大韓機械學會論文集 第3巻 第4號 pp. 181～184, 1979.

<論 文>

평면벽에 接한 球의 運動에 의한 3차원의 Potential 흐름

金 文 彦*

(1979年 8月 22日 接受)

Three-Dimensional Potential Flow Due to the Motion of a Sphere Touching a Plane Wall

Moon-Uhn Kim

Abstract

Three-dimensional potential flow due to the translation of a sphere touching a rigid plane wall or a free wall is investigated by use of tangent sphere coordinates. Exact expresssions for the velocity potential are derived in integral forms. Added mass and lift force on the sphere are also calculated.

I. 緒 論

流體內에서 어떤 粒子가 運動할 때, 그 粒子의 運動에 미치는 다른 粒子 또는 境界面의 영향을 고찰하는 것은 多相流動(multi-phase flow), 分散系(suspension)의 力學, 熱傳達, 生體流體力學(physiological fluid dynamics)等 여러 分野의 硏究에서 대단히 중요하다. 이들 흐름에서 나타나는 Reynolds 數는 대단히 작은값 ($\leq 10^{-4}$)에서 큰 값 ($\geq 10^4$)에 이르기까지 넓은 범위에 걸쳐있다. Reynolds 數가 크고, 流體內의 物體가 微小振動을 할 때처럼 境界層의 剝離가 無視될 수 있을 때에는 흐름을 potential 흐름으로 取扱할 수 있다.[1]

本硏究에서는 平面境界面에 接한 球가 그 平面에 平行하게 움직일 때 誘起되는 3次元的인 potential 흐름에 관하여 解析한다. 하나의 平面을 境界面으로 한 半無限流體內에서의 球의 運動에 의한 potential 흐름에 관한 연구는 Stokes[2]가 境界面에서 멀리 떨어져 있는 球의 運動을 image의 方法을 써서 近似的으로 고찰한 以來最近에 이르기 까지 活潑히 行해지고 있다. 즉, Weihs & Small[3], Kim & Lee[4], Bentwich & Miloh[5]는 球가 境界面에 수직하게 움직일 때의 軸對稱 potential 흐름을, Small & Weihs[6], Morrison[7], Jeffrey & Chen[8]은 境界面에 接한 球가 境界面에 수직하게 움직일 때의 흐름을 적당한 座標系를 써서 엄밀하게 求하였다. 그러나 Stokes의 近似的인 硏究를 제외하고는 지금까지의 硏究는 軸對稱의 흐름에 限定되어 있다.

II. 速度 Potential의 表現

平面境界面에 接한 半徑 a의 球가 平面에 平行하게 並進速度 V로 움직일 때의 非壓縮性 potential 흐름을 생각하자. 이 때의 흐름은 3次元的이므로 軸對稱의 경우[4,5]와 같이 하나의 stream function으로는 記述할 수 없기 때문에 주어진 境界條件을 만족하는 速度 potential을 求한다.

球와 平面이 接하고 있을 때, 보다 一般的으로 두 球가 接하고 있을 때의 흐름을 求하는 문제에서는 tangent sphere coordinates(η, ν, θ)[9]를 使用하는 것이 편리하다. 이 座標系와 cartesian coordinates(x, y, z)間의 관계는 다음과 같이 주어진다. (Fig. 1):

$$x=\frac{\eta}{\eta^2+\nu^2}\cos\theta,\quad y=\frac{\eta}{\eta^2+\nu^2}\sin\theta,$$

$$z=\frac{\nu}{\mu^2+\nu^2}, \tag{1}$$

$$(0<\mu<\infty,\ -\infty<\nu<\infty,\ 0\leq\theta<2\pi).$$

*正會員, 韓國科學院 機械工學科

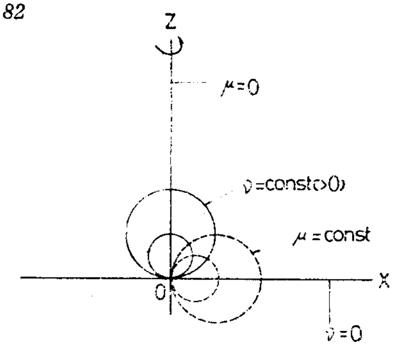

Fig. 1. Tangent sphere coordinates

여기서 球와 平面과의 接點을 座標原點으로, 球가 움직이는 方向을 x軸으로 擇했다.

Tangent sphere coordinates에서 $\nu=0$은 $z=0$의 平面을 $\nu=\text{const}(>0)$는 軸上 $z=1/(2\nu)$에 中心을 갖는 直徑 $1/\nu$의 球를 나타내므로 우리가 고려하는 흐름의 영역은

$$0<\mu<\infty,\quad 0<\nu<\nu_0,\quad 0\leq\theta<2\pi \tag{2}$$

(단 $\nu_0=1/(2a)$)로 주어진다.

한편 速度 potential $\phi(\mu,\nu,\theta)$는 Laplace 方程式을 만족한다. Tangent sphere coordinates에서는 Laplace 方程式은

$$\nabla^2\phi=\frac{(\mu^2+\nu^2)^4}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\mu}{\mu^2+\nu^2}\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\mu}{\mu^2+\nu^2}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)\right]+\frac{(\mu^2+\nu^2)^2}{\mu^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}=0 \tag{3}$$

으로 주어진다.[9)]

速度 potential이 만족해야 할 境界條件은

(i) 無限遠에서 流體는 靜止狀態에 있으므로

$$\phi\to 0 \text{ as } \mu^2+\nu^2\to 0 \tag{4}$$

(ii) 球面上에서 流體의 法線速度가 球의 法線速度와 같아야 하므로

$$(\mu^2+\nu^2)\frac{\partial\phi}{\partial\nu}=-V\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}\cos\theta \text{ at } \nu=\nu_0 \tag{5}$$

(iii) $\nu=0$의 平面上에서

(a) $(\mu^2+\nu^2)\dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}=0$ (固體境界面의 경우) (6a)

또는

(b) $\phi=0$ (自由境界面의 경우*) (6b)

* 境界條件 (6a)는 $\nu=0$에서 壓力이 一定하다는 條件(自由表面의 條件)에 對應하지는 않으나 壓力은 球와 平面과의 接點으로 부터의 거리에 따라 급격히 감소한다는 것을 알 수 있으므로 $\nu=0$을 自由境界面으로 이름 부쳤다.[5)]

境界條件 (6b)는 서로 接하고 있는 半徑이 같은 2개의 球가 그 中心軸에 수직하게 反對方向으로 같은 速度로 움직일 때의 경우에 對應한다. 또 條件 (6a)는 球가 固體壁에 接하여 움직일 때 또는 크기가 같은 2球가 같은 方向으로 같은 速度로 움직이는 경우에 對應한다

境界條件 (3)과 (6)을 만족하고, (2)에서 주어진 흐름의 領域에서 有限한 Laplace 方程式의 解는 變數分離의 方法을 쓰면 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다[9)].

$$\phi_R=V(\mu^2+\nu^2)^{1/2}\cos\theta\int_0^\infty A(s)\cosh s\nu\, J_1(s\mu)\,ds \tag{7a}$$

$$\phi_F=V(\mu^2+\nu^2)^{1/2}\cos\theta\int_0^\infty B(s)\sinh s\nu\, J_1(s\mu)\,ds \tag{7b}$$

여기서 $J_1(s\mu)$는 Bessel 函數이고 下添字 R과 F는 各各 境界面이 固體(rigid) 또는 自由(free)일 때를 나타낸다. 또 未定常數 $A(s)$ 및 $B(s)$는 球面上에서 境界條件 (5)를 만족하도록 決定해야 한다. 式 (7)을 (5)에 代入하고 Bessel 函數의 漸化式[10)]

$$\mu J_1(s\mu)=-\frac{d}{ds}J_0(s\mu),$$

$$\mu sJ_0(s\mu)=\frac{d}{ds}[sJ_1(s\mu)]$$ 와 積分公式[10)]

$$\frac{\mu}{(\mu^2+\nu^2)^{3/2}}=\int_0^\infty se^{-s\nu}J_1(s\mu)ds \qquad (\nu>0)$$

를 使用하고 部分積分을 行하면 $A(s)$ 및 $B(s)$는 다음의 方程式을 만족한다는 것을 알 수 있다.

$$\frac{d^2A}{ds^2}+\left(2\nu_0\coth s\nu_0+\frac{1}{s}\right)\frac{dA}{ds}-\frac{1}{s^2}A=2\nu_0\ (\coth s\nu_0-1), \tag{8a}$$

$$\frac{d^2B}{ds^2}+\left(2\nu_0\tanh s\nu_0+\frac{1}{s}\right)\frac{dB}{ds}-\frac{1}{s^2}B=2\nu_0\ (1-\tanh s\nu_0), \tag{8b}$$

式 (8)을 얻는데에는 $A(s)$와 $B(s)$가 各各 다음의 漸近樣狀을 갖는다고 假定하였다.

$$\begin{aligned}&A(s)=o(s^{-2}),\ B(s)=o(s^{-1}),\ \text{as } s\to 0:\\&A(s)=o(e^{-s\nu_0}),\ B(s)=o(e^{-s\nu_0}),\ \text{as } s\to\infty.\end{aligned} \tag{9}$$

여기서 "o", "o"는 Landau의 order symbol을 나타낸다. 漸近樣狀 (9)는 速度 potential이 積分表現 (7)로 表示되기 爲한 充分條件이다.

計算을 간단히 하기 爲해 다음의 變數變換을 行한다.

$$s\nu_0=\sigma,$$

$$A(s)=\frac{2}{\nu_0}\sigma(\coth\sigma-1)\ F(\sigma), \tag{10}$$

$$B(s)=\frac{2}{\nu_0}\sigma(1-\tanh\sigma)\ G(\sigma).$$

無次元 未知函數 $F(\sigma)$와 $G(\sigma)$가 만족하는 方程式은

$$\frac{d^2F}{d\sigma^2}+\left(\frac{3}{\sigma}-2\right)\frac{dF}{d\sigma}-\frac{1}{\sigma}(3+\coth\sigma)F=\frac{1}{\sigma}, \quad (11a)$$

$$\frac{d^2G}{d\sigma^2}+\left(\frac{3}{\sigma}-2\right)\frac{dG}{d\sigma}-\frac{1}{\sigma}(3+\tanh\sigma)G=\frac{1}{\sigma} \quad (11b)$$

우리가 찾는 解 $F(\sigma)$와 $G(\sigma)$는 漸近樣狀 (9)를 만족해야 한다. 이러한 解를 closed form으로 얻는 것이 不可能하였으므로 다음과 같이 數値的으로 解를 求했다.

微分方程式 (11a)의 特殊解를 F_p, 齊次方程式의 獨立解를 $F_c^i(i=1,2)$라 하면 $\sigma\ll1$ 때

$$F_p=\frac{\sigma}{2}+\cdots,\quad F_c^1=\sigma^{\sqrt{2}-1}+\cdots,\quad F_c^2=\sigma^{\sqrt{2}-1}+\cdots \quad (12)$$

의 級數展開를 갖는다는 것을 微分方程式의 級數解를 構成함으로써 쉽게 알 수 있다. 따라서 우리가 求하는 解 $F(\sigma)$는 (9)를 고려하면

$$F=F_p+CF_c^1 \quad (C:\text{常數}) \quad (13)$$

으로 주어진다. F_p와 E_c^i의 數値解는 (11a) 및 (11a)의 右邊을 0으로 둔 齊次方程式을 初期條件 (12)를 써서 構成한다. 한편 $\sigma\gg1$ 때 條件 (a)를 만족하는 解 $F(\sigma)$는

$$F=-\frac{1}{4}+\frac{C'}{\sigma^2}+\cdots \quad (C':\text{常數}) \quad (14)$$

의 漸近形을 가져야 한다는 것을 微分方程式 (11a)에서 알 수 있다. 따라서 (13)에 나타난 未定常數 C는 F가 $\sigma\gg1$ 때 (14)의 漸近形을 갖도록 決定하면 좋다. 以上의 過程을 $G(\sigma)$를 求하는 데에도 適用하여 數値計算한 結果를 Fig.2에 圖示한다. Fig.2에 주어진 $F(\sigma)$와 $G(\sigma)$를 式 (7)과 (10)에 代入하면 平面에 接한 球의 運動에 의한 速度 potential을 얻게된다.

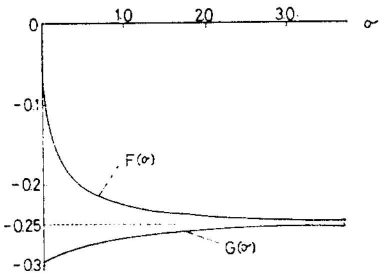

Fig. 2. Graphs of F and G as functions of σ

Ⅲ. 球에 작용하는 힘

第2節에서 求한 速度 potential을 使用하여 各瞬間 流體가 球에 미치는 힘 $\boldsymbol{K}$를 計算한다. 힘 $\boldsymbol{K}$는 球面上에서 壓力을 積分하여 얻어진다.

$$\boldsymbol{K}=-\int_{\nu=\nu_0}p\,\boldsymbol{n}\,dS \quad (15)$$

여기서 p는 球面에서의 壓力, $\boldsymbol{n}$은 單位 外向法線 vector이다. 球의 運動에 依한 흐름이 非定常的이라는 點에 留意하고 Bernoulli의 定理를 使用하여 式 (15)를 速度 potential의 項으로 表現하면[11], 간단한 計算結果,

$$\boldsymbol{K}=\rho\frac{dV}{dt}\int_{\nu=\nu_0}\Phi\,\boldsymbol{n}\,dS$$
$$+\rho\int_{\nu=0}\left\{\frac{1}{2}|\text{grad}\,\phi|^2-V\frac{\partial\phi}{\partial x}\right\}\boldsymbol{n}\,dS$$
$$+\rho\int_{\nu=0}(\text{grad}\,\phi)\frac{\partial\phi}{\partial z}dS \quad (16)$$

여기서 Φ는 球가 x方向으로 單位速度로 움직일 때의 速度 potential을 나타낸다.

Tangent sphere coordinates에서 ν=const 面의 面積素 dS는

$$dS=\frac{\mu}{(\eta^2+\nu^2)^2}d\mu d\theta$$

로 주어짐에 注意하고, 式 (16)에 第2節에서 求한 速度 potential을 代入하여 部分積分, 積分順序의 交換等을 쓰고 매우 긴 計算을 행하면 힘 $\boldsymbol{K}$는 다음과 같이 주어지는 것을 알 수 있다.

$$\boldsymbol{K}_{R,F}=-M'_{R,F}\frac{dU}{dt}+L_{R,F}\boldsymbol{e}_z, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{U}=U\boldsymbol{e}_x,$$

(여기서 $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_z$는 各各 x方向, z方向의 單位 vector이다.) 式 (17)의 右邊의 第1項은 慣性反力을 第2項은 壁面의 存在때문에 생기는 揚力을 나타낸다.

$$M'_R=-\rho\int_{\nu=\nu_0}\Phi_R(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_x)dS$$
$$=-16M'_\infty\int_0^\infty\sigma^2e^{-\sigma}(\coth\sigma-1)\coth\sigma F(\sigma)d\sigma$$
$$=1,223M'_\infty, \quad (18a)$$

$$M'_F=-\rho\int_{\nu=\nu_0}\Phi_F(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_x)dS$$
$$=-16M'_\infty\int_0^\infty\sigma^2e^{-\sigma}(1-\tanh\sigma)\sinh\sigma G(\sigma)d\sigma$$
$$=0.839M'_\infty; \quad (18b)$$

여기서 M'_∞은 無限流體內에서 球가 運動할 때 球가 갖는 附加質量(added mass)이다.

$$M'_\infty=\frac{2}{3}\pi\rho a^3.$$

또

$$L_R=-\rho\int_{\nu=0}\left\{\frac{1}{2}|\text{grad}\,\phi_R|^2-V\frac{\partial\phi_R}{\partial x}\right\}dS$$
$$=8\pi\rho V^2a^2\int_0^\infty\sigma^2(\coth\sigma-1)^2F(\sigma)$$

$$\left\{1+\frac{\sinh\sigma\cosh\sigma-\sigma}{\sinh^2\sigma}F(\sigma)\right\}d\sigma$$

$$=-0.551\pi\rho V^2a^2. \qquad (19a)$$

$$L_F=+\rho\int_{\nu=0}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_F}{\partial z}\right)^2dS$$

$$=-8\pi\rho V^2a^2\int_0^\infty\sigma^2(1-\tanh\sigma)^2G(\sigma)$$

$$\left\{1+\frac{\sinh\sigma\cosh\sigma+\sigma}{\cosh^2\sigma}G(\sigma)\right\}d\sigma$$

$$=0.251\pi\rho V^2a^2. \qquad (19b)$$

平面境界面에 接한 球가 平面에 垂直으로 움직일 때의 附加質量은

$$M'=\begin{cases}1.606\,M'_\infty & (\text{固體境界面의 경우})\\ 0.701\,M'_\infty & (\text{自由境界面의 경우})\end{cases}$$

으로 주어지므로 (4), (5), 式 (18)에 주어진 平面에 平行으로 움직일 때의 球의 附加質量과 比較하면 境界面의 存在의 影響은 球가 경계면에 수직으로 움직일 때가 平行으로 움직일 때 보다 더 크게 나타남을 알 수 있다. 境界面이 固體일 때에는 壁쪽으로 引力이, 自由일 때에는 壁으로 부터 反撥力이 球에 作用한다는 點에서는 球가 境界面에 수직으로 움직일 때와 平行으로 움직일 때와 같은 傾向을 보이나 그 크기는 球가 境界面에 수직으로 움직일 때가 더 크다 [참고문헌 (5)와 식 (19)를 比較하라].

本研究에 對해 깊은 관심을 가지고 有益한 助言을 하여 주신 한국 과학원의 곽병만 교수님께 感謝 드립니다.

참 고 문 헌

1. L.D. Landau & E.M. Lifshitz: *Fluid Mechanics*, p. 18, Pergamon Press, London, 1959.
2. H. Lamb: Hydrodynamics, pp. 130-134, Cambridge Univ. Press, London, 1932.
3. D. Weihs & R.D. Small: "An Exact Solution of the Motion of Two Adjacent Spheres in Axisymmetric Potential Flow", *Israel J. Technology*, Vol. 13, pp. 1-6, 1675.
4. 金文彦・李正五 : "平面壁에 垂直으로 움직이는 球의 假想質量" 대한기계학회 1978年度 춘계학술대회 抄錄集, pp. 22-24.
5. M. Bentwich & T. Miloh: "On the Exact Solution for the Two-Sphere Problem in Axisymmetric Potential Flow", *Trans. ASME, J. Applied Mech.* Vol. 45, pp. 463-468, 1978.
6. R. Small & D. Weihs: "Axisymmetric Potential Flow Over Two Spheres in Contact", *Trans. ASME, J. Applied Mech.*, Vol. 42, pp. 763-765, 1975.
7. F.A. Morrison, Jr.: "Irrotational Flow About Two Touching Spheres" *Trans. ASME, J. Applied Mech.*, Vol. 43, pp. 365-366, 1976.
8. D.J. Jefferey & H.S. Chen: "The Virtual Mass of a Sphere Moving Toward a Plane Wall", *Trans. ASME, J. Applied Mech.*, Vol. 44, pp. 166-1977.
9. P. Moon & D. E. Spencer: "*Field Theory Handbook*", pp. 104-106, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
10. A. Erdelyi: "*Higher Transcendental Functions*", Vol. 2 Chapter VII, McGraw-Hill, New York 1953.
11. G.K. Batchelor: "*An Introduction to Fluid Dynamics*", pp. 404-408, Cambridge Univ. Press, London, 1967.