J. of The Korean Operations
Research Society
Vol.4, No. 1 April 1979

一般化된 2段階在庫體系에서의 最適注文政策

(The Optimal Ordering Policy for the Generalized Two-Stage Inventory System)

鄭 南 基*
車 東 完**

Abstract

We consider the optimal ordering policy for a single-product two-stage inventory system where the main assumptions are as follows:

(i) constant continuous demand only at stage 2,

(ii) constant input (prodution) rate at stage 1,

(iii) instantantaneous delivery (transportation) from stage 1 to stage 2,

(iv) backlogging is allowed only at stage 2,

(v) an infinite planning horizon.

Costs considered are ordering and linear holding costs at both stages, and linear shortage cost only at stages 2. By solving 9 different case problems, we have observed the general form of the optimal ordering policies for our model which minimizes the total cost per unit time. It is noticeable from this observation that the questionable but more often than not adopted assumption by many authors in determining the optimal potimal policy for multistage inventory systems, that the ordering (lot) sizes at each stage remain constant thruout the planning horizon, is not valid.

I. 序 論

多段階 在庫模型은 원료(원자재)가 여러 段階의 工程을 거쳐 완제품이 되는 생산라인 시스템이나, 또는 제품이 생산자(공장)에서 여러 流通段階(예를 들면, 창고, 대리점, 도매상, 소매상)를 거쳐 소비자에 이르는 物的流通시스템의 運用狀態를 나타내는 一般的 模型이라 할 수 있다. 이러한 模型은 대개의 경우 원료나 제품들의 흐름의 순서에 따라 $M(>0)$개의 流通段階(工程)를 段階 1, 段階 2, ……, 段階 M이라 부르고 있고, 段階$(i+1)$에서 段階 i로 주문하여 注文量만큼씩 流通되어가며, 마지막 段階 M에서는 일정한 형태의 수요가 발생한다. 여기서는 需要率이 一定한 경우를 고려하기로 하며, 변동하는 경우는 제외하기로 한다.

$M=1$인 1段階 在庫模型은 가장 먼저 개발된 在庫模型으로서, 많은 학자들에 의해 여러방면에 걸쳐 연구대상이 되어오고 있다. 그중 需要率이 一定하고 諸費用들이 확정적으로 주어질 때, 計劃期間을 無限大로 하면, 每回 一定量씩 注文하는 방침이 단위시간당 발생하는 關聯總費用을 最小化시키는 最適注文政策이 되며, 제품(혹은 원료, 앞으로는 "제품"으로 통일함)의 入荷되는 入荷率의 有限이면 EPQ(Economic Production Quantity), 無限이면 EOQ(Economic Order Quantity)로서 나타내지고 있다.

$M\geq 2$인 多段階 在庫模型은 매우 복잡하여, 도형을 여러가지 가정들에 의해 단순화시키더라도 분석이 용이하지 않다. Sivazlian[4]은 $M=2$인 2段階 在庫模型에 있어서 段階 1로 入荷되는 제품의 入荷率이 無限이며, 段階 1에서 段階 2로부터의 注文量을 주문즉시 全

* 大韓電線株式會社
** 韓國科學院

量 수송할 수 있을때, 無限計劃期間에 대한 最適注文政策을 求했다. 또 車와 柳[6]는 이와같은 模型을 有限計劃期間으로 하고 각 段階에서 발생되는 輸送費用까지도 고려하여 計劃期間중 발생하는 總在庫—輸送費用을 最小化시키는 最適在庫—輸送政策을 구하였다. $M\geq3$인 多段階 在庫模型은 주로 생산라인 시스템에 있어서 經濟的 롯트크기(Economic Lot Size)를 결정하는 문제로 연구되어오고 있으며 [1, 2, 5], 특히 Johnson [2]은 각 段階로 入荷되는 원료의 入荷率이 有限하고, 注文量 전부가 일시에 다음 段階로 수송될 수 있을 때 각 段階別 最適注文量을 求하였다. 그러나, 分析의 편의를 위해 段階 i 에서의 注文量(Q_i)을 每回 同一하게 하고, $Q_i=Q_{i-1}/n_{i-1}$ (n_{i-1} : 자연수)로 한다는 가정을 이용하였다. 이 가정은 需要가 一定하고 諸費用이 변동하지 않는 1段階 在庫模型에서는 注文量을 每回 同一하게 하는 것이 最適注文政策이라는 사실에 근거한 것이지만, 多段階 在庫模型에도 그대로 적용될 수 있는가에 대한 의문은 남아있다.

本 論文의 目的은 段階 1에서의 入荷率이 有限이고, 段階 2에서의 需要率이 一定하며, 段階 1에서 段階 2로, 段階 2에서의 注文量 전부를 注文 즉시 수송할 수 있는 2段階 在庫模型에 있어서, 計劃期間을 無限大로 하고 段階 2에서는 注文殘高(Backorder)를 허용할 때, 單位時間當 總費用을 最小化시키는 最適注文政策의 一般的 形態를 구하는 데 있다. 따라서 이 연구의 意義는 需要率과 入荷率이 一定하고 計劃期間이 無限大로 주어진 2段階 在庫模型을 가장 一般化하고, 이때의 最適注文政策의 一般的 形態를 판별해내며, 부수적으로 Johnson [2]의 段階 i에서의 注文量을 每回 同一하게 하며 그 크기를 $Q_i=Q_{i-1}/n_{i-1}$로 한다는 가정의 眞否를 判別해내는 데 있다.

II. 模型의 設定

本 論文에서 分析하고자 하는 在庫模型의 運用狀態를 알기쉽게 그림으로 나타내면 (그림 1)과 같다. 段階 1에서 注文한 量은 注文 즉시 一定한 入荷率로 入荷되기 시작하고, 이것은 段階 2로부터의 注文에 의해 數回에 걸쳐 段階 2로 輸送되어, 一定한 需要率에 따라 消費者에게 供給된다. 輸送에 대한 制約은 없어 注文量 전체가 一時에 輸送될 수 있으며 輸送期間은 無視할 수 있다.

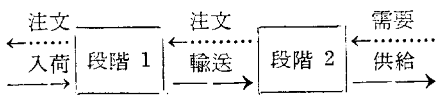


그림 1 2段階 在庫模型

(1) 假定

① 入荷率과 需要率은 一定하며 入荷率이 需要率보다 크다.

② 段階 1에서의 注文費用이 段階 2에서보다 크다

③ 段階 2에서의 在庫維持費用이 段階 1에서보다 크다.

④ 段階 2에서는 注文殘高를 허용하나 段階 1에서는 허용치 않는다.

⑤ 計劃期間은 無限大이다.

⑥ 각 段階의 容量에는 制約이 없다.

(2) 符號說明

P : 段階 1로 入荷되는 제품의 入荷率 〔個/年〕

D : 段階 2에서의 需要率 〔個/年〕

K_i : 段階 $i\,(i=1, 2)$에서의 注文費用 〔₩/回〕

T : 段階 1에서의 注文週期 〔年〕

Q : 段階 1에서의 注文量 〔個/回〕

N_T : T기간동안 段階 2에서 注文하는 總注文回數 〔回〕

t_{2j} : 段階 2에서의 j번째 注文週期$(j=1, \ldots, N_T)$ 〔年〕

Q_{2j} : 段階 2에서의 j번째 注文量$(j=1, \ldots, N_T)$ 〔個/回〕

h_i : 段階 i에서의 在庫維持費用 〔₩/個/年〕

π : 段階 2에서의 注文殘高에 따르는 不足費用 〔₩/個/年〕

N_S : 段階 1에 入荷가 지속되는 기간중 段階 2에서의 總注文 回數$(N_S\leq N_T)$

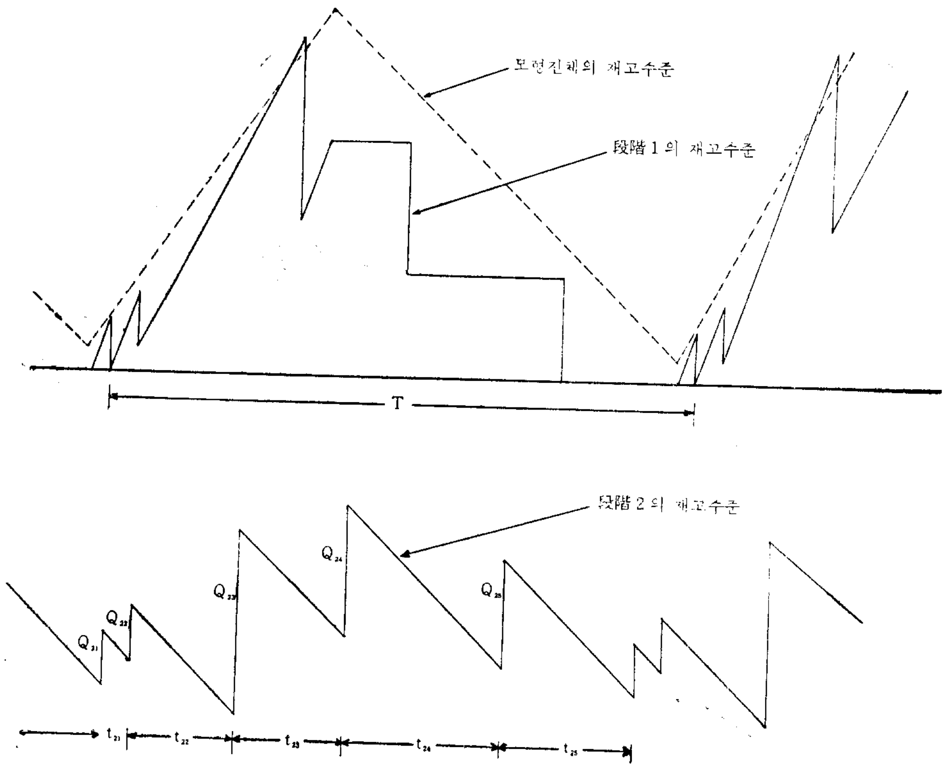
f_{ij} : T기간중 段階 2에서의 j번째 注文時點부터 $(j+1)$번째 注文時點까지 (혹은 段階 1에서의 다음 注文時點까지), 段階 i에서 발생하는 總費用 〔₩〕

(3) 問題의 定義

讀者의 理解를 돕기위해 段階 1과 段階 2에서의 在庫水準 變動狀態를, 위에 설정한 一般的 假定들을 만족시키는 발생가능한 諸 形態를 포함시켜 예를 들어 본 것이 (그림 2)이다.

여기서는 段階 1의 1注文週期중 段階 2에서는 5回 注文하며, 段階 1에 入荷가 지속되는 기간중 段階 2에서는 3回 注文하여, 이를 부호로 表示하면 $N_T=5$, $N_S=3$이 된다. 이 그림을 통하여 우리의 문제를 定義하면 다음과 같은 두 절차로 나타내진다.

먼저, $N_T=5$로 固定하고 段階 1와 段階 2에서 발생하는 단위기간당 總費用을 最小化시키는, 段階 2에서



$P=30,\ D=10,\ N_T=5.$

그림 2 一定한 入荷率과 一定한 需要率을 갖는 2段階 在庫模型의 在庫水準 變動狀態

의 注文量 $Q_{2j}(j=1,\cdots,\ 5)$와 $t_{2j}\ (j=1,\cdots,\ 5)$를 결정하는 것이다. Q_{2j}와 t_{2j}가 결정되면 Q_1과 T는 $Q_1=\sum_{j=1}^{5}Q_{2j},\ T=\sum_{j=1}^{5}t_{2j}$의 관계에서 求해지며 N_S도 自動的으로 정해지게 된다.

다음, N_T를 5가 아닌 다른 값으로 하여 먼저와 같은 방법으로 $Q_{2j},\ t_{2j}$를 구하고 그때의 總費用을 상호비교하여 最小의 費用을 갖는 $N_T^*,\ Q_{2j}^*,\ t_{2j}^*$를 구한다.

따라서, 決定變數의 形態가 3가지이고 그 수는 또한 可變的이어서 매우 복잡한 형태의 問題가 됨을 알 수 있다.

Ⅲ. 模型의 最適化 過程

(1) 模型의 定式化

우리의 問題가 위와같은 2段階 在庫模型에서 單位期間當발생하는 總費用을 最小化하는 最適注文政策을 구하는 것이므로, 우선 單位週期 T기간동안에 발생하는 總費用을 決定變數들로서 表示하고, 이로부터 單位期間當 總費用을 산출해야 한다. T기간동안 발생하는 總費用(TC)은,

$$\mathrm{TC}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{N_T}f_{ij}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\langle\text{식 ①}\rangle$$

로서 表示된다. f_{ij}의 表現을 쉽게할 수 있도록 α_j와 β_j를 아래와 같이 定義해 두면,

$$\alpha_j=\sum_{k=1}^{j}(Q_{2k}-t_{2k}\cdot D)$$

$$\beta_j=\begin{cases}-\dfrac{(\alpha_j)^2}{2D}\cdot h_2 & \alpha_j>0\text{일 때}\\ \dfrac{(\alpha_j)^2}{2D}\cdot\pi & \alpha_j\leq 0\text{일 때}\end{cases}$$

$$j=1,\cdots,\ N_T$$

$f_{1j},\ f_{2j}\ (j=1,\cdots,\ N_T)$는 각각 다음과 같이 表示된다.

$$\begin{cases}\dfrac{p\cdot t_{21}^2}{2}\cdot h_1 & j=1\text{ 일 때}\\ \left\{\left(p\sum_{k=1}^{j-1}t_{2k}-\sum_{k=2}^{j}Q_{2k}\right)t_{2}j+\dfrac{Pt_2{}^2{}_j}{2}\right\}h_1 & \end{cases}$$

$$
f_{1j}=\left|\begin{array}{ll} & 2\leqq j\leqq N_S-1\text{일때} \\ \left\{\left(Q_1-\sum_{k=1}^{j}Q_{2k}\right)t_{2}j-\dfrac{P\cdot\hat{t}^2}{2}\right\}h_1 & j=N_S\text{일때} \\ \left(\text{단}, \hat{t}=\dfrac{Q_1-\sum_{k=1}^{j}Q_{2k}-P\sum_{k=1}^{j-1}t_{2k}+\sum_{k=2}^{j}Q_{2k}}{P}\right) & \\ \left(Q_1-\sum_{k=1}^{j}Q_{2k}\right)t_{2j}\cdot h_1 & N_s+1\leqq j\leqq N_T-1\text{일때} \\ K_1+\dfrac{Q_{21}^{\ 2}}{2P}\cdot h_1 & j=N_T\text{ 일때}\end{array}\right.
$$

$$
{}_{2j}=\left\{\begin{array}{ll} K_2+Q_{21}\cdot\dfrac{Q_{21}}{2D}\cdot h_2+\beta_1 & j=1\text{ 일때} \\ K_2+\dfrac{(\alpha j_{-1}+Q_{2}j)^2}{2D}h_2+\beta_j & \\ & 2\leqq j\leqq N_T-1\text{ 일때} \\ K_2+\dfrac{(\alpha j_{-1}+Q_{2}j)^2}{2D}h_2 & j=N_T\text{ 일때}\end{array}\right.
$$

單位週期 T기간을 決定變數 Q_{2j}와 N_T로 表示하면

$$T=\frac{\sum_{j=1}^{N_T}Q_{2j}}{D} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\langle\text{식 ②}\rangle$$

이고, 또한 각 段階에서의 設備의 容量은 無限大이며 段階 1에서는 注文殘高를 허용하지 않는다는 假定으로부터, 다음의 制約式을 갖게된다.

$$\sum_{k=1}^{j}Q_{2k}-P\cdot\sum_{k=1}^{j}t_{2k}\leqq 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\langle\text{식 ③}\rangle$$

$$j=1,\cdots,\ N_T$$

식 ①, ③와 ③으로부터 우리의 問題는 다음과 같은 混合整數非線型計劃問題(Mixed Integer Nonlinear Programming Problem)로 定式化된다.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{N_T} f_{ij}\cdot\frac{D}{\sum_{j=1}^{N_T}Q_{2j}} \\
\text{Subject to} & \displaystyle\sum_{k=2}^{j-1}Q_{2k}-P\sum_{k=1}^{j}t_{2k}\leqq 0 \\
& Q_{2j}\geqq 0 \\
& t_{2j}\geqq 0 \qquad j=1,\ \ ,N_T \\
& N_T:\text{陽整數}
\end{array}
$$

(2) 解法및 初期値의 紹介

N_T와 Q_{2j}, t_{2j} $(j=1,\ldots,N_T)$를 決定變數로 하여 이와같이 定式化된 問題는 목적함수가 2차식이고 制約式이 線型的이어서 Integer Quadratic Programming의 解法을 사용할 수 있겠으나, 너무 복잡하여 실지로는 거의 不可能하다. 前述한 바와 같이 N_T를 특정한 값으로 固定하면, 목적함수에 대한 다른 決定變數들의 片微分을 구할 수 있으므로, 컴퓨터探索(Computer Search) 방법이 可能하며 그중 Rosen[3]의 기법을 쓸 수 있다. 여기서 목적함수가 블록函數(Convex function)라는 것을 立證하기가 어려우므로, 좋은 初期値를 구하는 것이 매우 중요하여, 여러가지 代案중 다음 방법을 사용하기로 한다. 여러가지 代案에 대한 자세한 내용은 鄭[7]의 論文을 참조하기 바란다.

段階 1과 段階 2를 分離하여 독자적인 注文政策을 세웠을때, 各 段階에 대한 最適注文政策은 각각 이미 잘 알려진 EPQ와 EOQ, 즉

$$\text{EPQ}=\sqrt{\frac{D}{P-D}}\cdot\sqrt{\frac{2K_1D}{h_1}}$$

$$\text{EOQ}=\sqrt{\frac{2K_2D}{h_2}}\cdot\sqrt{\frac{\pi+h_2}{\pi}}$$

이 되며, 이들을 기반으로 다음 (a)~(d)의 節次를 따른다.

(a) $\text{EOQ}'=(1+0.05l)\ \text{EOQ}$
    $\text{EPQ}'=(1+0.1l)\ \text{EPQ}$ $\qquad l=-2,-1,\cdots,2$

(b) 總 25個 組合의 (EOQ′, EPQ′)에 대해.

$$N_T'=\left[\frac{\text{EPQ}'}{\text{EOQ}'}\right] \qquad [\ \ ]:\text{Gauss기호}$$

$$N_T=N_T'-m \qquad m=-1,0,1,$$

(c) $Q_{2j}=\begin{cases}\text{EOQ}' & j=1,\cdots,N_S-1\\ (1+\alpha)\text{EOQ}' & j=N_S,\cdots,N_T,\ 0<\alpha<0.\end{cases}$

$t_{2j}=Q_{2j}/D$

(d) (a)~(c)에 의한 75個 組合의 $\{N_T,\ (Q_{2j},\ t_{2j},\ j=1,\cdots,N_T)\}$중 最小의 목적함수 값을 갖는 것을 初期値로 한다.

Ⅳ. 結果 및 分析

(1) 結 果

本 模型의 最適注文政策에 대한 一般的 形態를 추적하기 위해 주어진 常數 P, D, K_1, K_2의 값을 변화시킴으로써, 9가지 例題를 마련하여 각각에 대한 最適解 $\{N_T^*,\ (Q^*_{2j},\ t^*_{2j},\ j=1,\cdots,\ N_T^*)\}$를 구한 것이 〈表 1〉에 나와 있다. 여기서 $h_1=0.1$ $h_2=0.13$, $\pi=1.0$으로 固定하였으며, 이 最適解를 구하기 위한, 목적함수 및 목적함수에 대한 각 決定變數들의 片微分을 구하는 컴퓨터 프로그램은 鄭[7]의 論文을 참조하기 바란다.

(2) 觀察

〔관찰 1〕 단계 1의 1주기중, 단계 2에서 단계 1로 2回째나 Ns回 注文때에만 (Ns≤2인 경우는 2回째 注文때에만) 注文量이 增加하며, 일단 增加된 注文量은 變動하지 않는다.

(그림 3)은 注文 回 $(j=1,\ldots,N_T)$를 橫軸에, 注文量(Q_{2j}^*)을 從軸에 나타내어, K_1/K_2의 크기에 따라

<表 2> 9가지 例題에 대한 最適解

例題				最適注文政策								
P	D	K_1	K_2	Q_{21}^* t_{21}^*	Q_{22}^* t_{22}^*	Q_{23}^* t_{23}^*	Q_{24}^* t_{24}^*	Q_{25}^* t_{25}^*	Q_{26}^* t_{26}^*	Q_{27}^* t_{27}^*	Q_1^*	N_T^*
40	20	400	20	38.8 2.1	82.0 4.1	82.0 4.1	89.1 4.5	89.1 4.5	89.1 4.5	89.1 4.3	559.0	7
80	20	400	20	43.2 2.3	107.8 5.4	107.8 5.4	107.8 5.4	107.8 5.2			474.4	5
120	20	400	20	88.3 4.6	121.4 6.1	121.4 6.1	121.4 5.8				452.5	4
40	20	400	40	33.8 2.5	100.7 5.0	155.8 7.8	155.8 7.8	155.8 7.5			602.0	5
80	20	400	40	93.6 4.9	193.4 9.6	193.4 9.4					480.3	3
120	20	400	40	107.8 5.6	177.1 8.8	177.1 8.6					461.9	3
40	20	400	80	102.1 5.4	215.7 10.8	215.7 10.5					533.7	3
80	20	400	80	150.9 7.9	317.8 15.5						468.7	2
120	20	400	80	169.8 8.9	286.5 13.9						456.3	2

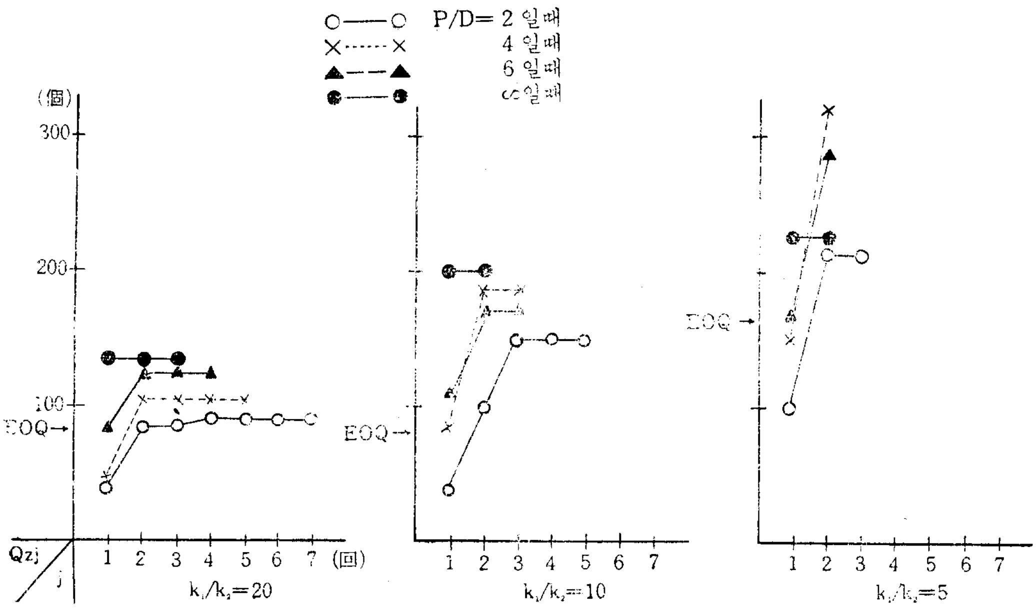


그림 3 注文量의 形態

3개로 나누어 그린 것이다. P/D가 無限大인 경우는 Sivazlian의 模型으로부터 구했으며, 段階 2만을 고려한 最適注文政策(EOQ)과도 比較하여 보았다. 이 그림에 의하면 Ns回를 기준으로 注文量에 큰 차이가 있으며, 맨첫回 注文量은 항상 매우 적게 나타나고 있다. 이것은 段階 1에 入荷가 지속되는 기간에는 段階 2로 적은 量씩 자주 輸送하고, 入荷가 완료된 後에는 더 많은 量씩 輸送한다는 의미가 된다.

〔관찰 2〕 注文殘高의 크기는 注文量에 관계없이 항상 一定하다.

(그림 4)은 注文殘高의 크기를 알아 보기 위해, 注文回를 橫軸에, $Q_{2j}^*/D-t_{2j}^*$를 從軸에 나타낸 것으로, $Q_2^*/D-t_{2j}^*$가 零이보다 크면 (j+1)回째 注文때의 再請求點이 j回째 注文때보다 높아지며, 零보다 작으면 j回째 注文때보다 낮아진다는 것을 보여준다. 이 그림에 의하면 첫번째 注文때의 再請求點을 零으로 할 때, 2回째 注文때의 再請求點은 零이하로 내려가 注文殘高를 허용하고, 3回째 注文때부터는 注文量에 관계없이 이 注文殘高가 그대로 維持되도록 注文하는 것이 最適注文政策의 一般的形態가 된다.

〔관찰 1〕과 〔찰관 2〕에 의하여 最適注文政策의 一般的形態를 (그림 5)와 같이 抽出해낼 수 있다. 이는 段階 1에 入荷가 지속되고 있는 기간중에는, 적은 量이라도 段階 2로 輸送하여 需要를 충족시켜 주고, 入荷가 완료된 後에는 이전보다 더 많은 量씩 輸送하며, 注文殘高는 항상 一定하게 固定시켜 놓는 것이 바람직하다는 것이다.

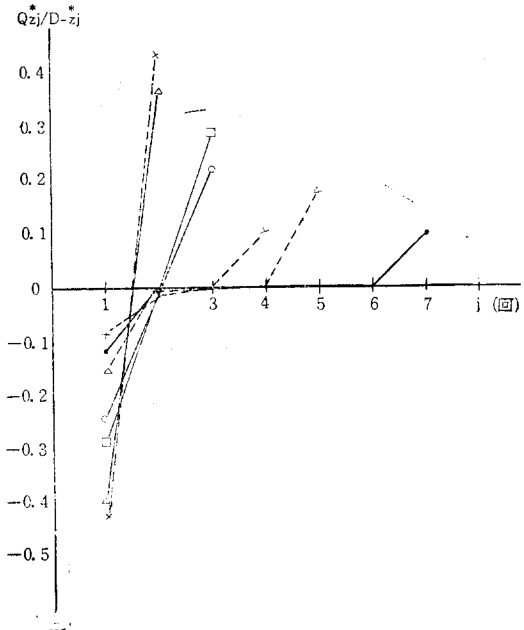


그림 4 注文殘高의 크기

V. 結 論

本 論文에서는 需要率과 入荷率이 一定한 2段階 在庫模型을 가장 一般化하여 이에대한 最適注文政策을 求하였다. 問題의 性質上 컴퓨터 探索方法을 썼으며, 실지 注文量과 時間을 나타낼 수 있는 整數型 解는 아니지만, 이러한 解를 반올림하여 整數型으로 取하여도

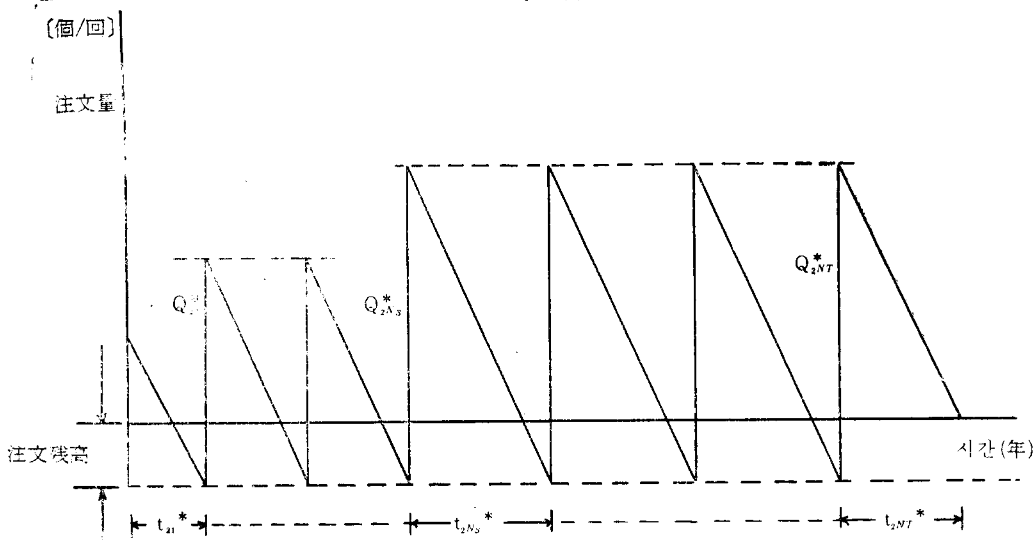


그림 5 最適 注文 政策의 一般的 形態

별다른 無理가 없으리라 생각되어, 最適注文政策의 一般的形態를 考察할 수 있었다. (그림 5)에 의한 結果는 지금까지 多段階 在庫模型에서 사용되었던 注文量을 同一하게 한다는 假定과는 크게 어긋나므로 注目을 要한다. 多段階 在庫模型의 分析에 있어 分析의 편의상 그러한 假定이 使用되어오고 있으나, 앞으로는 可能한 限 (그림 5)와 같은 새로운 바탕아래서 分析이 試圖되어야 할 것이다.

<참 고 문 헌>

1. Crowston, W.B., Wagner, and J. E. Williams, "Economic Lot Size Determination in Multi-stage Assembly Systems," Management Science, 19(5), 1973, 517-527.
2. Johnson, L.A., "Multi-Stage Economic Lot Size Problems with Static, Deterministic Demand," Technical Papers, 23rd Annual Confevence of the Amenican Institute of Industrial Engineers, 1972, pp. 387-392.
3. Rosen, J.B. "The Gradient Projection Method for Non linear Prgramming. Part I, Linean Constraint," J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 8, pp. 181-217. 1960.
4. Sivazlian, B.D., "A multi-Commodity Inventory System with Set-up Costs," Opsearch vol. 7, No. 4, December, 1970.
5. Taha, H.A., and R.W. Skeith, "The Economic Lot Sizes in Multi stage Productin Systenrs," Systems AIIE transactions, Ⅱ(2), 1970, 157-162.
6. 車東完, 柳春蕃, "單純化된 物的 流通體系에서의 最適 在庫一輸送政策", 韓國 O.R. 學會誌, Vl. 3, No. 1, June, 1978.
7. 鄭南基, "單純化된 生產分配 體系에 관한 研究", 한국과학원 미출판 석사학위논문, 1979.