

速度制御를 對象으로 하는 系統의 最適制御

論 文
28~2~1

Optimal Control of Speed Regulating Systems

梁 興 錫* 李 鍾 浩**

(Heung Suk Yang, Chong Ho Lee)

Abstract

In this paper, a new method of the optimal control of the regulator and tracking control problem concerning the dimension of the velocity is derived and applied for the second order plant. The output position, output velocity and the control effort are plotted with time applying analog computer simulation. And it is compared with the output of the ordinary optimal control law in case the reference input is given by velocity function, and studied about the gain of this method.

1. 緒 論

어떤 시스템의 出力狀態를 原點으로 到達시키는 Regulator의 最適制御理論은 Kalman에 의하여 처음 紹介되었다. 그로부터 出力狀態를 任意的 원하는 값으로 到達시키는 Tracking Control 問題에까지 理論이 擴張되었는데 이러한 方法은 出力의 位置(x(t))를 制御對象으로 삼아서 그것을 指示值r(t)와 一致되도록 하는 制御(control)를 찾아내는 方法으로 最小化하고자 하는 目的函數(Performance Index)를 $J = \int_0^{t_f} [x(t) - r(t)]^T Q(t)[x(t) - r(t)] + u'(t)R(t)u(t) dt$ 로 잡아서 이를 最小로 하도록 制御하는 方法이다.¹⁾ 그러나 目的에 따라서는 最終時間에서 出力이 到達하는 位置는 考慮치 않고 速度만을 制御의 對象으로 할 경우 보다 經濟적인 解를 생각할 수 있다. 이 경우에 出力狀態x(t)를 願하는 函數 r(t)와 一致시키기 위하여 위의 方法을 適用하는 것보다 出力狀態의 速度 $\dot{x}(t)$ 를 E(t)(=r(t))에 一致되도록 하는 것이 目的을 滿足시키는데 더욱 유리할 것이다. 이 方法은 目的函數를

$J = \int_0^{t_f} [\dot{x}(t) - E(t)]^T Q(t)[\dot{x}(t) - E(t)] + u'(t)R(t)u(t) dt$ 로 잡아서 이를 最小로 함으로서 制御를 많이 소모하지 않으면서 出力의 速度를 願하는 速度에 가능한 한 빨리 一致시키도록 하는 方法이다.

本 論文에서는 위의 目的函數와 最適制御의 必要條件으로 부터 速度에 關한 Regulator와 Tracking Control 問題의 最適制御式을 誘導하였고 實際의 例에 適用하여 解를 求하고 또 analog 計算機를 사용하여 出力의 位置, 速度 및 制御 u의 時間의 變化를 알아 보았다. 그리고 出力의 速度를 一定值에 到達시키도록 制御하는 問題에 있어서 本 論文에서 提示한 方法과 現在 알려져 있는 方法[3]에 의한 結果를 比較하여 豫想대로의 差異가 나타남을 밝혔다.

2. 速度調整의 最適制御方式

어떤 시스템의 出力狀態의 微分値(速度)를 零으로만 들도록 制御하는데 있어서 所要時間(航續距離) 및 燃料消耗量을 考慮할 때 어떠한 制御를 행하여야 가장 經濟적인가를 생각하여 본다.

시스템의 狀態方程式을

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{1}$$

로 주고 目的函數를

$$J = \frac{1}{2} \dot{x}'(t_f)F\dot{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ \dot{x}'(t)Q(t)\dot{x}(t) + u'(t)R(t)u(t) \} dt$$

로 잡고 (1)式을 代入하면

$$J = \frac{1}{2} \{ [A(t_f)x(t_f) + B(t_f)u(t_f)]^T F [A(t_f)x(t_f) + B(t_f)u(t_f)] + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ [A(t)x(t) + B(t)u(t)]^T Q(t) [A(t)x(t) + B(t)u(t)] + u'(t)R(t)u(t) \} dt \} \tag{2}$$

*正會員: 서울대工大教授·工博(當學會長)

**正會員: 서울대大學院

接受日字: 1978年 11月 16日

이 되며 여기서 하밀토니안(Hamiltonian)은

$$H = \frac{1}{2} \{ [A(t)x(t) + B(t)u(t)]' Q(t) [A(t)x(t) + B(t)u(t)] + u'(t)R(t)u(t) \} + p'(t)A(t)x(t) + p'(t)B(t)u(t)$$

가 된다. 最適制御를 滿足시키기 위한 必要條件은^{1,4)}

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) \\ p^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -A'(t)Q(t)[A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t)] \\ &\quad - A'(t)p^*(t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} \triangleq 0 &= B'(t)Q(t)[A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t)] + R(t)u^*(t) \\ &\quad + B'(t)p^*(t) \\ &= B'(t)Q(t)A(t)x^*(t) + B'(t)p^*(t) + [B'(t)Q(t)B(t) \\ &\quad + R(t)]u^*(t) \end{aligned} \quad (4)$$

(4)식을 u^* 에 대하여 풀면

$$u^*(t) = -[B'(t)Q(t)B(t) + R(t)]^{-1} [B'(t)Q(t)A(t)x^*(t) + B'(t)p^*(t)] \quad (5)$$

(1), (3), (5)식을 $p^*(t)$ 에 대하여 풀 式을

$$p^*(t) \triangleq K(t)x^*(t)$$

라 하고¹⁾ (5)식에 代入하면

$$u^*(t) = -[B'(t)Q(t)B(t) + R(t)]^{-1} B'(t)[K(t) + Q(t)A(t)]x^*(t) \quad (7)$$

그런데

$$\begin{aligned} \dot{p}^*(t) &= \dot{K}(t)x^*(t) + K(t)\dot{x}^*(t) \\ &= \dot{K}(t)x^*(t) + K(t)[A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t)] \end{aligned} \quad (8)$$

이므로 (3), (8)식에 (5), (6), (7)식을 代入하면서 서로 比較하면 $k(t)$ 에 관한 다음 條件式을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= -K(t)A(t) - A'(t)K(t) - A'(t)Q(t)A(t) \\ &\quad + [K(t) + A'(t)Q(t)]B(t)[B'(t)Q(t)B(t) \\ &\quad + R(t)]^{-1} B'(t)[K(t) + Q(t)A(t)] \end{aligned} \quad (9)$$

이때, 境界條件은¹⁾

$$p^*(t_f) = A'(t_f) F A(t_f)x^*(t_f) \triangleq K(t_f)x^*(t_f)$$

이므로

$$K(t_f) = A'(t_f) F A(t_f) \quad (10)$$

이 된다.

結論적으로 (1)식의 狀態方程式으로 表示되는 시스템에서 出力의 速度($\dot{x}(t)$)를 零으로 만드는 最適制御式은 (7)식이며 여기서 K 는 (9)식을 滿足하는 값을 가진다.

3. 速度追跡의 最適制御方式

앞의 2에서의 概念을 速度에 관한 Tracking Control에 擴張하기로 한다.

2와 같이 주어진 시스템에서 出力의 速度를 $E(t)$ 로 만들되자 하면 目的函數는

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\dot{x}(t_f) - E(t_f)]' F [\dot{x}(t_f) - E(t_f)]$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ [\dot{x}(t) - E(t)]' Q(t) [\dot{x}(t) - E(t)] + u'(t)R(t)u(t) \} dt$$

와 같고 여기에 (1)식을 代入하면

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} [A(t_f)x(t_f) + B(t_f)u(t_f) - E(t_f)]' F [A(t_f)x(t_f) \\ &\quad + B(t_f)u(t_f) - E(t_f)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \{ [A(t)x(t) + B(t)u(t) - E(t)]' Q(t) [A(t)x(t) \\ &\quad + B(t)u(t) - E(t)] + u'(t)R(t)u(t) \} dt \end{aligned} \quad (11)$$

이다. 하밀토니안은

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \{ [A(t)x(t) + B(t)u(t) - E(t)]' Q(t) [A(t)x(t) \\ &\quad + B(t)u(t) - E(t)] + u'(t)R(t)u(t) \} + p'(t)A(t)x(t) \\ &\quad + p'(t)B(t)u(t) \end{aligned}$$

이 Costate Equation은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{p}^*(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -A'(t)Q(t)[A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) \\ &\quad - E(t)] - A'(t)p^*(t) \end{aligned} \quad (12)$$

最適制御 $u^*(t)$ 는 H 를 最小로 하므로

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} \triangleq 0 &= B'(t)Q(t)[A(t)x^*(t) + B(t)u^*(t) - E(t)] \\ &\quad + R(t)u^*(t) + B'(t)p^*(t) \end{aligned}$$

$u^*(t)$ 에 대해서 풀면 다음 式을 얻는다.

$$u^*(t) = -[B'(t)Q(t)B(t) + R(t)]^{-1} B'(t)[Q(t)A(t)x(t) - Q(t)E(t) + p^*(t)] \quad (13)$$

(1), (12), (13)식에서 求한 $p^*(t)$ 를

$$p^*(t) \triangleq K(t)x^*(t) + S(t)$$

라 놓고¹⁾ (13)식에 다시 代入하여

$$u^*(t) = -[B'(t)Q(t)B(t) + R(t)]^{-1} B'(t) \{ [K(t) + Q(t)A(t)]x(t) + S(t) - Q(t)E(t) \} \quad (15)$$

이 된다. 여기서 $K(t)$ 및 $S(t)$ 에 관한 條件式을 求하기 위하여 (14)식과 (12)식에 (1), (14), (15)식을 代入하여 서로 比較함으로써 다음의 두 式을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= -K(t)A(t) - A'(t)K(t) - A'(t)Q(t)A(t) + [K(t) \\ &\quad + A'(t)Q(t)]B(t)[B'(t)Q(t)B(t) + R(t)]^{-1} B'(t) \\ &\quad [K(t) + Q(t)A(t)] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -[A'(t) - [K(t) + A'(t)Q(t)]B(t)[B'(t)Q(t)B(t) \\ &\quad + R(t)]^{-1} B'(t)] \cdot [S(t) - Q(t)E(t)] \end{aligned} \quad (17)$$

이 때 境界條件은¹⁾

$$\begin{aligned} p^*(t_f) &= A'(t_f) F A(t_f)x^*(t_f) - A'(t_f) F E(t_f) \\ &\triangleq k(t_f)x^*(t_f) + S(t_f) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} K(t_f) &= A'(t_f) F A(t_f) \\ S(t_f) &= -A'(t_f) F E(t_f) \end{aligned}$$

이 된다. 이것들을 요약하면 (1)식의 狀態방정식으로 表示되는 시스템에서 (11)식으로 주어진 目的函數를 最小로 하면서 出力의 速度 $[\dot{x}(t)]$ 를 指示函數 $E(t)$ 에

致시키는 最適制御式은 (15)式으로 나타내지며 여기서 K 와 S 는 (16), (17)式을 滿足한다.

4. 實際의 2次系의 適用

(1) 傳達函數가 $\frac{b}{s(s+a)}$ 로 주어진 플랜트에서 出力의 速度 $\dot{x}_1(t)$ 를 零으로 하여 停止시키고자 하는 問題의 最適制御解를 求해보면 다음과 같다.

狀態方程式은

$$\dot{x}_1(t) = bx_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -ax_2(t) + u(t)$$

이고, 目的函數는

$$J = \int_0^{\infty} (\dot{x}_1^2(t) + \lambda u^2(t)) dt$$

이다. (7), (9)式을 適用하려면

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = 2\lambda$$

가 되고, 또한²⁾

i) 플랜트가 완전히 可制御(completely controllable)이고

ii) $F=0$

iii) A, B, R, Q 가 常數行列이므로 $t_f \rightarrow \infty$ 일 때 $K(t)$ 는 K (常數行列)가 된다. 그러므로, 충분히 큰 T 에서 近似的으로 $\dot{K}=0$ 로 생각하여 (9)式을 適用하면

$$\dot{K} = 0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda}K_{12}^2 & \frac{1}{2\lambda}K_{12}K_{22} - bK_{11} + aK_{12} \\ \frac{1}{2\lambda}K_{12}K_{22} - bK_{11} + aK_{12} \\ \frac{1}{2\lambda}K_{22}^2 - 2bK_{12} + 2aK_{22} - 2b^2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\therefore K_{11} = K_{12} = 0$$

$K > 0$ 의 조건으로

$$K_{22} = 2\lambda \left(-a + \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{\lambda}} \right) \quad (19)$$

이것들을 (7)式에 代入하면

$$u^*(t) = \left(a - \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{\lambda}} \right) x_2(t)$$

가 된다. $a=5, b=7, \lambda=0.1$ 인 境遇를 생각하면

$$u^*(t) = -17.7x_2(t) \quad (20)$$

가 되고 analog 計算機에서 系統의 狀態方程式과 위의 (20)式의 結果를 그림 1과 같이 結線하여 $x_1(t), x_2(t), u^*(t)$ 의 時間的 變化를 圖示하면 그림 2와 같이 나타낸다.

(2) (1)의 問題에서 플랜트의 出力의 速度 $\dot{x}_1(t)$ 를 v 에 到達시키는 最適制御式을 求하면 目的函數는 다음과 같다.

$$J = \int_0^T \{ (\dot{x}_1(t) - v)^2 + \lambda u^2(t) \} dt$$

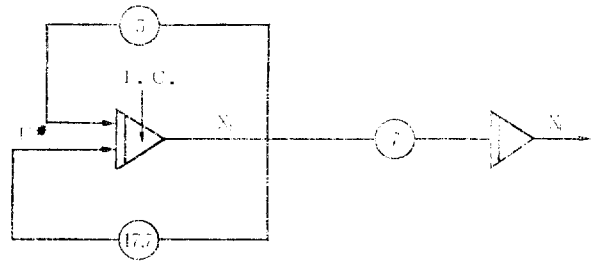


그림 1 4. (1)문제에의 analog 計算機結線

Fig. 1. Analog computer set-up of the problem of section 4. (1)

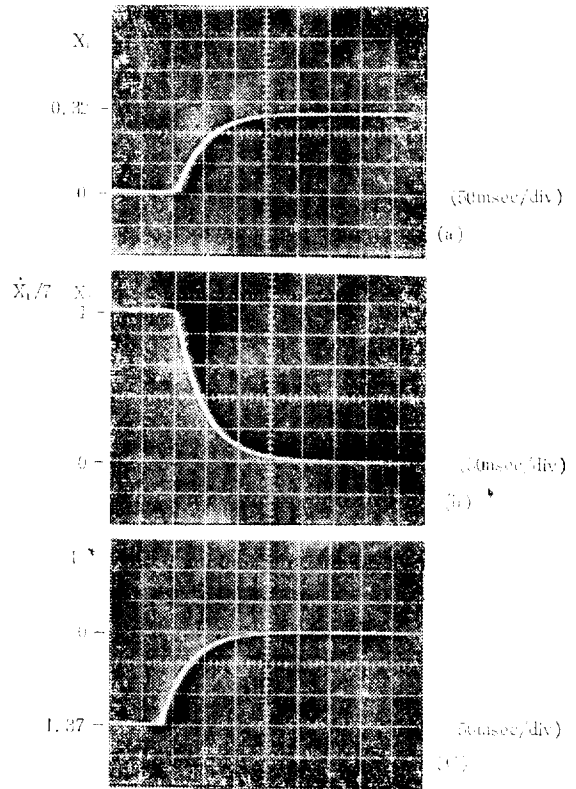


그림 2. 4(1)문제에의 $x_1(t), \dot{x}_1(t), u^*(t)$ 의 時間的 變化
Fig. 2. Time variation of $x_1(t), \dot{x}_1(t), u^*(t)$ of problem 4. (1).

(15), (16), (17)式에 適用하기 위하여는 各 行列의 實際값은

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = 2\lambda$$

$$E = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$$

이 된다. 또, (9)式과 (16)式은 一致하므로 K 는 (1)에서 求한 (18), (19)式과 같아진다. 그러므로 (17)式

을 適用하여 다음 式을 얻는다.

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda} K_{11} S_2 \\ b(2v - S_1) + \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{\lambda}} S_2 \end{pmatrix}$$

여기서 v 가 時不變(time-invariant)이고 T 가 充分히 크면 近似的으로

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = \frac{-2v}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{1}{\lambda}}}$$

이 되어 (15)式에 代入하면

$$u^*(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{1}{\lambda}}} - \left(\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{\lambda}} - a\right) x_2(t) \quad (21)$$

가 된다.

$$a=5, b=7, \lambda=0.1, v=1$$

인 경우에

$$u^*(t) = 3.08 - 17.7x_2(t) \quad (22)$$

가 되고 愛날로그 計算機에 의하여 시스템을 시뮬레이션하고 그의 出力狀態를 가지고 (22)式에 의한 制御器를 構成하면 그림 3과 같다. 그리고 이의 出力 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u^*(t)$ 의 時間的 變化를 初期條件($\dot{x}_1(0)$)으로서 두 가지로 주었을 境遇에 圖示하면 그림 4와 같이 나타난다.

5. 檢討 및 比較

(1) 檢討

④의 (2)에서 取扱한 問題는 出力의 速度 $\dot{x}_1(t)$ 를 v 에 一致시키는 것이다. 그런데 狀態方程式에서 $\dot{x}_1(t) = bx_2(t)$ 이므로 $bx_2(t)$ 를 v 에 一致시키도록 하는 問題와 等價이다. 그러므로 이 問題를 다음의 잘 알려진 optimal tracking control law²⁾에 適用하여 풀어서 結果를 確認하여 보기로 한다.

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)K(t)x(t) - R^{-1}(t)B'(t)S(t) \quad (23)$$

여기서 K 와 S 는 다음 式을 滿足하여야 한다.

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A'(t)K(t) - c'(t)Q(t)c(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)K(t) \quad (24)$$

$$\dot{S}(t) = -[A'(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)]S(t) + c'(t)Q(t)r(t) \quad (25)$$

위의 式을 適用하기 위하여 各 行列의 實際값을 알아보면

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad R = 2\lambda \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

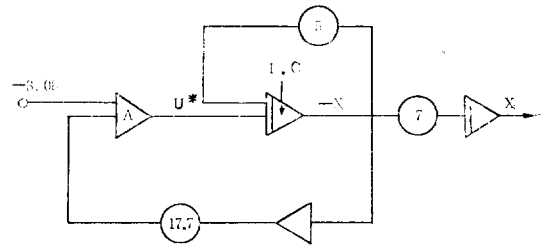


그림 3 4. (2) 문제의 愛날로그 計算機結線
Fig. 3. Analog computer set-up of the problem of section 4. (2)

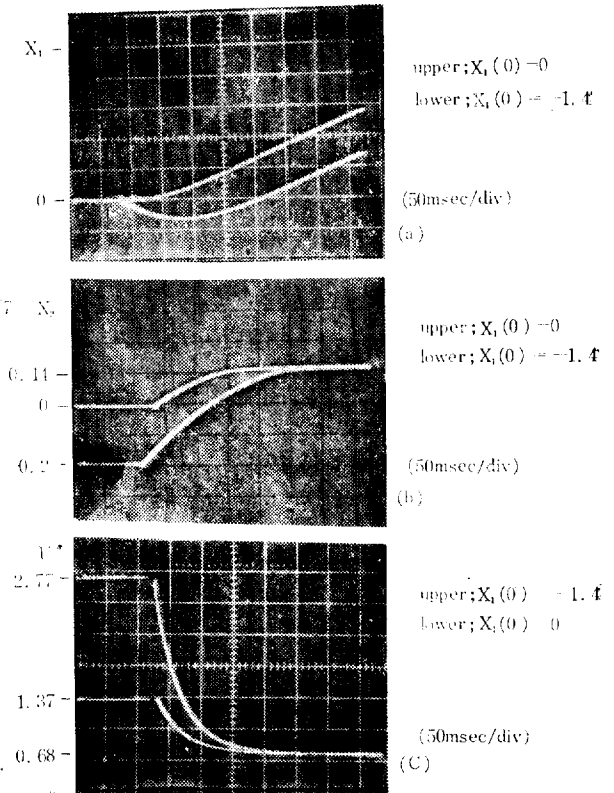


그림 4. 4. (2) 문제의 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u^*(t)$ 의 時間的 變化
Fig. 4. Time variation of $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u^*(t)$ of problem 4. (2)

이므로 (24), (25)式에 代入하여 K 및 S 를 구하고 그것을 (23)式에 代入하면

$$u^*(t) = (a - \sqrt{a^2 + b^2/\lambda})x_2(t) + v/\lambda \left(1/\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{1}{\lambda}}\right)$$

이 된다. 이는 4의 (2)에서 구한 (21)式과 一致되어이 境遇의 例에서 두가지 方法의 結果가 豫想대로 같아짐을 알 수 있다.

(2) 比較

4의 (2)의 問題를 (23), (24), (25)式으로 나타나는 既存의 optimal tracking control law에 의하여 指示函數를 vt로 주어서 速度를 制御하는 結果와 比較하여 그 利得을 確認하여 보기로 한다.

目的函數는

$$J = \int_0^T \{ (x_1(t) - vt)^2 + \lambda u^2(t) \} dt$$

이 되며 (23), (24), (25)式을 適用하기 위하여 各行列의 實際값을 알아보면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = 2\lambda, \quad r(t) = \begin{bmatrix} vt \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

이것들을 (24), (25)式에 適用하고

$$a=5, \quad b=7, \quad \lambda=0.1, \quad v=0.84$$

로 하면

$$K_{11} = 0.752$$

$$K_{12} = 0.665$$

$$S_1 = -0.633t - 0.163$$

$$S_2 = -0.531t - 0.202$$

이다. 그러므로 (23)式에 의하여 最適制御式은

$$u^*(t) = -3.16x_1(t) - 3.32x_2(t) - 2.63t - 1 \quad (26)$$

이 된다. 애날로그計算機로 系統의 狀態方程式과 (26)式을 그림 5와 같이 結線하고 $x_1(t), x_2(t), u^*(t)$ 의 時間的變化를 두가지 初期條件을 주었을 境遇에 圖示하면 그림 6과 같이 나타난다.

그림 4는 系統의 出力의 速度를 制御하는데 있어서 本論에서 誘導한 方式인 出力의 微分値를 直接制御의 對象으로 삼아서 구한 最適制御式의 結果이고 그림 6은 같은 系統에서 速度를 制御하는데 既存의 方

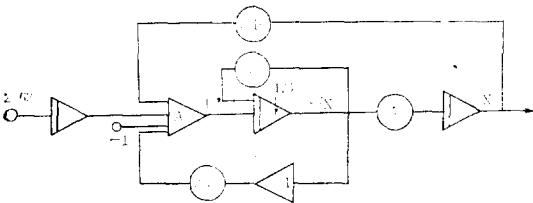


그림 5. 기존의 방법에 의해서 풀이한 4. (2) 문제의 애날로그 계산기 결선

Fig. 5. Analog computer set-up of the problem of section 4. (2) applying ordinary optimal control Law.

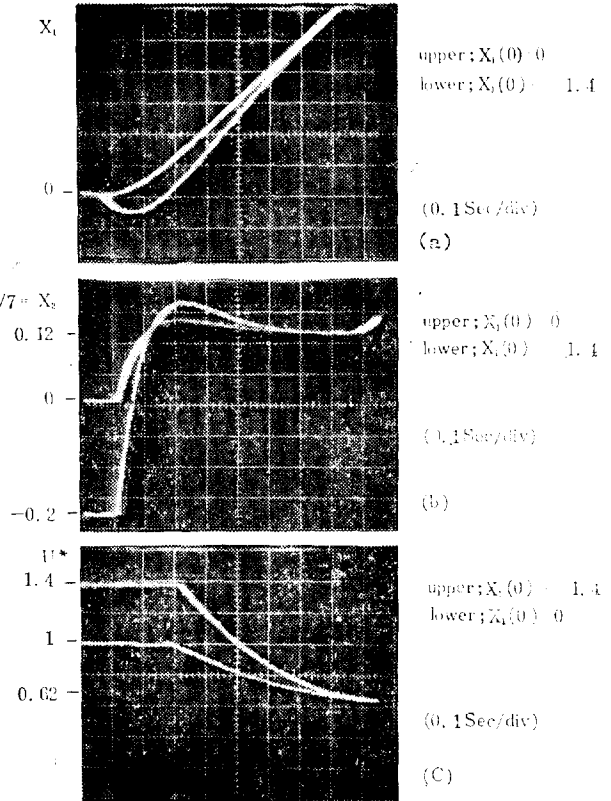


그림 6. 기존의 방법에 의해서 풀이한 4. (2) 문제의 $x_1(t), \dot{x}_1(t), u^*(t)$ 의 時間的變化
Fig. 6. Time variation of $x_1(t), \dot{x}_1(t), u^*(t)$ of fig 5.

式인 出力의 位置를 指示函數 $r(t)=vt$ 와 一致시키도록 最適制御한 結果이다.

$x_1(t)$ 의 速度를 制御하는데 있어서 最終의 速度만이 考慮의 對象이 되고 最終時間에서의 位置는 無關할 때 出力의 位置인 $x_1(t)$ 를 $r(t)$ 에 近接시키는 方法과 直接 그 微分値 $\dot{x}_1(t)$ 를 v 에 近接시키는 方法의 結果를 比較하여 본다. 그림 4는 $x_1(t)$ 의 기울기 ($\dot{x}_1(t)$)가 一定値에 到達할 때 까지만 御制 $u(t)$ 가 加해졌다. 그러나 그림 6은 位置까지 $r(t)$ 에 一致시키기 위하여 $\dot{x}_1(t)$ 에 오버슈트(overshoot)가 생기고 $x_1(t)$ 에 變曲點이 생기도록 制御되며 따라서 control effort가 많이 所要되고 時間이 많이 걸리게 됨을 알 수 있다.

6. 結 論

系統의 出力의 速度를 制御하는데 있어서 位置를

對象으로 하여 速度를 制御하는 것보다 直接 速度를 制御對象으로 삼아서 誘導한 最適制御方式은 最終時間에서의 位置에 無關하게 되고 速度의 오버슈우트라는 浪費가 不必要하고 또 位置制御에서 發生하는 定常誤差를 考慮하지 않아도 되는 등 目的을 위한 最小限의 댓가만을 支拂하면서 速度를 制御하게 된다. 즉 目的函數를 出力의 微分値 $\dot{x}(t)$ 로써 構成함으로서 앞의 5의 比較에서 나타나듯이 制御에 所要되는 時間과 燃料을 훨씬 줄일 수 있었다.

本 論文에서 出力의 一次 微分値로 目的函數를 構成 하므로써 速度의 制御를 有利하게 할 수 있음을 보였 듯이 앞으로 2次 微分値로서 加速度의 制御 또는 一般 的으로 出力의 n 次 微分値를 直接 制御하는 方法과 그 的 應用까지 생각할 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

[1] Kirk, Donald E. "Optimal Control Theory" Prentice-Hall, Inc. 1970. p. 209, pp. 210~211, pp. 219~220.
 [2] Kalman, R.E. "Contributions to the Theory of Optimal Control" Bol. Soc. Mat. Mex. (1960). pp. 102~119.
 [3] Athans, Michael. "Optimal Control" McGraw-Hill Book Company, 1966.
 [4] Lang, Serge. "Linear Algebra" 2nd Edition. Add-son-Wesley Publishing Comp. New York 1970
 [5] Hyndman, D.E. "Analog and Hybrid Computing" Pergamon Press. 1970.

<附錄 A>

(3)式에 (5)式과 (6)式을 代入하여 $x^*(t)$ 項으로 묶으면

$$\begin{aligned} \dot{p}^*(t) &= -A'(t)Q(t)A(t)x^*(t) + A'(t)Q(t)B(t)[B'(t)Q(t) \\ &\quad B(t) + R(t)]^{-1} \cdot [B'(t)Q(t)A(t)x^*(t) + B'(t) \\ &\quad K(t)x^*(t)] \\ &= \{-A'(t)Q(t)A(t) + A'(t)Q(t)B(t)[B'(t)Q(t) \\ &\quad B(t) + R(t)]^{-1} \cdot B'(t)[Q(t)A(t) + K(t)] \\ &\quad - A'(t)K(t)\} x^*(t) \end{aligned} \quad \text{㉑}$$

이 되고 (8)式에 (7)式을 代入하여 $x^*(t)$ 項으로 묶으면

$$\begin{aligned} \dot{p}^*(t) &= K(t)x^*(t) + K(t)A(t)x^*(t) - K(t)B(t)[B'(t) \\ &\quad Q(t)B(t) + R(t)]^{-1} \cdot [B'(t)Q(t)A(t)x^*(t) + B'(t) \\ &\quad K(t)x^*(t)] \\ &= \{\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)[B'(t)Q(t)B(t) \\ &\quad + R(t)]^{-1} B'(t) \cdot [Q(t)A(t) + K(t)]\} x^*(t) \end{aligned} \quad \text{㉒}$$

㉑와 ㉒를 比較하여 K 의 條件式을 求하면 ㉓式을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= -K(t)A(t) - A'(t)K(t) - A'(t)Q(t)A(t) + [K(t) \\ &\quad + A'(t)Q(t)]B(t)[B'(t)Q(t)B(t) + R(t)]^{-1} B'(t) \\ &\quad [K(t) + Q(t)A(t)] \end{aligned} \quad \text{(9)}$$

<附錄 B>

(14)式을 微分하여 (1)式과 (15)式을 代入하여 整理하면

$$\begin{aligned} \dot{p}^*(t) &= \dot{K}(t)x^*(t) + K(t)x^*(t) + S(t) \\ &= \dot{K}(t)x^*(t) + K(t)A(t)x^*(t) + K(t)B(t)u^*(t) \\ &\quad + \dot{S}(t) = K(t)x^*(t) + K(t)A(t)x^*(t) - K(t)B(t) \\ &\quad [B'(t)Q(t)B(t) + R(t)]^{-1} B'(t) \cdot \{ [K(t) \\ &\quad + Q(t)A(t)]x(t) + S(t) - Q(t)E(t) \} + \dot{S}(t) \\ &= \{\dot{K}(t) + K(t)A(t) - K(t)B(t)[B'(t)Q(t)B(t) \\ &\quad + R(t)]^{-1} B'(t)[K(t) + Q(t)A(t)]\} x^*(t) \\ &\quad - K(t)B(t)[B'(t)Q(t)B(t) + R(t)]^{-1} B'(t)[S(t) \\ &\quad - Q(t)E(t)] + \dot{S} \end{aligned} \quad \text{㉓}$$

이 되며 또 (12)式에 (14), (15)式을 代入하여 $x^*(t)$ 項으로 묶으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{p}^*(t) &= -A'(t)Q(t)\{A(t)x^*(t) - B(t)[B'(t)Q(t)B(t) \\ &\quad + R(t)]^{-1} B'(t) \cdot [K(t) + Q(t)A(t)]x(t) + S(t) \\ &\quad - Q(t)E(t)\} - E(t) - A'(t)[K(t)x^*(t) + S(t)] \\ &= -\{A'(t)Q(t)[A(t) - E(t)[B'(t)Q(t)B(t) \\ &\quad + R(t)]^{-1} B'(t)(K(t) + Q(t)A(t))\} \\ &\quad + A(t)K(t)\} x^*(t) + A(t)Q(t)\{B(t)[B'(t)Q(t) \\ &\quad B(t)]^{-1} B'(t)[S(t) - Q(t)E(t)] - E(t)\} - A'(t)S(t) \end{aligned} \quad \text{㉔}$$

㉓式과 ㉔式은 $x^*(t)$ 에 對하여 항상 成立하므로 各 項끼리 서로 比較하여 K 와 S 에 關한 다음의 條件式을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= -K(t)A(t) - A'(t)K(t) - A'(t)Q(t)A(t) + [K(t) \\ &\quad + A'(t)Q(t)]B(t) \cdot [B'(t)Q(t)B(t) + R(t)]^{-1} B'(t) \\ &\quad [K(t) + Q(t)A(t)] \end{aligned} \quad \text{(16)}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -\{A'(t) - [K(t) + A'(t)Q(t)]B(t)[B'(t)Q(t)B(t) \\ &\quad + R(t)]^{-1} B'(t)\} \cdot [S(t) - Q(t)E(t)] \end{aligned} \quad \text{(17)}$$