● 解 說 ● 學生欄

位相그래프와 回路網解析理論(Ⅰ)

張 世 勳*

■ 차 례 ■

Ⅰ. 緖 論

回路網을 解析하는 데에 i) 枝路解析法, ii) 루우프解析法, iii) 메슈解析法, iv) 마디解析法, v) 컷세트解析法 및 vi) 狀態空間解析法 등이 사용됨은 이미 알고 있다.

다루는 回路가 비교적 간단한 構成의 線型, 時不變 回路網이고 또한 종이와 연필로 回路網解析을 수행하여야 될 때에는 익혀온 이들 解析法을 관례대로 따르면 될 것이나, 다룰려는 回路網이 大型인 複雜한 構造의 것이든지 혹은 非線型素子, 時變素子 등을 포함하는 경우에는 獨立回路方程式들을 체계있게 세워 나가는 데에도 어려움이 있거니와, 설혹 回路方程式群을 세웠다 하드라도 이들을 풀어 나가는데에도 이젠 우리가 할 수 있는 能力限界를 느끼게 된다. 電子計算機가 스스로 獨立性을 지닌 필요한 個數의 回路網方程式들을 作成하고, 또한 풀이도 하여 解析結果만을 제시하여 준다든지, 또는 요구되는 特性을 갖는 回路網을 設計하여 주면, 많은 수고와 번거로움이 덜어진다. 이러한 뜻에서 電算機의 活用에 의한 回路網의 解析, 設計(computer oriented network analysis and synthesis)理論이 바람직하다. 여기서는 이러한 電算機의 사용에 의한 回路網의 解析, 設計理論의 기초가 되는 부분을 가려서 位相 그래프理論에 따른 回路網 解析方法을 解說한다. 주로 引用된 文獻은 다음과 같다.

1. Applied Graph Theory, 1976, Chen, Elsevier.
2. Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits, Chua, Prentice-Hall.
3. Computer-Aided Circuit Design, Director, Academic Press.
4. Basic Circuit Theory, 1969, Desoer, McGrawH-ill.
5. Introduction to Circuit Analysis, 1977, Trick, John-Wiley.
6. Systems and Circuits for Elec. Eng. Technology, 1976, Belove, Mc-Graw-Hill.
7. Large-Scale Networks: Theoryand Design, Boeseh, John-Wiley.
8. Solution of Large Networks by Matrix Methods, 1975, Brown, John-Wiley.
9. Systems, Networks and Computation, 1974, Athans, McGraw-Hill.
10. Systematies: A New Approach to System Analysis, 1975, Grindley, I.P. MGH.
11. Basic Electric Circuit Analysis, 1975, Johnson, Prentice-Hall.
12. Resistive Circuit Theory, 1974, Spence, McGraw-Hill.
13. Computer-Aided Control System Design, Rosenbrock, Academic.
14. Circuit Analysis by Digital Computer, Staudhammer, Prentice-Hall.
15. Circuit Theory, 1970, Rohrer, McGraw-Hill.

Ⅱ. 回路網의 位相學的 표시

電氣素子가 어떻게 연결되어 回路網을 이루는지를 나타내는데에 位相그래프(topological graph)를 사용한다. 回路網의 位相學的 特徵을 나타내는 이 그래프

*正會員：漢陽大電氣工學科敎授·工博(當學會編修理事)

와 관련된 중요한 낱말의 정의를 간추려 보면 다음과 같다.

① 가지(branch) : 線型, 非線型, 時變 혹은 時不變性 등에 관계없이 回路網을 구성하는데 관여된 集中電氣素子를 뜻하며 線으로 나타낸다. 하나의 素子를 하나의 가지로 나타내는 것이 원칙이지만 경우에 따라서는 몇 개의 素子의 直列, 並列 혹은 直並列의 경우를 한데 묶어 하나의 가지로 나타내기도 한다. 가지에 화살표를 붙여 方向을 지워주면 이러한 가지를 方向性가지(oriented branch)라고 부른다.

② 마디(node, vertex) : 두개 혹은 두개 이상의 回路網素子가 만나는 연결점을 마디라 하며 •로 표시한다. 마디의 電壓을 나타내는 데에는 특정된 마디에 대한 電位를 基準으로 하여 이것에 대한 電位의 높고 낮음을 나타내는 것이 편리할 때가 있다. 이 때 基準으로 잡는 마디를 基準마디(datum node)라 하며 대개의 경우 基準마디는 接地되어 零電位에 있는 것으로 생각한다. 그러나 반드시 接地시켜야 된다는 것은 아니다.

③ 마디電壓(nod voltage) : 한 마디와 다른 마디 사이의 電壓을 말한다. 한 마디와 基準마디간의 電壓을, 基準마디가 아닌 마디와의 사이의 電壓과 구별하여야 할 때에는 마디—基準마디電壓(node-datum voltage), 마디雙電壓(node pair voltage) 등으로 구분하여 부른다. 마디電壓은 가지의 양단에 걸리는 電壓을 나타내므로 across variable이라 부르기도 한다.

④ 가지電流(branch current) : 어느 가지를 흐르는 電流를 말하며 through variable이라고도 한다. 가지가 方向性가지일 때 電流는 이 화살표 方向으로만 흐를 수 있다.

⑤ 位相그래프 또는 그래프(topological graph 또는 그저 graph) : 回路網을 구성하는 電氣素子들간의 연결관계를 나타내는 位相(幾何學的)學的 그래프를 말한다. 따라서 位相그래프는 마디와 가지로 이루어진 集合을 뜻하며, 마디와 가지의 연결관계가 동일한 이상, 겉모양이 다르드래도 그 그래프는 동일한 回路網을 나타내는 位相그래프이다. 만일 位相그래프가 마디와 方向性가지로 이루어지면, 이 그래프는 方向性그래프(oriented graph)라 한다.

⑥ 가지電壓(branch voltage) : 가지 兩端에 걸리는 電壓을 말한다. 따라서 이것은 電氣素子의 兩端에 걸리는 電壓이다. 마디電壓, 마디雙電壓과는 구별되어야 한다.

⑦ 平面的인 그래프(planar graph) : 平面위에 가지를 나타내는 線이 서로 겹치지 않게 그릴 수 있는 位相그래프를 平面的인 그래프라 하며, 平面的인 그래프가 아닌 그래프는 非平面的인(nonplanar)그래프라 한다. 여기서는 그래프라 하면 平面的인 그래프를 뜻하는 것으로 한다.

⑧ 연결된 그래프(Connected graph 또는 joint graph) : 그래프의 어떤 마디 두개를 취하드라도, 즉 마디雙을 취해도 이 마디雙사이에 적어도 하나 이상의 가지가 걸쳐져 있으면 이 그래프는 연결된 그래프라 한다. 이 때 그래프가 方向性이면 이 가지의 方向性에는 개의치 않는다. 연결되지 않은 그래프는 分離된 그래프(separated graph)라 하며, 이 分離된 部分을 각각 分離部分(sepated part)이라 한다.

⑨ 徑路(path) : 두개의 끝쪽 마디를 제외한, 다른 모든 마디가 꼭 두개의 가지와 맞닿아진 마디와 가지의 集合을 말한다.

⑩ 루우프(loop) : 徑路의 양쪽 끝마디가 합쳐져서, 연결된 閉路를 이루면 이를 루우프라 한다. 루우프는 다음의 특징을 갖는다.

1. 루우프는 연결되어 있다.
2. 각 마디마다 꼭 두개의 가지와 맞닿아 있다.

특별한 경우로서, 한 마디에서 하나의 가지가 연결되면서 루우프를 형성할 때가 있는데, 이런 때의 루우프를 각별히 구분하여 自己루우프(self loop)라 부른다.

⑪ 루우프電流(loop current) : 루우프를 따라 흐르는 閉路電流를 말한다.

⑫ 메슈(mesh) : 만일 그래프의 어떤 루우프가 그 내부에 아무런 다른 가지를 걸치지 아니할 때에는 이 루우프를 특별히 메슈라 한다. 또한 內部메슈(interior mesh)와 구별하여, 外向的으로 보아 메슈라 부를 수 있는 것은 外向메슈(outer mesh)라 한다. 루우프나 메슈 모두 閉路(closed path)에 속한다.

⑬ 메슈電流(mesh current) : 메슈를 따라 흐르는 閉路電流를 말한다.

⑭ 고립된(혹은 단절된) 마디(isolated 또는 degenerative node) : 마디 하나가 고립되어 있는 그래프를 뜻한다. 고립된 마디는 그 자체는 연결된 그래프(또는 部分그래프)인 것으로 다룬다.

⑮ 接續가지(incident branch) : 어느 마디와 接續되는 가지를 말한다.

⑯ 나무(tree) : 연결된 그래프의 나무라 함은 다음 특징을 갖는 副그래프(subgraph)를 말한다.

1. 나무는 원래의 그래프의 모든 마디를 갖는다. 마디는 고립된 상태에 있어서는 아니된다.
2. 나무는 (n_t-1)개의 가지로 이루어진다. 여기서 n_t는 원래의 전체 그래프(total graph)의 마디數를 뜻한다.

3. 나무는 閉路를 이루지 아니한다.

이들을 종합하여 나무를 정의하면 다음과 같다. 즉, 연결된 그래프의 나무란 n_t개의 마디와 (n_t-1)개의 가지로 형성되는, 閉路를 이루지 아니하는 副그래프이다.

한 그래프를 놓고도 위의 조건을 만족시키는 나무는 여러 종류의 것이 있을 수 있다. 일반적으로 마디雙사이에 한개씩만의 가지만을 갖는 연결그래프에 있어서는, 마디數를 n_t라 하면 $n_t^{n_t-2}$개의 서로 다른 종류의 나무를 형성시킬 수 있다. 마디雙사이에 하나 이상의 가지가 걸쳐지는 경우도 있다. 그래프의 나무의 총수를 찾는 더 일반적인 방법은 후에 설명한다.

⑰ 나무가지(tree branches, twigs) : 나무를 이루는데 관련된 (n_t-1)개의 가지를 말한다.

⑱ 補木가지(cotree branches, chords, links) : 나무를 형성하기 위해 원래의 그래프에서 떼어 낸 가지들을 말한다. 이들 補木가지들의 集合을 補木(cotree)이라 하는 데, 이것은 나무에 포함되지 아니한 그래프의 나머지 餘集合을 말한다.

⑲ 컽세트(cut set) : 어떤 그래프에서 (1) 몇개의 가지들—이것을 가지集合이라 하자—을 모두 떼어 내면 원래의 연결 그래프가 두개로 분리되고, (2) 이 가지集合 중의 어느 하나의 가지만 남겨 놓으면 두개의 分離되었든 部分그래프가 연결되면, 이 가지集合을 컽세트라 한다.

⑳ hinged그래프 : 고립된 마디가 아닌 分離된 그래프가 하나의 마디만으로 서로 연결되었을 때, 이 마디를 hinged마디(또는 separable node)라 하며, 이러한 마디를 갖는 그래프를 hinged그래프라 한다. 그림 1에서 마디 ①은 hinged마디이다. 여기서는 hinged그래프를 갖는 回路網은 제외시켜 다룬다.

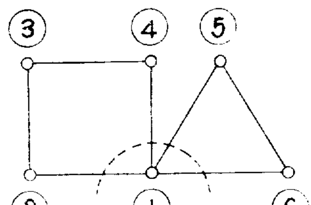

그림 1. hinged그래프의 보기

㉑ 基本루우프(fundamental loop) : 어떤 연결된 그래프에서 나무를 선정하였다고 하자. 한 번에 하나의 補木가지를 넣으면 그 때마다 형성되는 루우프는 서로 다르다. 이러한 루우프를 基本루우프, 또는 f-loop라 한다. 基本루우프에는 한 개만의 補木가지가 관여되고 나머지 가지는 나무가지들로 루우프가 형성됨을 명심해야 한다. 基本루우프의 수는 補木가지의 數와 같다.

㉒ 基本컽세트(fundamental cut set) : 어떤 연결된 그래프에서 나무를 선정하였다고 하자. 꼭 하나의 나무가지가 관여되게끔 컽세트를 만들면 이것이 基本컽세트이다. f-cut set라고도 한다. 基本컽세트는 꼭 하나만의 나무가지와 나머지의 가지는 補木가지로 형성되는 컽세트를 지칭한다. 基本컽세트의 數가 나무가지의 數와 같게 됨은 쉽게 이해된다.

㉓ 正規나무(normal tree) : 다음의 특징을 갖도록 형성된 나무를 말한다.

1. 모든 獨立電壓源은 나무가지로 표시되고
2. 가능한 最大個數의 커패시턴스—나무가지를 가지며
3. 될수록 最少個의 인덕턴스—나무가지를 가지며
4. 모든 獨立電流源은 나무가지에서 배제시킨다.

㉔ 適正나무(proper tree) : 다음의 특징을 갖는 나무를 말한다.

1. (모든 獨立電壓源과) 커패시턴스素子를 나무가지로 하며
2. (모든 獨立電流源과) 인덕턴스素子를 補木가지로 갖는다.

이제 예로서 그림 2와 같은 回路에 대해 앞에서 설명된 基本낱말들을 설명하여 보자.

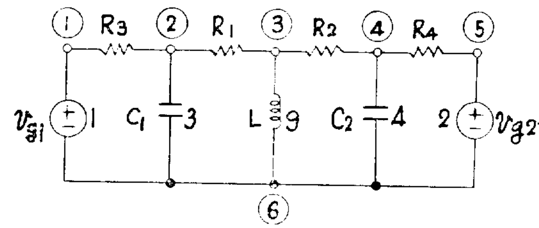

그림 2. 예를 위한 回路

이 回路網의 位相그래프는 그림 3에서와 같이 6개의 마디와 9개의 가지로 이루어지는 平面그래프로 나타낼 수 있다.

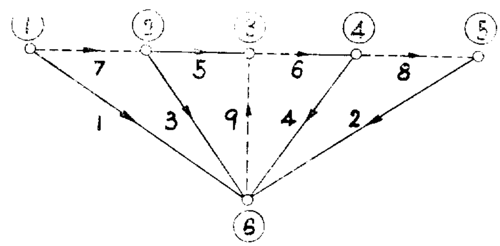

그림 3. 그림 2의 回路의 位相그래프

이 그래프에서, 예컨대 가지 5는 R_1抵抗素子를 나타내며, 가지 1은 獨立電壓源 v_{g1}을 나타낸다. 가지 5의 양단에 걸리는 電壓이 가지 5의 가지電壓, 또는 마디 ②와 마디 ③사이의 마디雙電壓이다. 이때는 마디雙電

壓과 가지電壓은 같으나 항상 그렇게 되는 것은 아니다. 예컨대, 마디 ①과 마디 ③의 마디雙電壓은 가지 7과 가지 5의 마디雙電壓의 代數合으로 표시된다. 임의로 마디 ⑥을, 다른 電壓표시의 基準이 되도록 잡는다면, 마디 ⑥이 基準마디가 된다. 위 그래프는 어느 마디雙을 취하드래도, 이 마디雙 사이에는 가지가 걸쳐 있으므로 연결된 그래프이다. 또한 각 가지가 화살표로서 方向이 지워져있으므로 方向性그래프이다. 그림의 그래프에서 實線으로 표시한 가지와 마디들은 나무를 형성하며 이 나무는 適正나무이면서 또한 正規나무이기도 하다. {1,2,3,4,5}는 나무가지들이며 {6,7,8,9}는 補木가지들이다. {7,5,6,8}은 徑路를 형성하나 {7,5,9,3,5,6,8}은 徑路를 형성하지 아니한다. {5,9,3}은 루우프도 되고 메슈도 된다. 그러나 {7,5,9,1}은 루우프이지만 메슈는 아니다. {7,5,6,8,2,1}은 外向메슈를 이룬다. 나무에 補木가지 7을 넣어서 형성되는 루우프 {7,3,1}은 한 基本루우프이다. 이 루우프를 따라 흐르는 電流가 루우프電流이다. 이 루우프는 메슈이기도 하므로 메슈電流라 불러도 좋다. {5,6,4,3}으로 형성되는 루우프로 基本루우프가 된다.

이 때의 루우프電流는 메슈電流가 아니다. {6,4,9}로 형성되는 루우프는 基本루우프가 되지 못한다. {7,1} 또는 {5,6,9}는 基本컷세트이다. 그러나 {7,5,3}은 컷세트이긴 하지만 基本컷세트는 아니다. 가지 6은 마디 ③과 마디 ④에 接續되어 있다.

回路網을 다룰 때, 다음의 사항들을 알고 있으면 편리하다.

(1) b개의 가지와 n_t개의 마디를 갖는 그래프에서 나무가지의 數는 (n_t-1)개이다.

(2) 補木가지의 數는 그래프의 전체의 가지數 b에서 나무를 형성하는데 관여된 나무가지數 (n_t-1)개를 뺀 數：$(b-n_t+1)$개와 같다.

(3) 獨立된 마디數는 (n_t-1)개이다.

(4) 어떤 그래프의 루우프의 個數는 매우 많으나 基本루우프의 個數는 補木가지의 數：$(b-n_t+1)$과 같다.

(5) 基本컷세트의 個數는 나무가지數：(n_t-1)과 같다.

(6) 基本루우프, 基本컷세트들은 각각 獨立된 루우프 및 컷세트들이다.

(7) 內向메슈들은 서로 獨立된 메슈들이며 이 個數는 $(b-n_t+1)$개이다.

이제 이들을 기틀하여 位相그래프理論을 써서 回路素子의 接續表現 및 接續行列(Connection matrix)를 써서, 키르히호프의 法則(KCL과 KVL)이 어떻게 표시되는지를 알아 보자.

Ⅲ. 連結行列(Connection matrix)에 의한 回路素子의 接續表現과 키르히호프의 法則

1. 擴張接續行列과 接續行列

그림 4(a)의 回路網을 예로 하여 설명하자.

각 가지와 마디에 임의로 번호를 매겨 回路網의 方向性그래프를 그림 4(b)에 그려 놓았다. 만일 어느 가지가 어느 마디와 接續되면, 이 가지와 마디와의 接續관계를 나타내는 데에 ±1, 만일 접속되지 아니하면 0을 써서, 어느 특정된 마디에 연결된 가지의 接續관계를 나타내도록 하자. 꼭 그래야 할 것은 아니지만 보통은 가지가 어느 마디를 나가는 方向으로 향하여 접속되었을 때는 +1, 이와는 반대로 이 마디를 들어오는 方向으로 接續되어졌을 때는 −1로 표시한다.

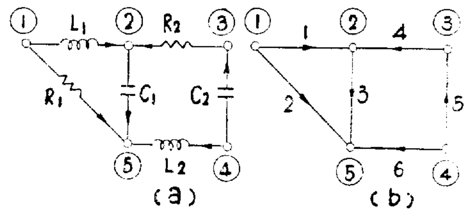

그림 4. 回路와 方向性그래프

다음에서 처럼, 가로방향에 가지번호를, 세로방향에 마디번호를 써 놓고 마디와 가지사이의 接續관계를 앞에서 설명한 規則에 따라서 +1, −1, 또는 0을 넣어 채워 나가면 그림 4의 回路에 대하여는 [5×6]의 行列이 얻어진다.

마디번호	1	2	3	4	5	6←가지번호
①	1	1	0	0	0	0
②	−1	0	1	−1	0	0
③	0	0	0	1	−1	0
④	0	0	0	0	1	1
⑤	0	−1	−1	0	0	−1

이렇게 해서 얻어진 行列을 마디와 가지의 接續行列(node-to-branch incidence matrix), 또는 擴張接續行列(augumented matrix)이라 하며 A_a로 흔히 표시한다. 行列 A_a의 어느 列을 보든지 각 列마다 하나의 +1과 하나의 −1 要素를 가지며, 나머지 要素들은 零이다. 그도 그럴 것이, 어느 한개의 가지이든 꼭 두개의 마디 사이에 걸치게 놓여 있으니까, 한쪽 접속마디에 들어 오는 방향으로 접속되였다면 다른 접속마디에 대해서는 나가는 방향으로 반드시 접속될 것이고, 그

이외의 마디와는 전혀 접속되지 않을 것이 분명하다.

일반적으로 b개의 가지와 $n_t=(n+1)$개의 마디로 이루어진 回路網은 $[n_t\times b]$元의 Aa行列을 형성한다. 이 Aa行列은 回路素子들이 어떻게 접속되어 이루어진 回路網을 다룰려고 하는 것인지를 설명하는 한 방법이다.

Aa行列 중 어느 특정된 마디(일반적으로는 基準마디)에 대응되는 行要素들을 없애므로서 형성되는 $[(n_t-1)\times b]=[n\times b]$ 次元의 行列을 接續行列(reduced incident matrix) A라 한다.

2. KCL, KVL과 接續行列

그림 5와 같은 方向性그래프로 나타내어지는 回路網을 생각하자. 가지數는 $b=5$, 마디數는 $n_t=4$이다. 각 가지電流를 J_1, J_2, …… J_5라 하고, 이들로 이루어지는 가지電流벡터(brandr-current vector)를 다음과 같이 정의하자.

$$j=\begin{pmatrix} j_1\\ j_2\\ j_3\\ j_4\\ j_5\end{pmatrix}$$

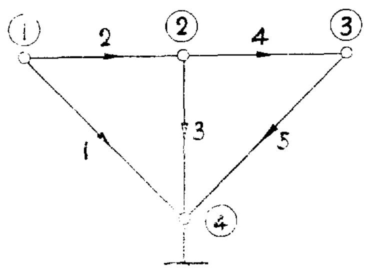

그림 5. 方向性 그래프

基準마디를 ④로 잡고 接續行列 A를 구하면

$$A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \begin{array}{c} ①\\ ②\\ ③\end{array}\\ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \end{array}$$

마디번호

1 2 3 4 5—가지번호

이제 Aj를 구하여 보면,

$$Aj=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1\\ j_2\\ j_3\\ j_4\\ j_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0 \qquad (1)$$

의 결과를 얻는다. 왜냐하면 각 마디 ①, ② 및 ③에 KCL를 적용하면,

$$\left.\begin{aligned} j_1+j_2&=0\\ -j_2+j_3+j_4&=0\\ -j_4+j_5&=0\end{aligned}\right\}$$

이를 行列로 표시한 것이 바로 식 (1)의 내용이다.

일반적으로 b개의 가지와 n_t개의 마디로 이루어지는 回路網에 대하여는 KCL을 적용하여 얻어지는 식들을 行列로 묶어 표시하면 다음과 같이 $n=(n_t-1)$개의 線型 獨立인 方程式群으로 묶인다.

$$Aj=0 \qquad (2)$$

이것이 接續行列로 표시된 KCL 표현이다.

그림 5의 回路網에 대해

$$A_aj=0 \qquad (3)$$

임을 증명할 수 있다. 즉 回路網에서 基準마디까지 포함시켜 가면서 KCL에 의한 마디方程式을 세우면

$$\left.\begin{aligned} j_1+j_2&=0\\ -j_2+j_3+j_4&=0\\ -j_4+j_5&=0\\ -j_1-j_3-j_5&=0\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

이를 行列로 표시하면

$$A_aj=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1\\ j_2\\ j_3\\ j_4\\ j_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0 \qquad (5)$$

식 (5)의 네개의 식 중 세개의 식만 線型 獨立性을 지닌 方程式群이다. 왜냐하면 예컨대, 식 (4)의 앞 세개의 식들을 더하면 네번째 식이 얻어진다. 바꾸어 말하면 식 (4) 중 하나의 식은 다른 세 식에 종속되어 있다. 解를 얻는데 필요한 것은 세개의 식뿐이다. 관례에 따라 基準마디에 대해 세운 마지막 方程式을 제외시켰다. 이것의 표현이 $Aj=0$으로 표시된다.

$Aj=0$가 變數 $j_1, j_2, \cdots\cdots, j_b$에 관해 n개의 線型獨立方程式을 포함한다는 뜻은 다른 말로는 $[n\times b]$의 接續行列 A는 "랭크(rank) n를 갖는다" 혹은 "full rank이다"라고 말하기도 한다.

이번에는 KVL과 接續行列과의 관계를 밝히기 위해 그림 5의 回路의 각 가지電壓 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_5$로 이루어지는 가지電壓벡터(branch voltage vector) V, 각 마디와 基準마디 사이의 電壓 e_1, e_2, e_3로 이루어지는 마디-基準마디電壓벡터(node-to-datum voltage vector) e를 다음과 같이 정의하자.

$$V=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{pmatrix} \qquad e=\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ e_3\end{pmatrix}$$

A^T를 接續行列 A의 轉置行列이라면

$$V=A^{T}e=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\0&1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$$

임을 밝힐 수 있다. 이것은 다음의 KVL의 내용을 표현한다. 즉

$$\left.\begin{aligned}v_1&=e_1\\v_2&=e_1-e_2\\v_3&=e_3\\v_4&=e_2-e_3\\v_5&=e_3\end{aligned}\right\}$$

일반적으로 KVL은, 가지電壓벡터 V와 마디—基準마디電壓벡터사이에 다음의 관계가 성립됨을 뜻한다. 즉,

$$V=A^{T}e \tag{6}$$

참고로 다음을 알아두자.

接續行列은 그래프의 나무의 총수를 계산하는데에 유용하게 쓰일 수 있다.

즉 어떤 그래프의 方向性그래프에서 接續行列을 A라 하면 그 그래프의 나무의 총수는,

$$\text{나무의 총수}=|AA^{T}| \tag{7}$$

3. 메슈行列과 KCL 및 KVL

어떤 回路網의 그래프가 그림 6에서와 같이 unhinged, 연결된 平面그래프로 나타내어졌다고 하자.

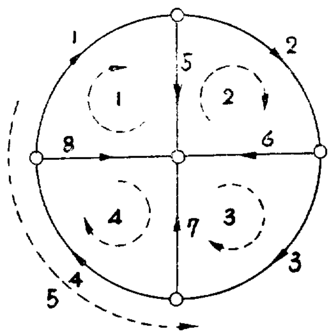

그림 6. 메슈行列의 구성을 보이는 그래프의 예

外向메슈까지 포함시켜 생각하면, 각가지마다 꼭 두개의 다른 메슈와 연관된다. 관례적으로 각 메슈의 正方向을 시계침이 도는 方向으로 잡고 外向메슈의 正方向만을 반시계침방향되게 잡도록 하자. 지금 어느 특정된 메슈를, 이렇게 택한 메슈의 방향에 따라 순회하면서. 이 메슈를 이루는데 관여된 가지가 메슈의 方向과 같은 方向으로 방향지워지면 +1, 反對方向으로 되어 있으면 −1, 또한 이 메슈를 형성하는데에 관여 되지 아니한 가지에 대응되는 자리에는 0값을 채워 가면서 다음과 같은 行列을 형성시켰다고 하자.

메슈번호 ↓ \ 가지번호 →	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	1	0	0	−1
2	0	1	0	0	−1	1	0	0
3	0	0	1	0	0	−1	1	0
4	0	0	0	1	0	0	−1	1
5	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0

어느 列을 보든 하나의 +1과 하나의 −1, 그 외의 列要素는 零이다.

일반적으로 그래프가 b개의 가지와 $(l+1)$개의 메슈(外向메슈를 포함해서)를 가지면 $[(l+1)\times b]$次元의 行列 M_a를 얻게 된다. 이 行列 M_a를 擴張메슈行列(augmented mesh matrix)이라 하면, M_a行列 중 어느 한 메슈번호에 대응되는 M_a의 行要素 전체를 지워서 형성되는 $[l\times b]$次元의 行列(일반적으로 外向메슈에 대응되는 行要素를 없앤다)을 그저 메슈行列(mesh matrix) M이라 한다. 그림 6의 回路網에 대해서는 앞에서 얻은 M_a行列 중 外向메슈 5에 대응되는 마지막 行要素들을 지우면 다음과 같은 M行列이 얻어진다.

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&-1\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

메슈行列과 KCL 및 KVL 사이의 관계를 밝히기 위하여, 어떤 回路網 N를 생각하자. 이 回路網은 連結 unhinged 된平面그래프로 표시된다고 생각한다. 그래프의 마디數를 n_t개, 가지數를 b개라 하면, 이 그래프는 $l=(b-n_t+1)$개의 메슈로 이루어진다(이때 外向메슈는 제외시켰다). 예컨대, 그림 7의 回路網에서는 $l=3$이다.

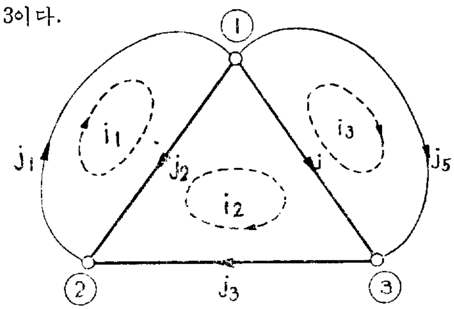

그림 7. $l=3$인 回路網

지금 가지電壓벡터 v를

$$V=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{pmatrix}$$

라 하고, M行列을 구하면

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

로 되며

$$Mv=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=0 \qquad (8)$$

가 됨을 밝힐 수 있다. 즉 각 메슈 1,2 및 3에 KVL를 적용시키면

$$\left.\begin{aligned}v_1+v_2&=0\\ -v_2+v_3+v_4&=0\\ -v_4+v_5&=0\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

즉, 식 (9)의 표현이 곧 식 (8)이다.

일반적으로는 b개의 가지와 n_t개의 마디로 연결된, unhinged 平面그래프로 표시되는 回路網에 대해서는

$$Mv=0 \qquad (10)$$

로 표시되는 l개의 線型 獨立인 回路方程式을 얻을 수 있음을 말한다.

이제 메슈行列과 KCL의 관계를 밝혀보자. i_1, i_2 및 i_3를 메슈電流라 하고, 편리상 이들 메슈電流의 正方向을 그림 7에서처럼 모두 時計針 도는 방향으로 잡는다면 각 가지電流 $j_1, j_2, \cdots\cdots, j_5$ 등은 다음 다섯개의 方程式에서와 같이, 각 메슈電流의 線型組合으로 표시될 수 있다.

$$\left.\begin{aligned}i_1&=i_1\\ j_2&=i_1-i_2\\ j_3&=i_2\\ j_4&=i_2-i_3\\ j_5&=i_3\end{aligned}\right\}$$

즉,

$$j=M^Ti=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{pmatrix}$$

일반적으로는 KCL이 표현하는 바는

$$j=M^Ti \qquad (11)$$

임을 뜻한다.

4. 基本루우프行列과 KVL, KCL

지금 b개의 가지와 n_t개의 마디로 형성되는 연결그래프에서, 임의로 택한 나무를 T라 한자. 이 그래프는 $n=(n_t-1)$개의 나무가지와 $l=(b-n)$개의 補木가지로 이루어졌을 것인데, 각 가지를 다음과 같은 차례로 번호를 붙이어 간다고 한다. 즉 補木가지를 먼저 1에서 부터 l까지 차례로 기번하고, 다음에는 나무가지를 $(l+1)$에서 b까지 차례로 기번한다고 한다. 基本루우프에는 각기 하나의 補木가지가 관여될 것이어서 전체적으로 補木가지數에 해당되는 $l=(b-n)$개의 基本루우프를 찾아낼 수 있다.

예컨대, 그림 8의 그래프에서는 $b=8$, $n_t=5$, $n=4$, $l=4$인 경우를 보여 준다. 補木가지의 方向과 같은 方向을 루우프의 正方向으로 잡으면서 KVL를 각 基本루우프에 적용하면,

루우프 1 : $v_1-v_5+v_6=0$

루우프 2 : $v_2+v_5-v_6+v_7+v_8=0$

루우프 3 : $v_3-v_6+v_7+v_8=0$

루우프 4 : $v_4-v_6+v_7=0$

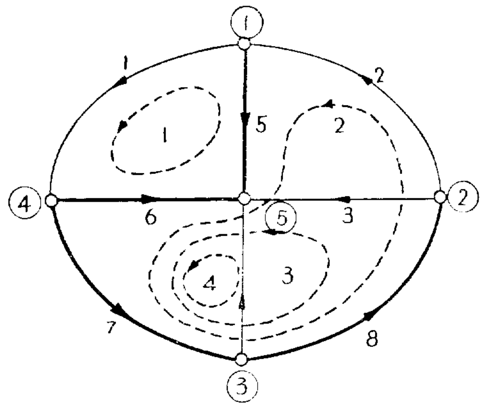

그림 8. 적정나무를 가진 그래프의 기본루우프

여기서 v_i들은 각 가지電壓을 나타낸다. 이것을 行列로 표시하면,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

즉, $Bv=0$ (12)

일반적으로는 l개의 基本루우프의 각각에 KVL를 적용하면 b개의 미지량의 가지電壓 $v_1, v_2, \cdots\cdots v_6$를 포함하는 l개의 線型 獨立性을 지닌 回路方程式群이 얻어진다. 이 $[l\times b]$次元의 B行列을 基本루우프行列(fundamental loop matrix)이라 한다. 각 基本루우프는 補木가지를 한개씩 만을 갖이며, 또한 루우프의 방향을 補木까지의 방향과 같도록 잡고는, 補木가지의 번호를 $1, 2, \cdots\cdots l$까지, 그리고 나무가지는 $(l+1), (l+2), \cdots\cdots, b$까지 기번하여 가면 基本루우프行列 B는 항상 다음과 같은 꼴로 정리되게 마련이다.

$$B=[I_l \vdots F] \tag{13}$$

여기서, I_l은 $[l\times l]$次元의 單位行列을, F는 $[l\times n]$의 行列이다. 行列 B는 $[l\times l]$次元의 單位行列을 갖이니까 B의 rank는 l임이 이해되며 KVL에서 얻어지는 $Bv=0$는 l개의 線型 獨立인 方程式群으로 이룰 것이 분명하다.

B行列과 KCL과의 관계를 설명하기 위하여, 앞 그림 8의 回路網에 대하여 루우프電流 i_1, i_2, i_3 및 i_4로서 각 가지電流를 표시하면 다음의 여덟 개의 方程式을 얻는다.

$$\begin{aligned} j_1&=i_1\\ j_2&=i_2\\ j_3&=i_3\\ j_4&=i_4\\ j_5&=-i_1+i_2\\ j_6&=i_1-i_2-i_3-i_4\\ j_7&=i_2+i_3+i_4\\ j_8&=i_2+i_3 \end{aligned}$$

이것을 行列로 표시하면

$$\begin{pmatrix} j_1\\ j_2\\ \vdots\\ \vdots\\ j_8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ -1&1&0&0\\ 1&-1&-1&-1\\ 0&1&1&1\\ 0&1&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4 \end{pmatrix}$$

즉 $j=B^Ti$ (14)

이것이 KCL이 나타내는 내용이다.

5. 基本컽세트行列과 KCL 및 KVL

그림 9의 그래프에서, 임의로 나무 T를 선정하여 두터운 線으로 표시하였다. 基本루우프行列을 만들 때와 같이 補木가지를 1에서 부터 l까지 먼저 기번하고, 다음에는 나무가지들을 $(l+1)$에서 부터 b까지 차례로 기번하여 간다. 基本컽세트는 단 하나의 나무가지만을 포함하는 컽세트이므로, 基本컽세트는 한개의 나무가지와 나머지는 補木가지로 이루어지는 컽세트를 말한다. 그림 9에는 이러한 基本컽세트를 표시하였다.

이 때 基本컽세트의 方向을, 基本컽세트속의 나무가지의 方向과 같은 方向이 되게끔, 각 基準方向을 택하도록 하여 가면서 KCL를 각 컽세트에 적용하면 다음의 네개의 方程式을 얻는다.

컽세트 1 : $j_1-j_2+j_5=0$

컽세트 2 : $-j_1+j_2+j_3+j_4+j_6=0$

컽세트 3 : $-j_2-j_3-j_4+j_7=0$

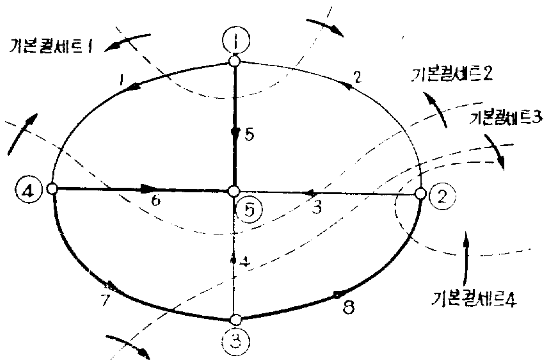

그림 9. 선정된 適正나무와 基本컽세트

컽세트 4 : $-j_2-j_3+j_8=0$

이것을 行列로 바꾸어 쓰면,

$$\begin{pmatrix} 1&-1&0&0&1&0&0&0\\ -1&1&1&1&0&1&0&0\\ 0&-1&-1&-1&0&0&1&0\\ 0&-1&-1&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1\\ j_2\\ \vdots\\ \vdots\\ j_8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

일반적으로는

$$Qj=0 \tag{15}$$

여기서는 Q는 $[n\times b]$次元의 行列이며 基本컽세트行列(fundamental cutset matrix)이라 한다. 다음과 같은 일반 꼴을 갖는다.

$$Q=[E \vdots I_n] \tag{16}$$

여기서, E는 $[n\times l]$次元이며, I_n는 $[n\times n]$次元의 單位行列을 뜻한다. 분명히 Q는 rank가 n이며 따라서 식 (15)는 KCL가 나타내는 n개의 獨立線型性을 지닌 方程式群을 나타낸다.

이제 KVL과의 관계를 밝히기 위하여 그림 9의 그래프를 다시 보자. 각 가지電壓은 각 나무가지電壓들의 線型組合으로 표시될 수 있다. 편리상 각 나무가지電壓을 $e_1, e_2, \cdots\cdots e_n$ 등으로 표시하고 그림 9의 그래프에 KVL를 적용하면

$$\left.\begin{aligned} v_1&=v_5-v_6=e_1-e_2\\ v_2&=-v_5+v_6-v_7-v_8=-e_1+e_2-e_3-e_4\\ v_3&=v_6-v_7-v_8=e_2-e_3-e_4\\ v_4&=v_6-v_7=e_2-e_3\\ v_5&=e_1\\ v_6&=e_2\\ v_7&=e_3\\ v_8&=e_4 \end{aligned}\right\}$$

이를 行列로 바꾸어 표시하면

$$v=Q^Te \tag{17}$$

이것이 KVL이 뜻하는 내용이다.