}(1,2)\, S_{t-1,t-1}(2,1)\}$$

$$B_t(2,1) = \frac{1}{D}\{S_{t-1,t-1}(1,1)\, S_{t,t-1}(1,2) - S_{t,t-1}(1,1)\, S_{t-1,t-1}(1,2)\}$$

$$B_t(2,1) = \frac{1}{D}\{S_{t,t-1}(2,1)\, S_{t-1,t-1}(2,2) - S_{t,t-1}(2,2)\, S_{t-1,t-1}(2,1)\}$$

$$B_t(2,2) = \frac{1}{D}\{S_{t-1,t-1}(1,1)\, S_{t,t-1}(2,2) - S_{t,t-1}(2,1)\, S_{t-1,t-1}(1,2)\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

로 주어지며 여기서 N을 過去觀測値의 기록년수라면,

$$\left.\begin{aligned} S_{t,t-1}(i,j) &= \frac{1}{N}\sum_{1}^{n} y_t^{(i)} \times y_{t-1}^{(j)} \\ S_{t-1,t-1}(i,j) &= \frac{1}{N}\sum_{1}^{n} y_{t-1}^{(i)} \times y_{t-1}^{(j)} \\ S_{t,t}(i,j) &= \frac{1}{N}\sum_{1}^{n} y_t^{(i)} \times y_t^{(j)} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$D = S_{t-1,t-1}(1,1)\, S_{t-1,t-1}(2,2) - S_{t-1,t-1}(2,1)\, S_{t-1,t-1}(1,2) \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

로 계산되는 값들이다.

나) 遇然成分인 $Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)}$의 分散(Variance)과 共分散(Covariance)을 각각 $Var(Z_t^{(1)}), Var(Z_t^{(2)})$, $COV(Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)})$라 놓으면 다음식으로 주어진다.

$$Var(Z_t^{(1)}) = S_{t,t}(1,1) - B_t(1,1)\, S_{t,t-1}(1,1) - B_t(1,2)\, S_{t,t-1}(1,2) \cdots\cdots\cdots (6)$$

$$Var(Z_t^{(2)}) = S_{t,t}(2,2) - B_t(2,1)\, S_{t,t-1}(2,1) - B_t(2,2)\, S_{t,t-1}(2,2) \cdots\cdots\cdots (7)$$

$$COV(Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)}) = S_{t,t}(1,2) - B_t(1,1)\, S_{t,t-1}(2,1) - B_t(1,2)\, S_{t,t-1}(2,2) \quad (8)$$

다) 遇然成分 $Z_t^{(2)}, Z_t^{(1)}$의 算定

① 乱数(Random Numbers)의 発生

두 地点의 모의발생을 위하여 한쌍의 等分布乱数(Uniformly Distributed Random Numbers)는 Lehmer(15)의 Congruential Method에 의한 乱数発生프로그램을 사용하여 発生시켰다. 여기서 얻어진 乱数를 다음식에 의한 Box-Muller의 方法에 의하여 正規分布乱数(Normally Distributed Random Numbers)로 変換하였다.

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \sqrt{(-2.0)(\log e\ X_1)}\ \cos(2\pi\chi_2) \\ U_2 &= \sqrt{(-2.0)(\log e\ \chi_1)}\ \sin(2\pi\chi_2) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (9)$$

여기서 χ_1, χ_2는 等分布 乱数이고 U_1, U_2는 正規分布乱数이다.

② 遇然成分 $Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)}$는 위에서 얻어진 遇然成分의 統計値인 $Var(Z_t^{(1)}), Var(Z_t^{(2)})$ 및 $Cov(Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)})$와 乱数 U_1, U_2의 결과를 이용하여 다음관계식에 의하여 결정된다.

$$Z_t^{(1)} = U_1\sqrt{Var(Z_t^{(1)})} \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

$$Z_t^{(2)} = U_1\,[\,Cov(Z_t^{(1)}, Z_t^{(2)})/\sqrt{Var(Z_t^{(1)})}\,] +$$

式에 의하여 算出된 모델變数의 계산치들을 정리하여 Table-1에 나타내었다.

4. 結果分析

낙동강流域의 왜관 및 현풍지점의 月流量을 Bivariate Thomas Fiering 모델에 적용하여 100年間의 資料로 拡張시킨 모의발생결과를 分析하기 위하여 觀測値 및 単一地点(Single Site) Thomas Fiering 모델에 의한 모의발생된 資料와 本 研究에서 적용한 모델에 의한 발생資料들의 月平均流量과 標準偏差를 계산한 결과를 Table-2에 정리하였다. 또한 그값들을 서로 比較하기 위하여 Table-2의 값들을 plot하여 Fig.-1, 2, 3, 4, 에 나타내었다. Fig.-1, 2, 3, 4에서 실선으로 표시한 것은 과거기록치이고, 점선 및 쇄선으로 나타낸것은 각각 二変量解析과 単一地点 Thomas Fiering 모델에 의한 값들을 보여준다. 이것을 살펴보면 두 모델에 의한 결과가 각각 관측치에 비교적 잘 近接함을 알수있고 그의 정도를 定量的으로 分析하기 위하여 標準概算誤差(Standard Error of Estimate)를 다음식에 의하여 계산한 결과는

Table-2. Monthly Mean Flow and Standard Deviation of Historical and Generated Streamflow

(unit : CMS day)

Month	Mean & S.D.	Waegwan station			Hyonpung station		
		historical	single site	bivariate	historical	single site	bivariate
Jan.	Mean	854.96	858.51	797.01	1373.72	1379.91	1221.61
	S.D.	755.41	917.95	800.47	1041.80	1166.95	1159.37
Feb.	Mean	1246.58	1396.13	1210.19	1663.29	1871.78	1508.17
	S.D.	1625.71	1783.54	1667.24	1946.85	2015.56	2179.14
Mar.	Mean	2597.03	2199.28	2366.89	2682.13	2210.32	2463.51
	S.D.	3246.48	3387.62	3376.32	3197.07	3323.57	3333.87
Apr.	Mean	4341.46	3850.02	4117.35	5736.03	5189.35	4380.29
	S.D.	4649.30	4752.48	4690.11	5813.64	5858.29	6950.10
May	Mean	3144.81	2838.99	2872.37	4735.44	4233.35	4700.46
	S.D.	2435.62	2507.93	2191.42	5045.42	5320.26	6927.56
Jun.	Mean	3382.75	3167.74	3260.36	3789.29	3608.85	3706.64
	S.D.	4718.48	5177.35	4648.58	5845.60	6512.69	6165.69
Jul.	Mean	16615.15	17926.73	17023.69	25042.68	27451.58	25211.43
	S.D.	11936.39	13077.05	12579.69	20989.63	22993.37	26447.63
Aug.	Mean	12972.56	10792.92	10270.98	18784.85	16349.67	16017.43
	S.D.	12621.72	12843.77	11765.98	18468.46	18081.04	18213.59
Sept.	Mean	11465.69	9208.80	10285.96	15279.56	12964.81	13460.66
	S.D.	10935.22	10608.27	10980.32	12138.01	11490.85	13145.03
Oct.	Mean	2901.13	2850.62	2871.17	4987.05	4764.30	4953.89
	S.D.	2214.23	2425.81	2366.21	5445.36	5896.92	7065.76
Nov.	Mean	1374.72	1382.98	1410.97	2315.55	2360.55	2644.09
	S.D.	970.51	987.01	1005.72	2585.54	2454.19	3650.61
Dec.	Mean	1515.59	1738.77	1849.57	1647.75	1767.41	1895.40
	S.D.	2217.82	2367.15	2526.68	1226.42	1315.14	1349.71

Table-3. Standard Error of Estimates in Mean and Standard Deviation of Monthly Flow

(unit : CMS day)

Station	Monthly Mean Flow		Standard Deviation	
	single site	bivariate	single site	bivariate
Waegwan	1103.581	957.498	426.888	368.061
Hyonpung	1341.885	1144.855	738.468	1989.178

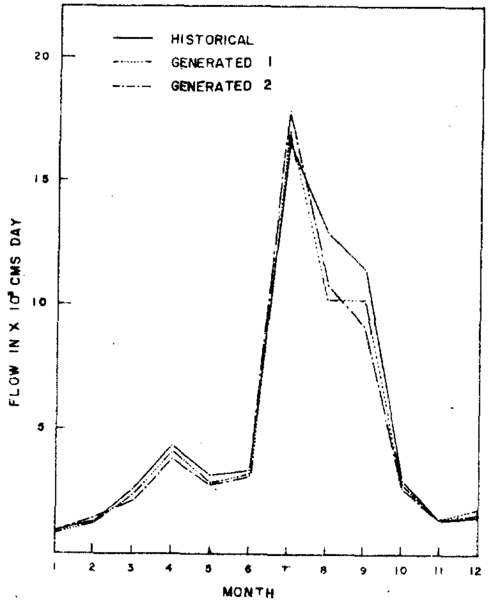

Fig.-1. Mean of Historical and Generated Monthly Flows at Waegwan Station: Generated 1 by Bivariate, 2 by Univariate Thomas Fiering Model.

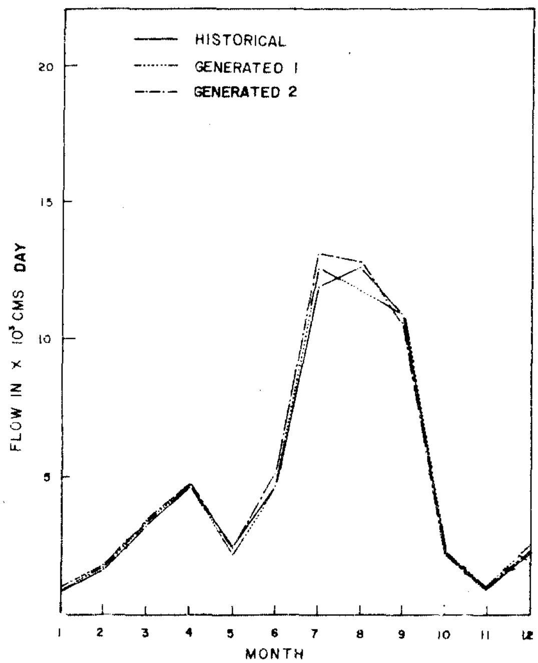

Fig. 2. Standard Deviation of Historical and Generated Monthly Flow at Waegwan Station: Generated 1 by Bivariate, Generated 2 by Univariate Thomas Fiering Model.

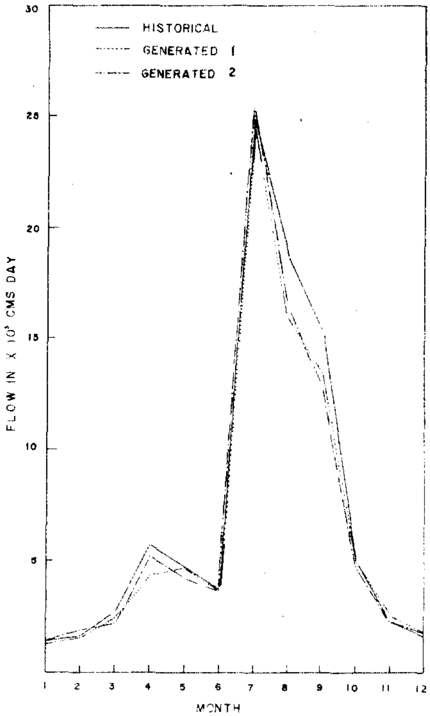

Fig. -3. Mean of Historical and Generated Monthly Flow at Hyonpung Station.

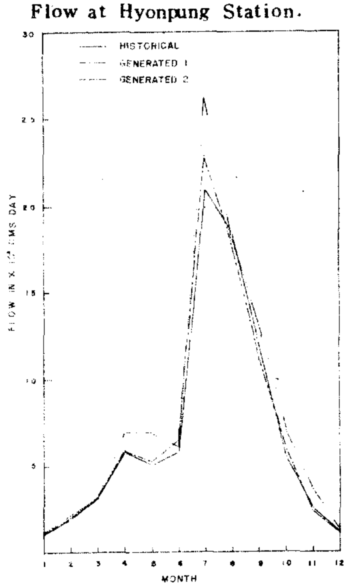

Fig. -4. Standard Deviation of Historical and Generated Monthly Flow at Hyonpung Station.

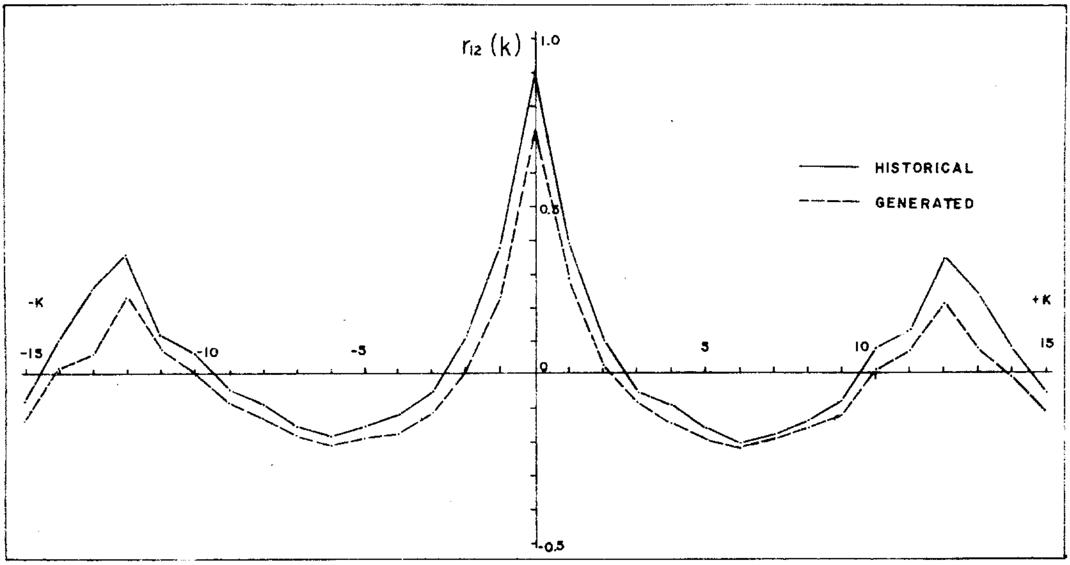

Fig. - 5. Cross Correlogram between Historical and Generated Monthly Flows at Waegwan and Hyonpung Sites.

Table-3과 같다.

$$S.E = \left[\frac{1}{N-2}\sum_{1}^{n}(g_i - h_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

여기서 g_i, h_i는 각각 모의발생 및 과거기록의 月流量의 平均이나 標準偏差를 표시하고 N는 12이다.

Table-3에서 보면 標準概算誤差의 값이 현풍지점의 月流量標準偏差를 除外하고는 모두 Bivariate Thomas Fiering 모델을 적용한 경우에 그 값이 적다는 것이 밝혀져서 單一地点 Thomas Fiering 모델보다 더 좋은 結果를 얻을수 있음을 보여준다.

또한 相関分析을 하기위하여 觀測値와 模擬発生資料의 2개지점 月流量에 대한 系列相互相関係数를 (15)식에 의하여 求하고 Fig.-5에 Cross Correlogram을 作成하였다. 이에서 本 研究에 使用된 入力資料가 12개월 週期를 갖인 非定常時系列로서 오개지점간에 강한 相関을 갖고 있음을 把握할 수 있고 模擬発生한 資料의 Cross Correlogram이 觀測値의 그것과 傾向이 같으며 일반적인 경우보다 좋은 結果를 보여주었다.

結 論

Thomas Fiering의 二変量 模擬発生모델에 낙동강流域의 왜관, 현풍지점의 過去観測 月流量資料를 入力시켜 模擬発生한 結果 다음과 같은 事項을 알수 있었다.

(1) 本 研究에서 使用한 모델이 單一地点 模擬発生 모델보다 좋은 結果를 얻을 수 있어 同一河川流域에서의 月水文資料의 拡張에는 本모델을 적용하는 것이 좋다.

(2) Cross Correlogram 分析 結果 月流量資料의 週期性을 把握하고 模擬発生된 資料도 観測資料와 同一한 週期成分을 갖고 있음을 確認하였다.

(3) 낙동강流域의 왜관과 현풍의 月流量은 강한 相関을 가지고 있음을 本 研究를 통하여 確認하였으며 이 지점들에 있어서의 推計学的인 解析에 반드시 감안할 사항으로 제시한다.

参考文献

1. Chow, V.T. (1964) Handbook of Applied Hydrology. McGraw-Hill, Inc., New York, U.S.A.
2. Chatfield, C. (1975) The Analysis of Time Series: Theory and Practice, Chapman and Hall, Ltd., London, pp 169-184.
3. Yevjevich, V. (1972) Stochastic Processes in Hydrology, Water Resources Publications, Fort Collins, Coloradio, U.S.A., pp 249-259.
4. Sudler, C. E. (1927) "Storage Required for Regulations of Stream flow", Trans., ASCE, Vol 91, pp 622-660.
5. Burges, S. J. & Linsley, R. K. (1973) "Probabilistic Short-Term River Yield Forecsts", Proc., ASCE, IR2, pp 143-155.
6. Benjamin, J. R. & Cornell, C. A. (1970) Probability, Statistics, and Decision THeory for Civil Engineers, McGraw-Hill, Inc., New York, U.S.A.
7. Fiering, M. B. (1961) "Queing Theory and Simulation in Reservoir Design", Proc., ASCE, Vol 87, HY6, pp 39-69.
8. Fiering, M. B. & Jackson, B. B. (1971) Synthetic

Streamflows, Water Rescurces Monograph 1, A.G.U., Washington, D. C. 98 pp.

9. Haan, C. T. (1977) Statistical Methods in Hydrology, Iowa State University Press, Ames, Iowa, pp 289-

10. Roesner, L. A. & Yevjevich, V. M. (1966) "Mathematical Models for Time Series of Monthly Precipitation and Monthly Runoff", Hydrology Paper No. 15, Coloradio State Univ., Fort Collings, Colorado, pp 1-59.

11. Fiering, M. B. (1964) "Multivariate Techniques for Synthetic Hydrlogy", Proc., ASCE, Vol. 90, HY5, pp 43-60.

12. Matalas, N. C. (1967) "Mathematical Assessment of Synthetic Hydrology", Water Resources Research, Vol. 3-4, pp 937-945.

13. Clarke, R. T. (1973) Mathematical Models in Hydrology, Irrigation and Drainage Paper No. 19, FAO, U.N., Rome, pp 73-83.

14. Kashyap, R. L. & Rao, A. R. (1976) Dynamic Stochastic Models from Empirical Data, Academic Press, Inc., New York, pp 253.

15. Lehmer, D. H. (1951) "Mathematical methods in Large-Scale Computing Units", Ann. Comp. Lab. Harvard Univ., Vol. 26, pp 141-146.

16. Kiesel, C. C. (1969) "Time Series Analysis of Hydrologic Data", Advances in Hydroscience, Vol. 5, Academic Press, New York, pp 77.