天文学会誌
The Journ. of Korean. Soc. 12, (1-5)

恒星의 對流層의 問題点

—壓力平衡의 假定에 관하여—

서울大 天文學科 **玄 正 晙**

(1979年 6月 15日 接授)

SOME PROBLEMS IN THE STELLAR CONVECTION ZONE

— ON THE PRESSURE EQUILIBRIUM ASSUMPTION —

J. J. HYUN

Department of Astronomy, Seoul National University

Received 1979 June 15

ABSTRACT

The usual assumption of the pressure equilibrium between the convective elements and the surrounding fluid has been dropped, and the effects of the pressure perturbation of the convective element on its velocity and T perturbation have been estimated.

§ 1. 序 論

恒星의 對流層은 恒星의 進化의 거의 모든 段階에서 매우 중요한 역할을 하고 있다. 즉,

a) 前主系列의 收縮段階(全的인 對流構造)

b) 赤色巨星(質量放出)

c) Cepheid変光星(脈動과 對流의 相互作用)

d) 白色矮星(冷却時間) (Böhm, 1968)

등이다.

그런데 恒星內部의 氣體의 對流에서는 Reynolds 数($=$慣性力/粘性力$=\frac{u\ell}{\nu}$, u, ℓ : 흐름의 代表的인 速度와 크기, ν : 運動學的 粘性係数)가 매우 커서 乱流的인 對流로 나타나므로, 이것을 正確하게 다루기가 매우 어려운 實情에 있으며, 相當한 假定과 이에 따른 近似方法을 피할 수 없는 것이다.

現在까지 널리 쓰여진 方法은 混合距離(mixing length)理論으로 알려진 것으로 Taylor (1915), Schmidt(1917), Prandtl(1925)등이 乱流流体속에서 일어나는 渦度 (vorticity), 熱, 運動量등의 輸送現象을 설명하는 방편으로 원래 고안한 것이다.

対流의 경우, 熱을 輸送하는 流体의 덩어리(eddy, parcel, element, cell, blob 등으로 불리운다)의 平均自由行程이 混合距離라고 할 수 있다.

이 덩어리는 어떤 不安定性에 연유하여 그 주위와 거의 같은 性質을 갖고 發生하며 速度 w로 混合距離 ℓ만큼 움직인 후 다시 不安定하게 되어 깨어져서 그 주위의 流体와 瞬間的으로 섞여 버린다는 것이다.

Prandtl(1926)은 流体의 덩어리의 運動에너지가 推進力이 없을 때 乱流抵抗(turbulent drag)으로 인하여 대략 그 크기 ℓ만큼 운동하는 동안에 모두 소모되고 만다고 지적하였다.

그 이유는 Reynolds数가 큰 경우 乱流抵抗이 (流速)^{2}에 비례하고, 따라서 運動에너지에 비례하는데 있다.

그러므로 対流덩어리의 混合거리 ℓ은 그 덩어리의 크기를 대략 表現한다고 할 수 있다.

또 対流덩어리의 운동은 위의 생각에 따른다면 等速運動(w)으로 ℓ만큼 가다가 瞬間的으로 없어지는 過程, 또는 乱流 抵抗으로 거리 ℓ사이에서 連續的으로 $w \rightarrow 0$이 되는 過程의 어느 쪽으로도 해석할 수 있다.

前者에서는 対流의 推進力(즉 浮力)과 乱流抵抗이 서로 비겨서 等速運動이 이루어진다고 보는 셈이다. (Prandtl, 1932)

이런 觀点은 Biermann(1932, 1937, 1943)과 Siedentopf (1933 a, b, 1935)에 의하여 恒星의 対流層研究에 처음으로 適用되었다.

또 다른 觀点은 対流덩어리가 浮力만으로 断熱的으로 加速된다고 보는 것이다. (Biermann 1948 a, b) 여기에는 圧力, 乱流抵抗의 효과가 近似的으로 方程式속에 加味되어 있다.

最近에 이르러 対流過程에 輻射의 出入이 고려되게 되었으나(Vitense 1953, Böhm-Vitense 1958), 乱流抵抗을 고려하는 대신에 対流덩어리의 瞬間的인 破裂로 表現하는 것이 通例로 되어 왔다.

以上은 主로 Gough(1977)의 論文을 参考로 恒星対流層의 混合距離理論의 背景을 소개한 것이다.

보통 이 理論에서는 対流덩어리의 運動過程에서 주위의 気体와 圧力平衡을 유지하고 있음이 假定되어 있다.

주위 보다 温度가 높은(따라서 密度가 보다 작은) 덩어리는 浮力過剰으로 上昇하고, 주위보다 温度가 낮은(密度가 보다 큰) 덩어리는 浮力不足으로 下降한다. 앞의 경우 熱의 過剰量이 위로 輸送되고, 뒤의 경우는 熱의 不足量이 아래로 輸送되므로, 어느 경우나 熱이 위로 輸送되는 結果가 되는 셈이다.

本論文에서는 圧力平衡의 假定을 없앴을 때 対流에 미치는 영향을 알아보기로 하였다.

§ 2. 對流덩어리의 圧力變動

対流덩어리(convective cell)의 운동은 流体力學의 方程式(運動量, 質量, 熱 energy의 保存則)

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt}=\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}.\nabla\vec{u}\right)=-\nabla P+\rho\vec{g}+\nu\nabla^2\vec{u} \quad (1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla(\rho\vec{u})=0 \quad (2)$$

$$\rho\frac{Du}{Dt}-\frac{P}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}=-\nabla\vec{F}+\tau\nabla\vec{u} \quad (3)$$

와 気体의 狀態方程式

$$P=\frac{k}{\mu\nabla m_H}\rho T \quad (4)$$

로 記述된다. (μ; 平均分子量, m_H; H 原子의 質量, k; Boltzmann 常数)

여기서 $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla$

$\nu=\frac{\mu}{\rho}$: 運動學的 粘性係数

U : 内部에너지/gr.

$\vec{F}$: 輻射의 流束(flux)

$$=-K\nabla T \quad (5)$$

$$K=C_p\rho k,\ K : \text{輻射傳導係数} \quad (6)$$

$$k=\frac{4acT^3}{3x\rho^2 C_p} \quad (7)$$

C_p : 定圧比熱

x : Rosseland의 平均吸收係数

a : 輻射密度常数

c : 光速度

또 τ는 粘性 stress tensor로서

$$\tau_{ik}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) \quad (8)$$

μ : 粘性係数

로 표시된다.

恒星内部에서는 μ는 10^{-4} C.G.S (太陽의対流層, Vitense, 1953)로 매우 작은 量이므로 (1), (3)에서 粘性項은 省略할 수 있다.

対流덩어리의 狀態는 平衡狀態($\vec{u}=0$)에 있는 주위의 気体의 一次攝動으로 볼수있다. 즉 P, ρ, T 등의 物理量은

$$f(\vec{r},t)=\bar{f}(z)+f'(\vec{r},t) \quad (9)$$

와 같이 時間的 또는 水平方向의 平均量 $\bar{f}$ 로서 平衡気体를 나타내고 이로부터의 一次攝動 f' 로 対流덩어리의 狀態(P', ρ', $\vec{u}$)를 나타낸다.

여기서 計算의 簡便을 위해 対流層을 平行平面(xy平面)의 層으로 近似하고, z軸은 垂直上方으로(즉 恒量의 表面으로) 잡았다.

따라서 対流덩어리의 운동은 (1), (2), (3), (4)의 各 変数를 (9)로 나타낸 다음, 平均量을 나타내는 平衡気体의 狀態를 減하는 이른바 線形化(linearization)의 手続을 거쳐서 얻어지는 方程式으로 나타낼 수 있다.

(1), (2), (3), (4)를 線型化하면

$$\bar{\rho}\frac{D\vec{u}}{Dt}=\bar{\rho}\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\nabla\vec{u}\right)=-\nabla P'+\rho\vec{g} \quad (1)'$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\nabla(\bar{\rho}\vec{u})=0 \quad (2)'$$

$$\bar{\rho}C_p\frac{DT'}{Dt}-\delta\frac{DP'}{Dt}=\bar{\rho}C_p\beta w+\nabla(\bar{K}\nabla T')+\nabla(K'\nabla\bar{T}) \quad (3)'$$

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}}=-\delta\frac{T'}{\bar{T}}+\varepsilon\frac{P'}{\bar{P}} \quad (4)'$$

로 된다. 여기 $\bar{\rho}$, $\bar{P}$등은 ρ, P 등을 나타내고

$$\beta=-\left[\frac{d\bar{T}}{dZ}-\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S\frac{d\bar{P}}{dz}\right]=-\left(\frac{d\bar{T}}{dz}+\frac{\delta g}{C_p}\right)$$

$$s;\text{entropy/gr.} \quad (10)$$

는 超断熱 gradient (super-adiabatic gradient)이다. 또

$$\delta=-\left(\frac{\partial\ell n\rho}{\partial\ell nT}\right)_P,\quad \varepsilon=\left(\frac{\partial\ell n\rho}{\partial\ell nP}\right)_T \quad (11)$$

이다.

(3)에서 (3)'를 얻을 때 熱力学의 関係式

$$Tds=du+Pd\left(\frac{1}{\rho}\right)=C_p dT-\frac{\delta}{\rho}dP$$

$$C_p=\frac{\delta}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S$$

을 이용했다.

方程式 (1)′~(4)′는 엄밀히 풀 수 없으므로 a) 気体의 圧縮性, b) 層内의 変化率 c) 対流덩어리의 P′등에 관해서 어떤 近似를 하는 것이 通例이다.

a) 気体의 圧縮性을 (1)′, (3)′이외에서 무시하는 Boussinesq 近似를 쓴다. 즉 (2)′에서

$$\nabla \vec{u} = 0 \qquad (2)''$$

로 近似한다.

또는 이보다 너그러운 非弾性(anelastic) 近似 (Gough, 1969)로서 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$를 가정한다.

$$(2)' \rightarrow \nabla (\rho \vec{u}) = 0 \qquad (2)'''$$

b) 混合거리 ℓ은 対流層内에서 P, ρ, T 등이 相当한 変化를 일으키는 거리, 예로서 圧力P가 1/e로 변하는 거리인 圧力의 scale height

$$H_P = -\frac{dZ}{d\,\ell n\,P} = -\frac{dz}{dp} P = \frac{P}{\rho g} \qquad (12)$$

에 比해 훨씬 작다고 假定한다.

즉 $\ell \ll H_P$ (13)

또는 対流層의 두께 d에 대해서

$d \ll H_P$ (13)′

을 假定한다.

그러나 恒星의 対流層에서는 이 假定은 언제나 이루어지는 것이 아니다.

특히 두꺼운 対流層을 가진 赤色巨星의 경우 이런 假定이 成立할 수 없다.

이는 混合거리 ℓ을 決定하는 観測的인 근거가 없다는 事実과 더불어, 現在 混合거리의 理論이 内包하는 중요한 欠陥으로 여겨지고 있다.

실제 계산에 있어서는 各点에서

$$\ell = \alpha H_P \qquad (14)$$

로 잡고 α는 1에 가까운 (0.5－2) 常数로 잡는다. 이와 같은 局所的(local) 混合거리의 理論은 $\ell \geq H_P$인 경우에 非現実的이므로 非局所的인 混合거리의 理論이 試図되고 있다. (e.g. Ulrich, 1970).

c) 対流덩어리는 恒常 주위의 気体와 圧力平衡에 있다. 즉

$$P' = 0 \qquad (15)$$

를 가정한다. 이는 圧力의 変動에 対한 調整이 瞬間的으로 이루어진다는 것을 뜻하지만 이 역시 問題가 될 수 있는 것이다.

a)와 c)는 音波의 発生을 除去하는 結果를 暗示하고 있다. 그러나 音波나 脈動등이 問題가 되는 경우에 이런 假定을 쓸 수 없음은 勿論이다.

本論文에서는 c)의 가정을 없애고 생각해보기로 한다.

対流덩어리가 輸送하는 熱의 energy flux는

$$F_C = \rho C_P w T' \qquad (16)$$

로 표시되므로 w와 T'를 (1)′~(4)′에서 구하는데 問題가 있는 것이다.

対流덩어리의 鉛直方向의 速度 W는 粘性力을 무시할 때 浮力 $\rho' g$가 거리 ℓ을 운동하는 동안에 하는 일이 対流덩어리의 運動에너지와 같다는 사실

$$\rho w^2 \simeq |\rho'| g \ell \qquad (17)$$

에서 구할 수 있다. 여기에는 각 対流덩어리가 움직이는 실제 거리의 평가 등에 따르는 크기~1인 常数因子가 붙을수 있다.

(4)′와 (17)에서

$$w^2 = g\ell \left| \left(\delta \frac{T'}{T} + \varepsilon \frac{P'}{P} \right) \right| \qquad (18)$$

이 된다. 対流덩어리의 P'($\neq 0$)는 (1)′에서 보면 $\nabla P'$의 項을 통하여 一部는 対流덩어리의 鉛直方向의 運動과 一部는 水平方向으로의 運動에 영향을 줌을 알수 있다.

(1)′에 (4)′를 넣어서 両辺의 発散(divergence)을 취한다음 a) 의 (2)‴ $\nabla \rho \vec{u} = 0$에 유의하고 또 $\vec{u}$의 2次項을 생략하면

$$\nabla^2 P' = \nabla \left\{ \vec{g} \rho \left(-\delta \frac{T'}{T} + \varepsilon \frac{P'}{P} \right) \right\} \qquad (19)$$

를 얻는다.

P', T' 등의 空間変化를 線型mode의 理論에서 처럼 $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$의 形式으로 가정하면,

$$\nabla = i\vec{k} \qquad \vec{k} : \text{波数 vector} \qquad (20)$$

이므로 (19)는

$$-k^2 P' = -i k_z g \rho \left(-\delta \frac{T'}{T} + \varepsilon \frac{P'}{P} \right) \qquad (21)$$

따라서 両辺을 P로 나누고 $H_P = \frac{P}{\rho g}$에 유의하고 $\frac{P'}{P}$를 구하면

$$\frac{P'}{P} = \frac{\frac{k_z}{H_P}}{-k^2 + i\varepsilon \frac{k_z}{H_P}} \delta \frac{T'}{T} = \frac{i k_z^2 \lambda}{-k^2 + i k_z^2 \lambda} \cdot \delta \frac{T'}{T} \qquad (22)$$

여기 $\lambda = \frac{1}{k_z H_P}$ (23)

이다. λ는 H_P에 대한 対流덩어리의 길이 ℓ_z 의 比를 나타낸다.

(22)를 (4)′에 대입하면

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\delta\frac{T'}{T}\left(1 - \frac{i\varepsilon k_z^2 \lambda}{-k^2 + i\varepsilon k_z^2 \lambda}\right) = -\delta\frac{T'}{T} \cdot \frac{-k^2}{-k^2 + i\varepsilon k_z^2 \lambda} \tag{24}$$

$$\left|\frac{\rho'}{\rho}\right| = \delta\left|\frac{T'}{T}\right|\left|\frac{-k^2}{-k^2 + i\varepsilon k_z^2 \lambda}\right| = \delta\frac{T'}{T}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\varepsilon\frac{k_z^2}{k^2}\lambda\right)^2}} \tag{25}$$

따라서 (18)은

$$w^2 = g\ell\delta\left|\frac{T'}{T}\right|\frac{1}{\sqrt{1+\left(\varepsilon\frac{k_z^2}{k^2}\lambda\right)^2}} \tag{26}$$

로 쓸수 있다.

또 T'은 (3)′에서 계산할 수 있는데 (3)′에서 $\frac{D}{Dt} = w\frac{\partial}{\partial Z} = i k_z w$ 로 써서 (22)를 고려하면 ((3)′의 K'項은 가정 b)에 의하여 0으로 한다).

$$T' = \frac{\beta w}{Kk^2 + ik_z w(1 + \nabla_A A\delta)} \tag{27}$$

이다.

여기 $A = \frac{ik_z^2 \lambda}{-k^2 + ik_z^2 \lambda}$

$$\nabla_A = \left(\frac{\partial \ell n T}{\partial \ell n P}\right)_S \text{ ：断熱温度変化率} \tag{28}$$

이다.

$Kk^2 = \tau_t^{-1}$ ：thermal time scale

$k_z W = \tau_c^{-1}$ ：convective time scale (29)

으로 놓고 (27)을 고쳐 쓰면

$$T' = \frac{\beta W}{\frac{1}{\tau_t} + i\frac{1}{\tau_c}(1 + \nabla_A A\delta)} \tag{27'}$$

이다. $P' \neq 0$의 効果는 $\nabla_A A\delta$의 項으로 나타난다.

§ 3. 結 論

위에서 対流덩어리의 圧力変動P'를 무시하지 않을 때 그 効果는 速度w에 대해서 (26), 温度変動T'에 대해서 (27)로 주어지는 것을 알았다.

電離의 発生을 무시하면 $\delta = \varepsilon = 1$이므로 (26)에서 $P' \neq 0$인 効果는 速度 w를 $P' = 0$ 때에 비해서

$$\left(1 + \left(\frac{k_z^2}{k^2}\lambda\right)^2\right)^{-\frac{1}{4}}$$

로 줄이는 셈이다.

즉 그 効果는 $\frac{k_z^2}{k^2} = \frac{\frac{1}{\ell_z^2}}{\frac{1}{\ell_h^2} + \frac{1}{\ell_z^2}} = \frac{\ell_h^2}{\ell_h^2 + \ell_z^2}$

(ℓ_h ：水平方向의 길이) 이 클수록, 즉 対流덩어리의 形態가 対流方向에 수직으로 길어질 수록 크게 나타난다.

또 $\lambda = \frac{1}{k_z H_P} = \frac{\ell_z}{H_P}$는 假定 c)에서 어긋나는 尺度가 되는데 対流덩어리의 길이사이에서 일어나는 物理量의 変化가 클수록 $P' \neq 0$의 効果가 커지는 셈이다.

対流層의 上下端에서 $w = 0$인 境界条件을 적용할 경우 $k_z = (N+1)\frac{\pi}{a}$로 주어진다. 이때 $k_z^2 = \frac{1}{2}k^2$인 mode가 最大의成長率(growth rate)를 갖는다. (Ledoux, Schwarzschild, Spiegel, 1960) 여기 N은 対流層속의 node 의 개수, d는 層의 두께를 나타낸다.

k_z의 最小値

$$k_z = \frac{\pi}{d}$$

를 취하면 $\left(\frac{k_z^2}{k^2}\lambda\right)^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\frac{d}{H_P}\right)^2$이 된다.

太陽의 경우 d/H_P는 대체로 1보다 크므로 $P' \neq 0$의 効果를 기대할 수 있다.

T'에 대한 영향은 (27)′에서 가늠할 수 있는데 $P' \neq 0$인 効果는 특히 $\tau_c < \tau_t$인 경우 클 것을 짐작할 수 있다. 즉 力学的인 変動이 熱的인 変動보다 우세한 경우에 해당한다.

本研究에서 筆者는 1978년도 서울大AID 再硏修計劃의 도움을 받은 것에 대하여 感謝를 드리는 바이다.

参考文献

Biermann, L., 1932, *Zs f. Ap.*, **5**, 117

Biermann, L., 1937, *A.N.*, **264**, 361

Biermann, L., 1943, *Zs f. Ap.*, **22**, 244

Biermann, L., 1948a, Zs f. *Ap.*, **25**, 135

Biermann, L., 1948b, FIAT Review of German Science (Astr. Ap. Cosm.), 161

Böhm, K. H. : 1968, *Ap. and Space Sci.*, **2**, 375

Böhm-Vitense, E., 1958, Zs f. *Ap.* **46**, 108

Gough, D.O., 1969, J. *Atmos. Sci.*, **26**, 448

Gough, D.O., 1977, Problems of Stellar Convection, Springer-Verlag

Ledoux, P., Schwarzschild, M., and Spiegel, E.A., 1961, *Ap. J.*, **133**, 184

Prandtl, L., 1925, Zs f. angew. Math., **5**, 136

Prandtl, L., 1926, Verhandl, II intern. Kongr. tech. Zurich, p. 62

Prandtl, L., 1932, Beitr. z. Phys. d. freien Atm. **19**, 188

Schmidt, W. 1917, Sitzungsber. (Kais. Ak. d. Wiss. Wein), Abt IIa, **126**, 757

Siedentopf, H., 1933a, *A.N.*, **247**, 297

Siedentopf, H., 1933b, *A.N*, **249**, 53

Siedentopf, H., 1935, *A.N.*, **255**, 157

Taylor, G.I., 1915, Phil. Trans., A, **215**, 1

Ulrich, R.K., 1970, *Ap. and Apace Sci.* **7**, 71

Ulrich, R.K., 1970, *ibid.*, **7**, 183

Ulrich, R.K., 1970, *ibid.*, **9**, 80

Vitense, E., 1953, Zs f. *Ap.*, **32**, 135