● 解 說 ● ——— 學生欄

位相 그래프와 回路網 解析理論(II)

張 世 勳*

차 례

iv. 連結行列에 의한 回路網의 表現

1. 回路素子의 一般化表現

電源의 等價變換 및 電源의 回路網내에서의 移行技法 등을 쓰면 回路網을 구성하는 각 回路素子는 그림 10에서와 같은 가지로 일반화시켜 모두 표현 시킬 수 있다. 즉 모든 回路網은, 電壓源과 直列로 하나의 被動素子가 연결된 것에 電流源이 並列로 연결된 꼴의 가지로 等價的으로 變換되는 가지들로 구성된 것으로 표현할 수 있다. 대표적인 가지, 예컨대 k번째 가지를 이렇게 일반화표현한 것이 그림 10이다.

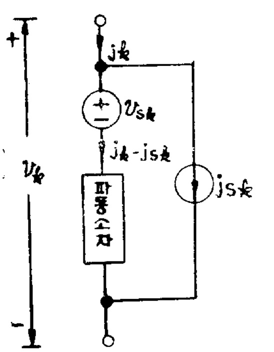


그림 10 一般化시켜 표현된 가지 [illegible]

여기서 j_k, v_k는 일반화된 가지의 가지電流 및 가지電壓을 각각 나타낸다.

만일 실제로 다루는 k번째의 가지가 電壓源을 포함하지 아니하면 $v_{sk}=0$, 또는 電流源을 포함하지 아니하면 $j_{ck}=0$ 등으로 놓으면 된다. 이러한 가지의 電流—電壓特性은 만일 被動素子가 時不變, 線型抵抗 R_k이면

$$v_k=v_{sk}-R_k\ j_{sk}+R_k j_k$$

임을 밝힐 수 있다. 차후부터는 특별한 언급이 없는 한 回路網은 이러한 일반화된 가지들로 이루어진 것으로하고 位相그래프의 應用에 의한 時不變, 線型回路網의 마디解析法, 메슈解析法, 루우프解析法, 컷세트解析法 및 狀態空間解析法의 일반적인 취급 방법을 다음에서 다루도록 한다.

2. 마디解析法(node analysis)

時不變, 線型 回路網의 경우는. 獨立電源만 제외하고는 다른 모든 回路素子들은 時不變, 線型素子들로 이루어 진다. 마디解析法은 가지의 電流—電壓特性式과 다음의 KCL및 KVL를 써서 마디—基準마디 電壓들을 구하므로써 回路網解析을 매듭하여 가는 方法이다.

$$Aj=0\ (KCL) \tag{18}$$

및 $$V=A^Te\ (KVL) \tag{19}$$

일반적으로 마디解析法에서, 이렇게 해서 얻어지는 方程式群은 여러 개의 實係數 線型微分(또는 微積分) 方程式群이 얻어 질 것이며 $n=(n_t-1)$개의 마디—基準마디電壓 $e_1, e_2, \cdots e_n$등이 未知變數로 표현된다. 처음에는 이해되기 쉽게 線型代數方程式群으로 표현되는, 抵抗素子와 獨立電源만을 갖는 回路網의 마디解析法을 다루고, 다음에 페이저와 임피이던스 개념을 써서 交流回路의 定常解析을, 그리고 나중에는 일반적인 微積分方程式群으로 표현되는 一般回路網의 마디解析法을 다루도록 한다.

A. 抵抗回路網의 마디解析法

b개의 가지와 n_t개의 마디로 된 하나의 연결그래프로 표시되는 時不變, 線型 抵抗回路網을 세각하자. 이 回路網의 대표적인 k번째 가지는 그림 10에서 처럼 나타낼 수 있다. 이 가지의 電流—電壓特性은

$$v_k=R_k j_k+v_{sk}-R_k j_{sk} \quad k=1,2,\cdots b$$

또는

* 正會員 : 漢陽大工大敎授·工學博士(當學會編修委員)

$$j_k=G_kv_k+j_{sk}-G_kv_{sk}\quad k=1,2,\cdots b$$

이것을 行列로 묶아 쓰면,

$$j=G_bv+j_s-G_bv_s \tag{20}$$

여기서 G_b는 가지—콘덕턴스行列(branch-Conductance matrix)이라 하며 $[b\times b]$次元의 다음과 같은 對角行列을 뜻한다.

$$G_b=\begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0G_b \end{pmatrix} \tag{21}$$

j_s 및 v_s는 電流源 및 電壓源벡터들로 다음과 같이 $[b\times 1]$次元을 갖는다.

$$j_s=\begin{pmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \cdots \\ d_{sb} \end{pmatrix},\quad v_s=\begin{pmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \cdots \\ v_{sb} \end{pmatrix} \tag{22}$$

식(18), 식(19), 및 식(20)에서 가지變數 j, v를 소거하여 마디—基準마디電壓에 관해 식을 정리하면 마디解析法에서 요구되는 관계식이 얻어진다. 즉 식(20)에 A를 앞곱하기(Premultiplication)하고 식(18)과 식(19)의 결과를 쓰면

$$AG_bA^Te+Aj_s-AG_bv_s=0 \tag{23}$$

또는

$$AG_bA^Te=AG_bv_s-Aj_s \tag{24}$$

지금

$$\left.\begin{aligned} Y_n&=AG_bA^T \\ i_s&=AG_bv_s-Aj_s \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

라 놓으면 식(24)는

$$G_ne=i_s \tag{26}$$

식(26)을 마디方程式(node equation)이라 하며, G_n를 마디—콘덕턴스行列(node conductance matrix), i_s를 마디電流源벡터(node current Source vector)라 한다 A, G_b는 각각 $[n\times b]$, $[b\times b]$次元의 接續行列 및 가지—콘덕턴스行列이니까 $G_n=AG_bA^T$는 $[n\times b]\times[b\times b]\times[b\times n]=[n\times n]$의 正方行列일 것이며, 回路網이 주어져서 素子값과 그들의 연결관계가 알려지면 정해지는 값이다. 또한 각 가지素子의 電流—電壓特性이 주어질 것이니 v_s와 j_s도 알려지므로 i_s도 식(25)에서 구하여 진다. 따라서 식(26)을 e에 관해 풀면 마디—基準마디사이의 모든 마디電壓이 알려져서 마디解析法이 매듭지워 진다. 만일 각 가지電壓V 및 가지電流, j까지 구하려면 식(19), 식(20)의 관계에서 구할 수 있다.

마디解析法에 있어서는 $G_ne=i_s$ 중 마디—콘덕턴스行列 G_n와 마디電流源벡터 i_s가 쉽게 구하여 지면 한결 마디方程式을 세우기가 간단하다. (이것은 물론 손으로 직접 回路解析을 수행할 때를 연상하여 하는 이야기다. 計算機를 써서回路網을 解析하려할 때에는 물론 앞에서 설명된 體系的 過程을 따라야 되겠다.) 從屬電源과 같은 電氣的인 結合素子를 갖지 아니하는 抵抗回路網을 손으로 다룰 때에는 다음과 같은 簡易法을 써서 G_n과 i_s를 구할 수 있다.

지금, 마디方程式 $G_ne=i_s$풀 릍어 쓰면,

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12}\cdots\cdots g_{1n} \\ g_{21} & g_{22}\cdots\cdots g_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ g_{n1} & g_{n2}\cdots\cdots g_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ \vdots \\ i_{sn} \end{pmatrix}$$

여기서,

① g_{ii}는 마디 ⓘ의 自己콘덕턴스(self-conductance)라 하며, 마디 ⓘ에 걸친 모든 가지의 콘덕턴스의 합을 나타낸다.

② g_{ik}는 마디 ⓘ와 마디 ⓚ간의 相互 콘덕턴스(mutual-conductance)라 하며, 마디 ⓘ와 마디 ⓚ간의 가지가 콘덕턴스의 합에 負의 부호를 붙인 것이다.

③ 만일 모든 獨立電壓源을 獨立電流源으로 바꾸어 놓으면 i_{sk}는 가지 ⓚ에 연결된 모든 獨立電流源의 代數和를 나타 낸다. 이때, 電流源의 方向이 마디 ⓚ를 흘러 들어 오는 方向일 때 +부호, 흘러 나가는 方向일 때 —부호를 붙인다.

④ 抵抗素子와 獨立電源으로만 된 回路網은 마디—콘덕턴스行列 $G_n=(g_{ik})$이 對稱行列을 이룬다. 즉, $G_n=G_n^T$이다. 이것은 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$G_n^T=(AG_bA^T)^T=AG_b^TA^T=AG_bA^T=G_n$$

여기 마지막 단계에서 $G_b^T=G_b$임을 이용하였다. 電磁結合이 없는 抵抗回路網에서는 가지—콘덕턴스 G_b는 對角行列이니까 이 관계는 항상 성립된다.

⑤ 만일 線型 抵抗回路網의 모든 콘덕턴스가 正의 값을 가지면 $|G_n|>0$이니 마디方程式은 항상 唯一解를 준다.

B. 交流回路의 마디解析法

時不變, 線型인 抵抗素子, 인덕턴스素子, 커패시턴스素子들과 獨立電源으로 이루어진 RLC回路網을 생각하자. 모든 獨立電源은 같은 角周波數 w의 交流電源이라 생각하며 回路網의 定常動作에만 관심을 갖는다고 생각한다. 따라서 임피이던스, 어드미턴스를 써서 가지素子의 電流—電壓特性을 그림 11에서와 같이 일반화 표현할 수가 있다.

즉, 예컨대 k번째 가지의 어드미턴스를 Y_k라 하면 Y_k는 이 가지素子가 抵抗, 커패시턴스, 혹은 인덕턴스인가에 따라서 G_k, j_wC_k, 또는 $1/j_wL_k$로 표시될 것이며, 이 가지의 電流—電壓特性式의 꼴은 다음과 같이

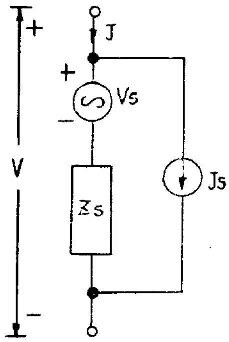


그림 11. 交流定常解析에서의 一般化가지 素子

표시된다.

$J_k=Y_kV_k+J_{sk}-Y_kV_{sk}\quad k=1,2,\cdots\cdots b$ (27)

여기서 J_k, V_k는 k번째 가지의 가지 電流페이저 및 가지電壓페이저를 나타내며 J_{sk} 및 V_{sk}는 이 k번째 가지가 갖는 獨立電壓源 및 獨立電流源의 페이저를 각각 나타낸다. (페이저를 고딕체로 표기하여야 될 것이나 페이저—벡터와 구별시켜 표기하기 어려워서 大文字를 써서 페이저를 나타내고 페이저—벡터는 大文字 고딕체를 쓰도록 하였다.)

식(27)을 行列로 표시하면,

$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{V}+\boldsymbol{J}_s-\boldsymbol{Y}_b\boldsymbol{V}_s$ (28)

여기서, $\boldsymbol{Y}_b$를 가지—어드미턴스行列(branch-admittance matrix), $\boldsymbol{J}$ 및 $\boldsymbol{V}$를 각각 가지電流페이저벡터(branch current phasor vector), 가지電壓페이저벡터(branch voltage phasor vector)라 한다. 交流定常解析에서의 마디解析法은 抵抗回路의 경우와 같이 다음의 마디方程式을 數式處理해 가면된다.

즉

$\boldsymbol{Y}_n\boldsymbol{E}=\boldsymbol{I}_s$ (29)

여기서 페이저 $\boldsymbol{E}$는 마디—基準마디電壓페이저벡터(node-to-datum voltage phasor vector), $\boldsymbol{I}_s$는 電流源페이저벡터(current-source phasor vector), 또한 $\boldsymbol{Y}_n$는 마디—어드미턴스行列(node admittance matrix)이라 하며, 이들은 각각 다음과 같이 얻어 진다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_n&=\boldsymbol{AY}_b\boldsymbol{A}^T\\ \boldsymbol{I}_s&=\boldsymbol{AY}_b\boldsymbol{V}_s-\boldsymbol{AJ}_s\end{aligned}\qquad(30)$$

抵抗回路網의 경우와 交流回路의 定常解析을 위한 마디解析法의 경우, 어느 경우나 마디方程式은 線型代數方程式群으로 표시되고 未知量은 마디—基準마디간의 電壓인 것은 동일하다. 交流回路를 다룰 때는 이들이 페이저로 구하여지며 또한 마디方程式의 各 係數가 (jw)의 函數로 되는 것이 특징이다. 한편抵抗回路網의 경우는 이들 係數가 常數係임에 유념할 일이다.

일단 交流解析에서 $\boldsymbol{E}$가 구하여지면 交流電源이 正法 또는 餘弦函數로 주어졌는가에 따라서 다음의 관계를 써서 瞬時值를 구하면 된다.

$e_{k(t)}=R_e\,[E_ke^{jwt}]\quad k=1,2,\cdots\cdots,\ m$ (31)

혹은

$e_{k(t)}=I_m\,[E_ke^{jwt}]\quad k=1,2,\cdots\cdots m$ (32)

相互誘導結合素子 및 從屬電源을 포함하는 一般交流回路網의 定常마디解析法의 체계적인 수순은 다음과 같이 요약된다.

① 만일 필요하면 電源의 等價變換 또는 電源의 移行技法을 써서 回路網을 다루기 좋게 다듬는다.

② KCL, KVL 관계식 ; $\boldsymbol{AJ}=0$, $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{E}$를 세운다

③ 다음의 가지方程式을 세운다 ;

$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{Y}_{b(jw)}\boldsymbol{V}-\boldsymbol{Y}_{b(jw)}\boldsymbol{V}_s+\boldsymbol{J}_s$

여기서, $\boldsymbol{Y}_{b(jw)}$는 가지—어드미턴스行列이며 電流電源의 角周波數 w의 函數이다.

④ 다음의 마디方程式을 세운다.

$\boldsymbol{Y}_{n(jw)}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{I}_s$

여기서,

$\boldsymbol{Y}_{n(jw)}=\boldsymbol{AY}_{b(jw)}\boldsymbol{A}^T$

$\boldsymbol{I}_s=\boldsymbol{AY}_{b(jw)}\boldsymbol{V}_s\text{-}\boldsymbol{AJ}_s$

⑤ 마디方程式을 페이저벡터 $\boldsymbol{E}$에 관해 푼다.

⑥ $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{E}$, 및 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{Y}_{b(jw)}\boldsymbol{V}-\boldsymbol{Y}_{b(jw)}\boldsymbol{V}_s+\boldsymbol{J}_s$의 관계에서 $\boldsymbol{V}$ 및 $\boldsymbol{J}$를 구한다.

$\boldsymbol{Y}_n$, $\boldsymbol{Y}_b$에 대한 다음의 특징을 알고 있으면 도움이 되는 일이 많다.

1. 相互誘導結合, 從屬電源 등을 포함하지 아니하는 交流回路의 定常解析에서는 $\boldsymbol{Y}_{b(jw)}$는 $[b\times b]$次元의 對角行列이며, $\boldsymbol{Y}_{n(jw)}$는 $[n\times n]$의 對稱行列이 된다.

2. 相互誘導結合만 있고 電氣的 結合을 갖는 從屬電源을 포함하지 아니하는 경우에는 $\boldsymbol{Y}_{b(jw)}$ 및 $\boldsymbol{Y}_{n(jw)}$는 모두 對稱行列을 이룬다.

C. 微積分方程式으로 표시되는 一般回路網의 마디解析法

일반적으로 말해서 時不變, 線型 RLC回路網의 마디方程式은 微積分方程式群으로 표시된다. 이러한 微積分回路方程式은 初期條件들과 入力函數들이 주어지고 回路網의 完全應答을 구하는 따위의 문제에서 자주 나타난다. 이 때의 마디 解析法도 결국은 앞의 抵抗回路網을 다룰 때나, 交流回路網의 定常解析을 다룰 때와 대동소이하다. 즉 接續行列을 구하는 과정은 꼭 같고 다만 마디方程式의 꼴이

$\boldsymbol{Y}_{n(D)}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{i}_s$ (33)

$$\text{여기서,}\quad\left.\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_{n(D)}&=\boldsymbol{AY}_{b(D)}\boldsymbol{A}^T\\ \dot{\boldsymbol{I}}_s&=\boldsymbol{AY}_{b(D)}\,\boldsymbol{v}_s-\boldsymbol{Aj}_s\end{aligned}\right\}\qquad(34)$$

로 된다. 여기서 D는 d/dt, D^{-1}은 $\int_{dt}$를 나타내는 演算子임을 명심하면 된다.

3. 時不變, 線型回路網의 메슈解析法

마디解析法은 퍽 一般性있는 解析法이지만 이제 소개되는 메슈解析法은 平面的인 그래프로 표시되는 回路網에만 적용될 수 있다. 平面그래프로 표시되는 回路網을 다룰 때에는 이들 두 解析法은 서로 雙態的인 관계에 있는 解析法이다.

抵抗回路網의 경우는 交流回路의 定常解析의 특별한 경우로 생각될 수 있으므로 여기서는 交流回路의 定常解析을 메슈解析法에 의해 어떻게 처리하는가를 다루어 본다.

다루는 回路網 N는 時不變, 線型이며 b개의 가지와 n_t개의 마디로 이루어졌다고 생각한다. N의 그래프는 연결된, unhinged된 平面그래프의 것으로 하고 獨立電源은 角周波數 ω인 交流電源(등)으로 생각한다. $\boldsymbol{J_s}$ 및 $\boldsymbol{V_s}$는 $[b\times1]$次元의 페이저들로 된 벡터이며 이들 벡터의 k번째 가지의 交流電流源 및 交流電壓源의 페이저를 나타낸다. 같은 방법으로 $\boldsymbol{V}$ 및 $\boldsymbol{J}$는 $[b\times1]$次元의 페이저들로 된 벡터이며 이들의 k번째 要素는 가지電壓 $v_{k(t)}$와 $j_{k(t)}$의 페이저로 이루어지며, $\boldsymbol{I}$는 $[l\times1]$次元의 벡터로 각 메슈電流 $i_1, i_2, \cdots\cdots, i_l$의 페이저로 형성된다고 생각한다.

메슈解析法의 基本이 되는 식은 다음의 KVL, KCL 및 가지方程式이다.

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{MV}=0\ (KVL)\\&\boldsymbol{J}=\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{I}\ (KCL)\\&\boldsymbol{V}=\boldsymbol{Z}_{b(j\omega)}\boldsymbol{J}-\boldsymbol{Z}_{b(j\omega)}\boldsymbol{J_s}+\boldsymbol{V_s}\ (\text{가지方程式})\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

여기서, $\boldsymbol{Z}_{b(j\omega)}$는 $[b\times b]$行列이며 가지—임피이던스行列(branch-impedance matrix)이라 한다.

식(35)에서 $\boldsymbol{J}$와 $\boldsymbol{V}$를 소거하여 未知벡터 $\boldsymbol{I}$에 관해 정리하면

$$\boldsymbol{MZ}_{b(j\omega)}\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{I}=\boldsymbol{MZ}_{b(j\omega)}\boldsymbol{J_s}-\boldsymbol{MV_s}\quad(36)$$

또는

$$\boldsymbol{Z}_{m(j\omega)}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{E_s}\quad(37)$$

$$\text{단,}\ \left.\begin{aligned}&\boldsymbol{Z}_{m(j\omega)}=\boldsymbol{MZ}_{b(j\omega)}\boldsymbol{M}^T\\&\boldsymbol{E_s}=\boldsymbol{MZ}_{b(j\omega)}\boldsymbol{J_s}-\boldsymbol{MV_s}\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

여기서 $\boldsymbol{Z}_{m(j\omega)}$는 $[l\times l]$行列로서 메슈—임피이던스行列(mesh-impedance matrix), $\boldsymbol{E_s}$는 $[l\times1]$行列로서 메슈—電壓源벡터(mesh voltage Source vector)라 한다.

식(37)이 메슈方程式이며 l개의 代數方程式群을 나타낸다. 이 l개의 複素數係數를 갖는 代數方程式群으로 부터 각 메슈電流페이저를 구하고 식(35)의 두번째 및 세번째 方程式을 쓰면 각 가지電流, 가지電壓페이저가 얻어진다. 메슈—임피이던스行列 $\boldsymbol{Z}_{m(j\omega)}$에 대한 다음의 特徵을 주목할 일이다.

① 回路網 N가 아무런 電磁結合素子를 갖지 아니하면 $\boldsymbol{Z}_{b(j\omega)}$는 對角行列이며 $\boldsymbol{Z}_{m(j\omega)}$는 對稱行列이다. 즉, $\boldsymbol{Z}_{m(j\omega)}=\boldsymbol{Z}_m{}^T{}_{(j\omega)}$

이 때 $\boldsymbol{Z}_{m(j\omega)}$는 다음과 같은 簡易法을 써서 구하면 쉽다.

a. $\boldsymbol{Z}_m$의 z_{ii}要素는 i번째 메슈를 이루는 모든 가지의 合成임피이던스 즉 i메슈의 自己임피이던스(self-impedance)이다.

b. $\boldsymbol{Z}_m$의 z_{ik}要素는 (단, $i\neq k$) 메슈 i와 메슈 k사이에 공통으로 걸쳐져 있는 모든 가지의 合成임피이던스 즉 $i\,j$메슈간의 相互임피이던스(mutual impedance)에 負의 부호를 붙인 값이다. 相互임피이던스에 負의 부호를 붙이는 것은 모든 메슈電流방향을 일률적으로 時計針方向으로 통일시켜 잡는데에 연유된다. 흔히 時計針方向으로 잡는 것이 관례이다.

② 만일 等價관계를 써서 모든 獨立電源을 電壓源으로 바꾸어 놓으면 $\boldsymbol{E}_{sk}$는 메슈 k내의 모든 電壓源의 代數和로 얻어진다. 이 때 電壓源이 k번째 메슈의 基準方向으로 極性이 方向지워져 있으면 이 電壓源은 +, 그와 反對이면 —가 된다.

③ 抵抗回路網의 경우, 만일 모든 抵抗素子가 正의 값만을 갖는다면 $\det(\boldsymbol{Z}_m)>0$.

따라서 이 때에는 메슈方程式은 항상 唯一한 解集合을 주게 마련이다. 만일 다루는 回路網이 電磁結合素子를 갖는다면, 이때에는 $\boldsymbol{Z}_{b(j\omega)}$는 對角行列을 이루지 아니하며 또한 $\boldsymbol{Z}_{m(j\omega)}$는 對稱行列을 반드시 이루지 아니한다.

4. 時不度, 線型 回路網의 루우프解析法

이번에는 抵抗回路網의 경우를 예로하여 루우프 解析法을 설명하여 본다. 一般回路網의 루우프解析法도 유사한 方法으로, 약간 수정만 해가면 처리될 수 있다

루우프解析法과 컷세트解析法은 어느것이나 그래프의 나무를 선정한 다음, 基本루우프나 基本컷세트에 대하여 KVL, KCL을 세우고, 가지方程式을 써서 解析處理를 진행하여 간다. 그런데, 어떤 그래프에서 나무를 선택하는 선택도는 다양할 것이므로 이들 解析法은 마디解析法이나 메슈法보다 퍽 一般性을 지녀서 方法上의 自由度가 크고 유연성이 넓다.

루우프解析法에서는 基本루우프行列 $\boldsymbol{B}$를 써서 얻어지는 다음의 KVL 및 KCL關係式과 가지의 電流—電壓特性關係를 나타내는 가지方程式에서 l개의 基本루우프電流를 未知變數로 하는 方程式群을 세워서 回路網解析處理를 하게 된다. 즉,

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{BV}=0 && (KVL)\\&\boldsymbol{j}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{i} && (KCL)\\&\boldsymbol{V}=\boldsymbol{R_b j}+\boldsymbol{V_s}-\boldsymbol{R_b j_s} && (\text{가지方程式})\end{aligned}\right\}\quad(39)$$

여기서, $\boldsymbol{R_b}$는 가지抵抗行列로서 $[b\times b]$의 對角行列

이고 V_s와 j_s는 각각 電壓源과 電流源벡터이다. 이 세 식에서 V와 j를 소거하면,

$$BR_bB^Ti=-BV_s+BR_bj_s \tag{40}$$

또는 $R_li=e_s$ (41)

여기서,

$$\left.\begin{aligned} R_l&=BR_bB^T \\ e_s&=-BV_s+BR_bj_s \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

여기 R_e를 루우프—抵抗行列(loop-resistance matrix)이라 하며 $[l\times l]$의 次元을 갖는다. e_s는 루우프 電壓源벡터(loop voltage source vector)라 한다. 만일 다루는回路網이 電磁結合素子를 갖지 않는다면 루우프—抵抗行列 R_l은 다음과 같은 特徵을 갖는다.

① 가지—抵抗行列 R_b는 對角行列이며 루우프—抵抗行列 R_l은 對稱行列이다.

② 루우프—抵抗行列 R_l의 i번째 루우프의 自己抵抗(self-resistance of loop i) r_{ii}는 루우프 i를 따른 合成抵抗의 크기와 같고, 相互抵抗(mutual resistance between loop i and k) r_{ik}는 i번째와 k번째 루우프사이에 공통으로 걸쳐 있는 合成抵抗에 正 또는 負의 부호를 붙인 값과 같다. 이 때 i,k 루우프에 공통으로 걸쳐 있는 가지가 루우프의 方向과 같은 方向性을 가지면 正, 반대의 方向性을 가지면 負의 부호를 붙인다

③ 만일 回路網내의 모든 電流源이 電壓源으로 變換되었다면 e_{si}는 루우프 i내의 모든 電壓源의 代數和를 뜻한다. 이 때, 루우프의 方向과 같은 方向의 極性을 갖는 電壓源은 +, 2와 反對되는 極性의 電壓源은 — 부호를 붙인다.

④ 만일 다루는 回路網이 이 경우에서 처럼 抵抗回路網이고 모두 正의 抵抗値만을 갖는다면 $|R_l|>0$이다

交流回路網을 다루는 경우에는 R대신에 Z를, 抵抗 어휘대신에 임피이던스 등을 써가면서 약간 수정만 하면 될 것이다.

5. 時不變, 線型回路網의 컽세트解析法

컽세트解析法은 루우프解析法과 雙態關係를 이루는 解析法이다. 컽세트解析法에서 基本이 되는 關係式은 역시 다음의 KCL, KVL 및 가지方程式의 세 개이다

基本컽세트行列 Q를 써서 키르히호프의 關係式이 표현되었다.

$$\left.\begin{aligned} Qj&=0 \\ V&=Q^Te \\ \text{및}\quad j&=G_bv+j_s-G_bv_s \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

여기서, e는 $[n\times 1]$의 나무가지의 電壓 벡터임을 명심해야 한다. 위의 식에서 가지方程式은 抵抗回路網을 가정하여 표기하였으나 一般回路網의 경우에의 擴張適用方法도 앞에서 설명된 방법들과 다를 바가 없다.

이들 세 개의 식에서 V 및 j를 소거하고 末知벡터 e에 관해 식을 정리하면

$$QG_bQ^Te=QG_bV_s-Qj_s \tag{44}$$

또는

$$Y_q\ e=i_s \tag{45}$$

단, 여기서

$$\left.\begin{aligned} Y_q&=QG_bQ^T \\ i_s&=QG_bV_s-Qj_s \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

여기의 Y_q를 컽세트—어드미턴스行列(cut-set admittance matrix), i_s를 컽세트電流源벡터(cut-set current sounce vector)라 한다. (抵抗回路를 가정하면 식(45), 식(46)의 Y_q대신에 G_q 즉 컽세트—콘덕턴스行列로 표기함이 옳을 것이나 여기서는 더 一般化시켜 표현할 양으로 어드미턴스를 사용했다.)

交流回路의 定常解析을 위하여는 다음의 컽세트—어드미턴스行列 Y_q의 特徵을 알고 있으면 편리하다.

① 만일 다루는 回路網이 電磁結合素子를 갖지 아니하면, 가지—어드미턴스行列 $Y_{b(j\omega)}$는 對角行列을 이루며 따라서 $Y_{q(j\omega)}$는 對稱行列이 된다.

② 만일 回路網이 電磁結合素子를 갖지 아니하면 $Y_{q(j\omega)}$의 i번째 主對角要素 $y_{ii(j\omega)}$는 i번째 컽세트의 어드미턴스의 合과 같다. 또한 $Y_{q(j\omega)}$의 i行, k列要素 $y_{ik(j\omega)}$는 컽세트 i와 컽세트 k에 공통으로 걸쳐진 모든 가지들의 어드미턴스의 대수합을 취한 값이다. 이 때 공통가지의 방향과 컽세트의 방향이 同一하면 (컽세트와 같은 方向으로 方向지워졌으면) 그의 어드미턴스는 +, 반대 방향이면 —부호를 붙인다.

③ 만일 모든 電壓源을 電流源으로 바꾸어 놓았다면 i_{sk}는 컽세트 k내의 모든 電流源의 대수합을 취한 값이다. 이 때 電流源의 方向이 k번째 컽세트의 方向과 反對되는 方向이면 +, 같은 方向이면 —부호를 붙이는 것에 주의하여야 한다. (즉 컽세트를 Gauss曲面으로 감쌌을때 外向하는 방향이 + 방향이다.)

④ 만일 抵抗回路網의 모든 抵抗이 正의 값을 갖는다면 $|Y_q|>0$이다.

6. 時不變, 線型 回路網의 狀態空間 解析法

狀態空間法에 의한 回路網解析法은 線型, 非線型, 또는 時變, 時不變性에 관계 없이 모든 回路網(또는 일반적으로 系統)의 解析에 근간 많이 쓰인다.

우선, 특별한 경우의 回路網을 소외시킬양으로, 이제부터 다루는 回路網은 커패시터만으로 루우프를 이루든지 또는 인덕터만으로 컽세트를 이루는 따위의 비범한 回路網은 다루지 않는것으로 하자, 커패시터만으로 된 루우프라는 것은, 獨立電壓源과 커패시터들 만으로 구성된 루우프를 의미하며, 인덕터만의 컽세트는 獨立電流源이나 인덕터만으로 구성된 컽세트를 뜻한다 이러한 비범한 루우프나 컽세트를 포함하지 아니하는

回路網에서는 항상 適正나무가 선정될 수 있다. 가장 기본되는 狀態空間解析法의 처리과정을 차례로 요약하면 다음과 같다.

① 回路網의 그래프에서 適正나무를 우선 선택한다. 즉, 모든 커패시터는 나무가지에 포함시키고 인덕터는 補木가지가 되도록 나무를 선정한다.

② 나무에 포함된 커패시터의 가지電壓과 補木가지의 인덕터電流를 狀態變數로 택한다.(커패시터의 電荷量과 인덕터의 鎖交磁束을 狀態變數로 잡아도 좋다. 時變, 非線型 回路網을 다룰 때에는 이렇게 택하는 것이 편리하다)

③ 각 커패시터가 연결된 마디에 마디 方程式을 세운다.

④ 인덕터 補木가지를 하나 씩 넣으면서 이 때 형성되는 루우프(基本루우프)에 루우프 方程式을 세운다.

⑤ 이들 식을 다듬어서 다음과 같은 規準꼴이 되게 정리한다.

$$\dot{X}=Ax+Bu \tag{47}$$

여기서 x는 狀態벡터(State Vector), u는 入力(또는 驅動)벡터(input or driving vector) A를 係數行列 또는 同伴行列(coefficient matrix or companion matrix), B를 驅動行列(driving matrix)이라 한다. 時不變, 線型 回路網에서는 A,B行列은 常數行列이며 時變 혹은 非線型 回路網을 다룰 때에는 이들 行列要素 중의 하나 혹은 그 이상의 要素값이 時間 혹은 狀態變數(들)의 函數로 표시된다.

다루는 回路網이 복잡하여지면 어느 回路變數를 狀態變數로 잡아서 몇개의 一階微分方程式을 세워야 될 것인지를 가늠하기 어려울 때가 있다. 일반적으로 말해서 狀態變數의 갯수, 즉 狀態空間의 次元은 다루는 回路網의 獨立된 에너지 저장능력이 있는 被動素子의 갯수와 같다는 것을 알면 편리하다. 여기서 에너지 저장능력이 있는 被動素子란, 커패시터나 인덕터처럼 기억능력을 갖는 電氣素子를 지칭하는 말이다(直列로 연결된 인덕터들은 서로 각각이 독립된 에너지 저장素子는 아니다. 동일한 마디사이에 並列로 연결된 커패시터들도 서로 獨立된 素子는 아니어서 이들은 等價合成量으로 바꾸어 놓은 다음에 獨立된 에너지 저장素子를 헤아리는 것이 좋다.)

앞의 方法을 더 擴張시켜 그래프理論을 써서 一般回路網의 狀態空間解析法을 설명하여 보자.

우선 첫 단계는 역시 適正나무를 선정하는 일이다.

두번째 단계는 가지들을 네 개의 副集合으로 나눈다 편리상, 보통은 補木가지인 抵抗素子, 인덕턴스素子, 나무가지인 커패시턴스素子 및 나무가지인 抵抗素子들로 되는 네가지 무리의 副集合으로 가지들을 차례로 분류시킨다.

세번째 단계는 基本루우프에 KVL를 적용시켜 電壓平衡式을 세운다. 또한, 다음에는 基本컽세트에 KCL를 적용시켜 電流平衡式을 세운다.

$$\underset{B\text{行列}}{[1_l\ F]}\begin{pmatrix} V_R \\ V_L \\ \cdots \\ V_C \\ V_G \end{pmatrix}=0 \tag{48}$$

여기서, V_R, V_L, V_C, 및 V_G 두번째 단계에서 분류한 각 가지群의 가지電壓벡터를 나타내는 副벡터이다. 각 가지의 記番순서도 앞에서 分割한 가지群의 순으로 부쳐 나가는 것이 편하다.

基本컽세트에 대한 KCL은 $Qj=0$에서

$$\underset{Q\text{ 行列}}{[-F^T \vdots 1_n]}\begin{pmatrix} j_R \\ j_L \\ \cdots \\ j_C \\ j_G \end{pmatrix}=0 \tag{49}$$

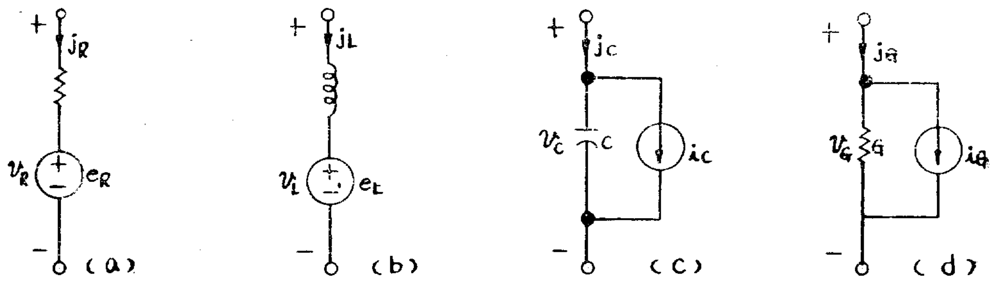
여기서, j_R, j_L, j_C, 및 j_G는 각각 抵抗—補木가지, 인덕터—補木가지, 커패시터—나무가지 및 抵抗—나무가지들의 가지 電流를 나타내는 副벡터들이다.

이제 네번째 단계는 가지方程式을 세우는 일이다. 편리상 그림 12에서 처럼 補木가지 속에는 獨立電壓源 그리고 나무가지 속에는 獨立電流源이 있는 것으로 가정하자. 이렇게 獨立電源의 위치를 가정한다 하더라도 獨立電壓源, 獨立電流源은 상호 等價互換표시될 수 있는 것이므로 一般的인 回路網解析에의 적용에 별다른 제약을 받지 아니한다. 가지方程式은 이제 다음과 같은 꼴로 정리할 수가 있다.

$$\left.\begin{aligned} V_R&=R_Rj_R+e_R \\ V_L&=L\frac{dj_L}{dt}+e_L \\ j_C&=C\frac{dV_C}{dt}+i_C \\ j_G&=G_GV_G+i_G \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

行列 R_R, L, C, 및 G_G는 각각 補木가지 抵抗行列(link resistance matrix), 補木가지 인덕턴스 行列(link inductance matrix), 나무가지—커패시턴스 行列(tree-branch Capacitance matrix), 및 나무가지—콘덕턴스行列(tree-branch conductance matrix)들을 나타내며 e_R, e_L, i_C 및 i_G는 각 가지의 獨立電源벡터들을 나타낸다.

이제 다섯번째의 단계는 식(48), 식(49) 및 식(50)에서 狀態變數 이외의 變數들을 소거되게끔 하여가는 일이다. 물론 앞에서 설명된대로 커패시터電壓(또는



抵抗—補木가지　　인덕터補木가지　　커패시터—나무가지　　抵抗—나무가지

그림 12 각 가지들의 표시

커패시터電荷)와 인덕터電流(또는 인덕터의 鎖交磁束)를 狀態變數로 잡는다.

이 과정을 설명하면 다음과 같다.

식(48)과 식(49)는 아래와 같이 바꾸어 쓸 수 있다. 즉,

$$\begin{pmatrix} V_R \\ V_L \end{pmatrix} = -F\begin{pmatrix} V_C \\ V_G \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_{RC} & F_{RG} \\ F_{LC} & F_{LG} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_C \\ V_G \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$\begin{pmatrix} j_C \\ j_G \end{pmatrix} = F^T\begin{pmatrix} j_R \\ j_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{RC}^T & F_{LC}^T \\ F_{RG}^T & F_{LG}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_R \\ j_L \end{pmatrix} \tag{52}$$

이들 식에서 F行列은 편리상 副行列 여러개로 쪼개여 표시하였다. 이제 식(50), 식(51) 및 식(52)를 쓰면 다음의 식들을 얻는다.

$$\left.\begin{aligned} &R_R j_R = -F_{RC}V_C - F_{RG}V_G - e_R \\ &L\frac{dj_L}{dt} = -F_{LC}V_C - F_{LG}V_G - e_L \\ &C\frac{dV_C}{dt} = F_{RC}{}^T j_R + F_{LC}{}^T j_L - i_C \\ &G_G V_G = F_{RG}{}^T j_R + F_{LG}{}^T j_L - i_G \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

이 식에서 狀態變數도 아니고 入力變數도 아닌 變數는 j_R와 V_G이다. 이들은 다음과 같은 과정을 거쳐서 소거할 수 있다. 즉,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} V_C \\ j_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -y & K \\ K^T & -Z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_C \\ j_L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}^{-1} B\begin{pmatrix} i_C \\ i_G \\ e_R \\ e_L \end{pmatrix} \tag{54}$$

여기서,

$y = F_{RC}{}^T R^{-1} F_{RC}$

$Z = F_{LG} g^{-1} F_{LG}{}^T$

$R = R_R + F_{RG} R_G F_{RG}{}^T,\ R_G = G_G{}^{-1}$

$K = F_{LC}{}^T - F_{RC}{}^T R^{-1} F_{RG} R_G F_{LG}{}^T$

$G = G_G + F_{RG}{}^T G_R F_{RG},\ G_R = R_R{}^{-1}$

$$B = \begin{pmatrix} 1, & -F_{RC}{}^T R^{-1} F_{RG} R_G, & F_{RC}{}^T R^{-1} & 0 \\ 0, & -F_{LG} G^{-1}, & -F_{LG} G^{-1} F_{RG}{}^T G_R & 1 \end{pmatrix}$$

즉, $\dot{X} = AV + Bu$의 規準型로 정리된다.

電磁結合素子를 갖는 回路網의 狀態方程式도, 경우에 따라서는 여기에서 설명된 방법에 따르면 구해 낼 수 있다. 예컨대, 相互誘導結合을 갖는 인덕터의 경우 인덕턴스行列은 對稱이지만 非對角行列을 이루며, 또한 從屬電源과 理想變壓器, Gyrator등을 갖는 回路網의 경우에는 補木가지—抵抗行列과 나무가지—콘덕턴스行列은 非對角行列을 이루어 복잡하게 표현되나 특별한경우를 제외하는 앞의方法을 차례로 따르면된다.